



20-100

S. 1051. De









MEMORIAS

DE

MATHEMATICA

EPHISICA



MEMORIAS  
DE  
MATHEMATICA  
E PHISICA  
DA  
ACADEMIA R. DAS SCIENCIAS  
DE LISBOA.

---

*Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria.*

---

TOMO II.



LISBOA  
NA TYPOGRAFIA DA ACADEMIA,

1799.

*Com licença de S. ALTEZA REAL.*





MEMORIAS  
 DE  
 MATHEMATICA E PHISICA  
 DA  
 ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS  
 DE LISBOA.

---

DEMONSTRAÇÃO

*Do Theorema de Newton sobre a relação que tem os coefficients de qualquer equação algebraica com as sommas das potencias das suas raizes, e applicação do mesmo Theorema ao desenvolvimento em serie dos productos compostos de infinitos factores.*

POR FRANCISCO DE BORJA GARÇÃO STOCKLER.

§. I.

**D**ada huma equação de qualquer gráo

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \dots + N = 0$$

Tom. II. A N=0

Lida em  
 17 de  
 Dez. de  
 1789.

que

que se supponha ser produzida pela multiplicação de hum numero  $n$  de binomios simples  $x + a; x + a'; x + a''; x + a'''$ ;  $x + a^{iv}; x + a^v$ ; &c., e denotando por  $\int a$  a somma de todas as quantidades  $a; a'; a''; a'''$ ; &c. por  $\int a^2$  a somma dos seus quadrados; por  $\int a^3$  a somma dos seus cubos; e assim successivamente, de sorte que seja

$$\int a = a + a' + a'' + a''' + a^{iv} + a^v + \&c.$$

$$\int a^2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + a^{iv^2} + a^{v^2} + \&c.$$

$$\int a^3 = a^3 + a'^3 + a''^3 + a'''^3 + a^{iv^3} + a^{v^3} + \&c.$$

$$\int a^4 = a^4 + a'^4 + a''^4 + a'''^4 + a^{iv^4} + a^{v^4} + \&c.$$

$$-----$$

$$-----$$

$$\int a^n = a^n + a'^n + a''^n + a'''^n + a^{iv^n} + a^{v^n} + \&c.$$

afirma *Newton* em o Capitulo terceiro da segunda Parte da sua *Arithmetica Universal*, sem com tudo o demonstrar, que será sempre

$$\int a = A$$

$$\int a^2 = A \int a - 2 B$$

$$\int a^3 = A \int a^2 - B \int a + 3 C$$

$$\int a^4 = A \int a^3 - B \int a^2 + C \int a - 4 D$$

$$\int a^5 = A \int a^4 - B \int a^3 + C \int a^2 - D \int a + 5 E$$

$$-----$$

$$-----$$

$$\int a^n = A \int a^{n-1} - B \int a^{n-2} + C \int a^{n-3} - D \int a^{n-4} +$$

$$E \int a^{n-5} - \dots + n N.$$

## §. II.

Para demonstrar este elegantissimo Theorema observaremos primeiramente, que pela natureza dos productos compostos

postos de factores binomios, como se acha demonstrado em quasi todos os livros elementares de Algebra,  $A$  representa a somma de todas as quantidades  $a; a'; a''; a'''; \&c.$   $B$  representa a somma dos seus productos sendo ellas entre si multiplicadas duas a duas;  $C$  a somma dos seus productos sendo ellas entre si multiplicadas tres a tres; e assim successivamente. Ora se dividirmos a Equação

$$(x + a)(x + a')(x + a'')(x + a''') \cdots (x + a^{n-1}) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots + N$$

por  $x^n$  teremos

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 + \frac{a'}{x}\right)\left(1 + \frac{a''}{x}\right)\left(1 + \frac{a'''}{x}\right) \cdots \left(1 + \frac{a^{n-1}}{x}\right) = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \cdots + \frac{N}{x^n}$$

e chamando  $Z$  a esta expressão, e tomando o seu logarithmo hyperbolico será

$$\text{Log. } Z = \text{Log.} \left(1 + \frac{a}{x}\right) + \text{Log.} \left(1 + \frac{a'}{x}\right) + \text{Log.} \left(1 + \frac{a''}{x}\right) + \&c.$$

ou desenvolvendo cada hum destes logarithmos em serie

$$\text{Log. } Z = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} + \frac{a^5}{5x^5} - \frac{a^6}{6x^6} + \cdots \&c. \\ \frac{a'}{x} - \frac{a'^2}{2x^2} + \frac{a'^3}{3x^3} - \frac{a'^4}{4x^4} + \frac{a'^5}{5x^5} - \frac{a'^6}{6x^6} + \cdots \&c. \\ \frac{a''}{x} - \frac{a''^2}{2x^2} + \frac{a''^3}{3x^3} - \frac{a''^4}{4x^4} + \frac{a''^5}{5x^5} - \frac{a''^6}{6x^6} + \cdots \&c. \\ \frac{a'''}{x} - \frac{a'''^2}{2x^2} + \frac{a'''^3}{3x^3} - \frac{a'''^4}{4x^4} + \frac{a'''^5}{5x^5} - \frac{a'''^6}{6x^6} + \cdots \&c. \\ \&c. \end{array} \right.$$

expressão que evidentemente se reduz a

$$\text{Log. } Z = \frac{1}{x} \int a - \frac{1}{2x^2} \int a^2 + \frac{1}{3x^3} \int a^3 - \frac{1}{4x^4} \int a^4 + \frac{1}{5x^5} \int a^5 \\ - \frac{1}{6x^6} \int a^6 + \dots \&c.$$

mas he tambem

$$\text{Log. } Z = \text{Log.} \left( 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x^6} + \dots \&c. \right)$$

ou desenvolvendo em serie

$$\begin{aligned} \text{Log. } Z = & \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x^6} + \&c. \\ & - \frac{1}{2} \frac{A^2}{x^2} - \frac{AB}{x^3} - \frac{AC}{x^4} - \frac{AD}{x^5} - \frac{AE}{x^6} - \&c. \\ & + \frac{1}{3} \frac{A^3}{x^3} - \frac{1}{2} \frac{B^2}{x^4} - \frac{BC}{x^5} - \frac{BD}{x^6} - \&c. \\ & + \frac{A^2 B}{x^4} + \frac{A^2 C}{x^5} - \frac{1}{2} \frac{C^2}{x^6} - \&c. \\ & - \frac{1}{4} \frac{A^4}{x^4} + \frac{AB^2}{x^5} + \frac{A^2 D}{x^6} + \&c. \\ & - \frac{A^3 B}{x^5} + \frac{1}{3} \frac{ABC}{x^6} + \&c. \\ & + \frac{1}{5} \frac{A^5}{x^5} + \frac{1}{3} \frac{B^3}{x^6} + \&c. \\ & - \frac{A^3 C}{x^6} + \&c. \\ & - \frac{3}{2} \frac{A^2 B^2}{x^6} + \&c. \\ & + \frac{A^4 B}{x^6} - \&c. \\ & - \frac{1}{6} \frac{A^6}{x^6} - \&c. \\ & - \&c. \\ & e \end{aligned}$$

e esta expressão deve fer identica com a precedente ; logo tambem deve fer

$$\int a = A$$

$$\int a^2 = A^2 - 2 B$$

$$\int a^3 = A^3 - 3 AB + 3 C$$

$$\int a^4 = A^4 - 4 A^2 B + 4 AC + 2 B^2 - 4 D$$

$$\int a^5 = A^5 - 5 A^3 B + 5 A^2 C + 5 AB^2 - 5 AD - 5 BC + 5 E$$

&c.

### §. III.

Substituindo na segunda destas equações  $A \int a$  em lugar de  $A^2$  ella se reduzirá a

$$\int a^2 = A \int a - 2 B$$

e substituindo na terceira o valor de  $A^2$  tirado da segunda, ella se reduzirá a  $\int a^3 = A \int a^2 - AB + 3 C$ : e finalmente a

$$\int a^3 = A \int a^2 - B \int a + 3 C$$

substituindo por  $A$  no penultimo termo do segundo membro o seu valor  $\int a$  tirado da primeira

### §. IV.

Substituindo na quarta o valor de  $A^3$  tirado da terceira, ella se converterá em  $\int a^4 = A \int a^3 - A^2 B + AC + 2 B^2 - 4 D$ : substituindo por  $A^2$  o seu valor tirado da segunda ficará  $\int a^4 = A \int a^3 - B \int a^2 + AC - 4 D$ : e finalmente substituindo no penultimo termo por  $A$  o seu valor  $\int a$  tirado da primeira teremos

$$\int a^4 = A \int a^3 - B \int a^2 + C \int a - 4 D$$

## § V.

Do mesmo modo substituindo na quinta equação primeiramente, o valor de  $A^4$  tirado da quarta : depois o valor de  $A^3$  tirado da terceira : depois o valor de  $A^2$  tirado da segunda : e finalmente no penultimo termo o valor de  $A$  tirado da primeira, ella se converterá em

$$\int a^5 = A \int a^4 - B \int a^3 + C \int a^2 - D \int a + 5 E$$

e continuando assim successivamente a substituir em cada huma das equações achadas no §. II. em lugar das potencias successivas de  $A$  os seus valores tirados das equações precedentes, se iráõ achando todas as equações

$$\int a = A$$

$$\int a^2 = A \int a - 2 B$$

$$\int a^3 = A \int a^2 - B \int a + 3 C$$

$$\int a^4 = A \int a^3 - B \int a^2 + C \int a - 4 D$$

$$\int a^5 = A \int a^4 - B \int a^3 + C \int a^2 - D \int a + 5 E$$

$$\int a^6 = A \int a^5 - B \int a^4 + C \int a^3 - D \int a^2 + E \int a - 6 F$$

&c.

que constituem a serie de expressões indicada em o §. I. e cuja demonstração se pertendia.

## §. VI.

He evidente, que a primeira serie infinita, que achamos exprimir o valor de  $\text{Log. } Z$ , ou (fallando com toda a exactão geometrica) de cuja somma he  $\text{Log. } Z$  o limite de expressão, he a mesma quanto á forma, e successão dos seus termos,

termos, qualquer que seja o numero dos factores de  $Z$ , e por consequencia, representando por  $n$  o numero dos ditos factores, da comparaçãõ della com a segunda se podem deduzir as expressões naõ só de  $\int a$  até  $\int a^n$ ; mas tambem de todas as outras sommas de potencias além desta, e que por tanto o Theorema de *Newton* naõ tem limitaçaõ alguma.

§. VII.

Do que temos dito se segue, que representando por  $X; X'; X''; X''';$  &c. quaesquer Funcções de  $x$ , as quaes constituaõ os termos successivos de huma serie infinita de termos adicionados

$$X + X' + X'' + X''' + X^{1v} + X^v + \&c.$$

toda a serie infinita de termos multiplicados desta forma

$$(1 + X)(1 + X')(1 + X'')(1 + X''')(1 + X^{1v})(1 + X^v) \&c.$$

ferá capaz de limite de expressãõ (\*) todas as vezes que as sommas das series infinitas

$$\begin{aligned} & X + X' + X'' + X''' + X^{1v} + X^v + \&c. \\ (B) \quad & X^2 + X'^2 + X''^2 + X'''^2 + X^{1v^2} + X^{v^2} + \&c. \\ & X^3 + X'^3 + X''^3 + X'''^3 + X^{1v^3} + X^{v^3} + \&c. \\ & X^4 + X'^4 + X''^4 + X'''^4 + X^{1v^4} + X^{v^4} + \&c. \\ & \&c. \end{aligned}$$

forem capazes de hum tal limite; por quanto representando

---

(\*) Por limite de expressãõ de qualquer Funcção variavel entendo a expressãõ, que representaria o seu limite de grandeza, no caso que a sua raiz tivesse as condições necessarias para fazer a dita Funcção capaz de limite, (Veja se a minha *Theorica dos Limites*). Mas como as sommas das series de termos adicionados podem variar já por causa sómente da variaçaõ do numero dos seus termos, já por causa da variaçaõ de grandeza de cada hum delles, já por hum

do por  $F'X$  o estado de grandeza do producto  $(1 + X)$   $(1 + X')$   $(1 + X'')$  &c. quando o numero dos seus factores he  $n$ ; representando por  $A'$  a somma dos termos  $X + X' + X'' + X''' + \dots + X^{n-1}$ ; por  $B'$  a somma dos seus productos sendo elles entre si multiplicados dois a dois; por  $C'$  a somma dos seus productos sendo elles entre si multiplicados tres a tres, e assim successivamente, será

$$F'X = 1 + A' + B' + C' + D' + E' + F' + \dots \text{ \&c.}$$

serie que variará em grandeza, e numero de termos todas as vezes que  $n$  variar; e que será capaz de limite de expressão, quando as quantidades  $A'$ ;  $B'$ ;  $C'$ ;  $D'$ ; &c. forem capazes de hum tal limite. Ora que as quantidades  $A'$ ;  $B'$ ;  $C'$ ;  $D'$  &c. são capazes de limite de expressão, todas as vezes que o são as sommas das series  $(B)$ , he evidente; pois que representando por  $\int' X$  a somma da primeira das ditas series; por  $\int' X^2$  a somma da segunda; por  $\int' X^3$  a somma da terceira, e assim successivamente, e considerando cada huma dellas continuada até ao termo  $n$ , das Fórmulas do §. V. se deduz

$$A' = \int' X.$$

$$B' = -\frac{1}{2} (\int' X^2 - A' \int' X)$$

$$C' = \frac{1}{3} (\int' X^3 - A' \int' X^2 + B' \int' X)$$

$D'$

hum, e outro destes dois motivos juntamente: então no primeiro caso chamo limite de expressão da sua somma aquella expressão, que representaria o limite de grandeza da mesma somma, se a serie tivesse as condições necessarias para admitir hum tal limite; e nos outros dois chamo indistinctamente limite de expressão da somma da serie tanto á outra serie, que se obteria substituindo em lugar de cada hum dos termos da primeira o seu limite particular de expressão, como ao limite de expressão da somma dos termos desta segunda serie.

$$D' = -\frac{1}{4} (\int' X^4 - A' \int' X^3 + B' \int' X^2 - C' \int' X)$$

$$E' = \frac{1}{5} (\int' X^5 - A' \int' X^4 + B' \int' X^3 - C' \int' X^2 + D' \int' X)$$

&c.

expressões em que não entraõ senão quantidades todas capazes de limite de expressãõ; logo representando por  $FX$  o limite de expressãõ de  $F'X$ ; por  $\int X$  o limite de expressãõ de  $\int' X$ ; por  $\int X^2$  o limite de expressãõ de  $\int' X^2$ ; e assim por diante; e representando semelhantemente por  $A$  o limite de expressãõ de  $A'$ , por  $B$  o limite de expressãõ de  $B'$ ; por  $C$  o limite de expressãõ de  $C'$ ; e assim successivamente será

$$A = \int X$$

$$B = -\frac{1}{2} (\int X^2 - A \int X)$$

$$C = \frac{1}{3} (\int X^3 - A \int X^2 + B \int X)$$

$$D = -\frac{1}{4} (\int X^4 - A \int X^3 + B \int X^2 - C \int X)$$

$$E = \frac{1}{5} (\int X^5 - A \int X^4 + B \int X^3 - C \int X^2 + D \int X)$$

&c.

e por tanto

$$1 + A + B + C + D + E + F + \dots \&c.$$

ou o seu limite de expressãõ  $FX$ , será o limite de expressãõ da serie proposta de termos multiplicados

$$(1 + X)(1 + X')(1 + X'')(1 + X''')(1 + X'''' ) \dots \&c.$$

## §. VIII.

Aos productos assim compostos de hum numero ilimitado de factores chamaremos *Productos infinitos*, por nos accommodarmos ao modo commum de fallar de *Wallis*, e dos Geometras, que depois d'elle tem tratado das series infinitas de termos multiplicados; e assim tambem a operaçãõ de afinar, dado hum producto infinito qualquer, huma serie de termos adicionados, que seja o seu limite de expressãõ, chamaremos *converter*, ou *dezenvolver em serie o dito Producto*.

## §. IX.

## E X E M P L O I.

Supponhamos que se pertende converter em serie o Producto infinito

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \&c.$$

como neste caso he

$$\int' X = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \&c.$$

$$\int' X^2 = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} + \&c.$$

$$\int' X^3 = x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + x^{18} + x^{21} + \&c.$$

$$\int' X^4 = x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20} + x^{24} + x^{28} + \&c.$$

&c.

será

$$\int X = \frac{x}{1-x}$$

$\int X$

$$\int X^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\int X^3 = \frac{x^3}{1-x^3}$$

$$\int X^4 = \frac{x^4}{1-x^4}$$

&c.

substituindo estes valores nas expressões de  $A$ ;  $B$ ;  $C$ ;  $D$ ; &c. acharemos

$$A = \frac{x}{1-x}$$

$$B = \frac{Ax^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$C = \frac{Bx^3}{1-x^3} = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$D = \frac{Cx^4}{1-x^4} = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$E = \frac{Dx^5}{1-x^5} = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

&c.

e por consequencia o limite de expressão do producto proposto será

$$1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \&c.$$

serie cuja lei he facil de notar, e que por tanto se pode continuar quanto se quizer; pois que os expoentes de  $x$  em os numeradores dos seus termos são os numeros triangulares, e em os factores dos denominadores vão successivamente crescendo huma unidade.

## §. X.

## E X E M P L O II.

Se quizermos converter em serie o producto infinito

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \&c.$$

então sendo

$$\int' X = -(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \&c.)$$

$$\int' X^2 = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} + \&c.$$

$$\int' X^3 = -(x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + x^{18} + x^{21} + \&c.)$$

$$\int' X^4 = x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20} + x^{24} + x^{28} + \&c.$$

será

$$\int X = \frac{-x}{1-x}$$

$$\int X^2 = \frac{x^2}{(1-x^2)}$$

$$\int X^3 = \frac{-x^3}{1-x^3}$$

$$\int X^4 = \frac{x^4}{1-x^4}$$

&c.

e por tanto

$$A = \frac{-x}{1-x}$$

$$B = \frac{-Ax^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

C =

$$C = \frac{-Bx^3}{1-x^3} = \frac{-x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$D = \frac{-Cx^4}{1-x^4} = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$E = \frac{-Dx^5}{1-x^5} = \frac{-x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

&c.

donde se conclue , que o limite de expressaõ do producto proposto será

$$1 - \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \&c.$$

serie que só difere da precedente na mudança de final dos termos pares.

§. XI.

Do mesmo modo querendo converter em serie o producto infinito

$$(1+x)(1-x^2)(1+x^3)(1-x^4)(1+x^5)(1-x^6) \&c.$$

achariamos.

$$1 + \frac{x}{1+x} - \frac{x^3}{(1+x)(1-x)} - \frac{x^6}{(1+x)(1-x^2)(1+x^3)} + \&c.$$

serie em que a lei da formaçaõ dos termos he facil de conhecer, e em que os finaes se alternaõ de dois em dois termos. Igualmente achariamos.

$$1 - \frac{x}{1+x} - \frac{x^3}{(1+x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1+x)(1-x^2)(1+x^3)} + \&c.$$

se quizessemos converter em serie o producto

$$(1-x)(1+x^2)(1-x^3)(1+x^4)(1-x^5)(1+x^6) \&c.$$

e he facil de ver que a serie, que rezulta desta operaçãõ, só difere da precedente em mudarem de final todos os termos pares.

## §. XII.

He evidente, que por este modo se pode facilmente converter em serie qualquer outro producto infinito, que tenha as condições mencionadas; assim como tambem que com igual facilidade se pode determinar o limite de expressãõ do seu logarithmo; pois se na expressãõ

$$(x + a)(x + a')(x + a'')(x + a''')(x + a^{iv})(x + a^v) \&c.$$

do §. II. supposermos  $x = 1$ , e  $a = X$ ;  $a' = X'$ ;  $a'' = X''$ ;  $a''' = X'''$ ; &c. e se chamarmos  $FX$  ao limite de expressãõ de

$$(1 + X)(1 + X')(1 + X'')(1 + X''')(1 + X^{iv}) \&c.$$

ferá

$$FX = 1 + A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

e

$$\text{Log. } FX = \int X - \frac{1}{2} \int X^2 + \frac{1}{3} \int X^3 - \frac{1}{4} \int X^4 + \frac{1}{5} \int X^5 - \&c.$$

Com tudo sendo os termos de huma, e outra destas series expressados pelos limites de expressãõ das sommas de outras series he claro, que neste estado ellas não feraõ sempre series simples; porém ainda quando não o forem, se poderãõ reduzir a que o fejaõ com mais, ou menos facilidade, segundo a natureza, e fórma das expressões  $\int X$ ;  $\int X^2$ ;  $\int X^3$ ; &c.

## §. XIII.

Para dar alguma idéa do nosso modo de proceder neste

te genero de transformações , supponhamos que se pertende converter em serie simples o producto infinito

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)(1 + x^6) \&c.$$

Primeiramente o desenvolveremos como praticamos em o §. IX. em a serie

$$1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \&c.$$

e depois suppondo esta igual a

$$1 + A^1x + A^2x^2 + A^3x^3 + A^4x^4 + A^5x^5 + \dots + A^n x^n + \&c.$$

teremos a seguinte Equação

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \&c. =$$

$$A^1x + A^2x^2 + A^3x^3 + A^4x^4 + A^5x^5 + \dots + A^n x^n + \&c.$$

e multiplicando ambos os seus membros por  $1 - x$  teremos

$$x + \frac{x^3}{1-x^2} + \frac{x^6}{(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{10}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \&c.$$

$$= A^1x + A^2x^2 + A^3x^3 + A^4x^4 + A^5x^5 + \dots + A^n x^n + \&c.$$

$$- A^1x^2 - A^2x^3 - A^3x^4 - A^4x^5 - \dots - A^{(n-1)}x^n - \&c.$$

Donde se tira  $A^1 = 1$ , e  $A^2 = 1$ ; pois que deve ser  $A^1x = x$ ; e que o primeiro termo, que de necessidade deve rezultar do desenvolvimento de  $\frac{x^3}{1-x^2}$  em serie, he evidentemente  $x^3$ ; o que mostra ser  $A^2 - A^1 = 0$ , ou  $A^2 = 1$ .

§. XIV.

Achados estes valores, e substituidos nos seus devidos lugares tiraremos de hum e outro membro os termos identicos,

ricos , e escreveremos de novo a mesma equaçãõ , a qual por estas operaçoens fica reduzida a

$$\frac{x^3}{1-x^2} + \frac{x^6}{(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{10}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \dots$$

$$= (A^{3'}-1)x^3 + (A^{4'}-A^{3'})x^4 + (A^{5'}-A^{4'})x^5 + (A^{6'}-A^{5'})x^6$$

$$+ \dots + (A^{n'}-A^{(n-1)'})x^n + \dots$$

e multiplicando ambos os seus membros por 1 - x<sup>2</sup> teremos

$$x^3 + \frac{x^6}{1-x^3} + \frac{x^{10}}{(1-x^3)(1-x^4)} + \frac{x^{15}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)} + \dots$$

$$= (A^{3'}-1)x^3 + (A^{4'}-A^{3'})x^4 + (A^{5'}-A^{4'})x^5 + (A^{6'}-A^{5'})x^6$$

$$- (A^{3'}-1)x^5 - (A^{4'}-A^{3'})x^6$$

$$+ \dots + (A^{n'}-A^{(n-1)'})x^n + \dots$$

$$- \dots - (A^{(n-1)'}-A^{(n-2)'})x^n - \dots$$

Donde se tira  $A^{3'} - 1 = 1$  ; ou  $A^{3'} = 2$  ;  $A^{4'} - A^{3'} = 0$  ,  
 ou  $A^{4'} = 2$  ;  $A^{5'} - A^{4'} - A^{3'} + 1 = 0$  ; ou  $A^{5'} = 3$  ; levando  
 a determinaçaõ dos coefficients indeterminados até ao termo , em que  $x$  tem por expoente 5 ; por isso que do desenvolvimento da fracçaõ  $\frac{x^6}{1-x^3}$  não pode resultar termo em que o expoente de  $x$  seja menor que 6 .

§. XV.

Substituindo estes valores no segundo membro da Equaçãõ precedente , e tirando  $x^3$  de hum e outro membro ella se redus a

$$\frac{x^6}{1-x^3} + \frac{x^{10}}{(1-x^3)(1-x^4)} + \frac{x^{15}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)} + \dots$$

$$=$$

$$\begin{aligned}
 &= (A^{6'} - 3) x^6 + (A^{7'} - A^{6'}) x^7 + (A^{8'} - A^{7'}) x^8 + (A^{9'} - A^{8'}) x^9 \\
 &\quad - x^7 - (A^{6'} - 3) x^8 - (A^{7'} - A^{6'}) x^9 \\
 &+ \dots + (A^{n'} - A^{(n-1)'}) x^n + \&c. \\
 &- \dots - (A^{(n-1)'} - A^{(n-2)'}) x^n - \&c.
 \end{aligned}$$

é multiplicando ambos os seus membros por  $1 - x^3$  tere-  
mos

$$\begin{aligned}
 &x^6 + \frac{x^{10}}{1-x^4} + \frac{x^{15}}{(1-x^4)(1-x^3)} + \frac{x^{21}}{(1-x^4)(1-x^3)(1-x^6)} + \&c. \\
 &= (A^{6'} - 3) x^6 + (A^{7'} - A^{6'}) x^7 + (A^{8'} - A^{7'}) x^8 + (A^{9'} - A^{8'}) x^9 \\
 &\quad - x^7 - (A^{6'} - 3) x^8 - (A^{7'} - 3) x^9 \\
 &+ (A^{10'} - A^{9'}) x^{10} + (A^{11'} - A^{10'}) x^{11} + \dots + (A^{n'} - A^{(n-1)'}) x^n + \&c. \\
 &- (A^{8'} - A^{6'}) x^{10} - (A^{9'} - A^{7'}) x^{11} - \dots - (A^{(n-2)'} - A^{(n-4)'}) x^n - \&c. \\
 &\quad + x^{10} + (A^{6'} - 3) x^{11} + \dots + (A^{(n-5)'} - A^{(n-6)'}) x^n + \&c.
 \end{aligned}$$

Donde se tira  $A^{6'} - 3 = 1$ ; ou  $A^{6'} = 4$ ;  $A^{7'} - A^{6'} - 1 = 0$ ; ou  $A^{7'} = 5$ ;  $A^{8'} - A^{7'} - A^{6'} + 3 = 0$ ; ou  $A^{8'} = 6$ ;  $A^{9'} - A^{8'} - A^{7'} + 3 = 0$ ; ou  $A^{9'} = 8$ .

§. XVI.

Substituindo estes valores na Equação antecedente esta se reduz a

$$\begin{aligned}
 &\frac{x^{10}}{1-x^4} + \frac{x^{15}}{(1-x^4)(1-x^3)} + \frac{x^{21}}{(1-x^4)(1-x^3)(1-x^6)} + \&c. \\
 &= (A^{10'} - 9) x^{10} + (A^{11'} - A^{10'}) x^{11} + (A^{12'} - A^{11'}) x^{12} + (A^{13'} - A^{12'}) x^{13} \\
 &\quad - 2 x^{11} - (A^{10'} - 7) x^{12} - (A^{11'} - 9) x^{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (A^{14'} - A^{13'})x^{14} + (A^{15'} - A^{14'})x^{15} + \dots + (A^{n'} - A^{(n-1)'})x^n + \&c. \\
 &- (A^{12'} - A^{10'})x^{14} - (A^{13'} - A^{11'})x^{15} - \dots - (A^{(n-2)'} - A^{(n-4)'})x^n - \&c. \\
 &\quad + 2x^{14} + (A^{10'} - 8)x^{15} + \dots + (A^{(n-5)'} - A^{(n-6)'})x^n + \&c.
 \end{aligned}$$

e multiplicando por  $1 - x^4$  teremos

$$\begin{aligned}
 x^{10} + \frac{x^{15}}{1 - x^5} + \frac{x^{21}}{(1 - x^5)(1 - x^6)} + \&c. = (A^{10} - 9)x^{10} \\
 + (A^{11'} - A^{10'})x^{11} + (A^{12'} - A^{11'})x^{12} + (A^{13'} - A^{12'})x^{13} + (A^{14'} - A^{13'})x^{14} \\
 - 2x^{11} - (A^{10'} - 7)x^{12} - (A^{11'} - 9)x^{13} - (A^{12'} - 11)x^{14} \\
 + (A^{15'} - A^{14'})x^{15} + (A^{16'} - A^{15'})x^{16} + \dots + (A^{n'} - A^{(n-1)'})x^n + \&c. \\
 - (A^{13'} - A^{10'})x^{15} - (A^{14'} - A^{11'})x^{16} - \dots - (A^{(n-2)'} - A^{(n-5)'})x^n - \&c. \\
 + (A^{10'} - 6)x^{15} + (A^{11'} - 7)x^{16} + \dots + (A^{(n-5)'} - A^{(n-8)'})x^n + \&c. \\
 - (A^{(n-9)'} - A^{(n-10)'})x^n - \&c.
 \end{aligned}$$

Donde se conclue  $A^{10'} - 9 = 1$ ; ou  $A^{10'} = 10$ ,  $A^{11'} - A^{10'} - 2 = 0$ ; ou  $A^{11'} = 12$ .  $A^{12'} - A^{11'} - A^{10'} + 7 = 0$ ; ou  $A^{12'} = 15$ .  $A^{13'} - A^{12'} - A^{11'} + 9 = 0$ ; ou  $A^{13'} = 18$ . e  $A^{14'} - A^{13'} - A^{12'} + 11 = 0$ ; ou  $A^{14'} = 22$ .

§. XVII.

Substituindo estes valores na mefma Equação ella se reduz a

$$\begin{aligned}
 \frac{x^{15}}{1 - x^5} + \frac{x^{21}}{(1 - x^5)(1 - x^6)} + \frac{x^{28}}{(1 - x^5)(1 - x^6)(1 - x^7)} + \&c. = \\
 (A^{15'} - 26)x^{15} + (A^{16'} - A^{15'})x^{16} + \dots + (A^{n'} - A^{(n-1)'})x^n + \&c. \\
 - 5x^{16} - \dots - (A^{(n-2)'} - A^{(n-5)'})x^n - \&c. \\
 + (A^{(n-5)'} - A^{(n-8)'})x^n + \&c. \\
 - (A^{(n-9)'} - A^{(n-10)'})x^n - \&c.
 \end{aligned}$$

e multiplicando por  $1 - x^5$  se teria huma nova expressãõ ; da qual se poderiaõ tirar os valores dos coefficients  $A^{15}$ ;  $A^{16}$ ;  $A^{17}$ ;  $A^{18}$ ;  $A^{19}$ ; e  $A^{20}$ : e semelhantemente todos os outros, que se quizeffem, procedendo pelo mesmo modo, que até aqui temos praticado ; sendo porém a cada operaçaõ continuamente maior o numero dos coefficients, que se poderiaõ determinar ; pois que cada huma dellas nos dá sempre tantos coefficients e mais hum, quantos saõ os que dá a operaçaõ precedente .

## §. XVIII.

Naõ querendo porém passar além do coefficiente  $A^{15}$ ; todos os coefficients  $A^{10}$ ;  $A^{11}$ ;  $A^{12}$ ;  $A^{13}$ ;  $A^{14}$ ; determinados em §. XVI; e o mesmo coefficiente  $A^{15}$  se poderiaõ determinar independentemente das operaçoẽs alli praticadas, reflectindo em que os primeiros tres termos, que resultariaõ do desenvolvimento do primeiro membro da Equaçãõ expressada no dito §. saõ  $x^{10} + x^{14} + x^{15}$ ; e que por consequencia deve ser  $A^{10} - 9 = 1$ ;  $A^{11} - A^{10} - 2 = 0$ ;  $A^{12} - A^{11} - A^{10} + 7 = 0$ ;  $A^{13} - A^{12} - A^{11} + 9 = 0$ ;  $A^{14} - A^{13} - A^{12} + A^{10} + 2 = 1$ ; e  $A^{15} - A^{14} - A^{13} + A^{11} + A^{10} - 8 = 1$ ; donde se tira igualmente  $A^{10} = 10$ ;  $A^{11} = 12$ ;  $A^{12} = 15$ ;  $A^{13} = 18$ ;  $A^{14} = 22$ ; e além disso  $A^{15} = 27$ .

## §. XIX.

Procedendo pois pelo modo indicado teremos, que o limite de expressãõ do producto infinito proposto se converte em

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + 12x^{11} + 15x^{12} + 18x^{13} + 22x^{14} + 27x^{15} + \&c.$$

serie simples, cujos coefficients representaõ cada hum re-

lativamente ao termo, a que pertence, o differente numero de modos, porque o expoente de  $x$  nesse mesmo termo pode ser formado pela addiçaõ dos termos da serie dos numeros naturaes .

$$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; \&c.$$

Por exemplo o coefficiente 12 do termo  $12 x^{11}$  denota que o numero 11 se pode formar pela addiçaõ dos termos da serie dos numeros naturaes por 12 modos differentes; e com effeito he

$$\begin{array}{lll} 11 = 11 + 0 & 11 = 7 + 4 & 11 = 6 + 4 + 1 \\ 11 = 10 + 1 & 11 = 6 + 5 & 11 = 6 + 3 + 2 \\ 11 = 9 + 2 & 11 = 8 + 2 + 1 & 11 = 5 + 4 + 2 \\ 11 = 8 + 3 & 11 = 7 + 3 + 1 & 11 = 5 + 3 + 2 + 1 \end{array}$$

pois sendo os numeros naturaes os expoentes de  $x$  em todos os factores do producto infinito, de que se trata, e devendo pela multiplicação effectiva delles rezultar esta mesma serie simples, he evidente que os coefficientes de cada termo denotão por quantos modos diversos o seu expoente pode rezultar da somma dos expoentes de  $x$  nos factores do producto; pois que em todos estes o segundo termo tem final additivo.

§. XX.

Tambem se poderia converter a serie

$$1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \&c.$$

em serie simples contraindo primeiro os seus termos dois a dois; isto he, reduzindo-a primeiro á fórmula

$$\frac{1}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)} + \&c.$$

ou á forma

$$1 + \frac{x}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \&c.$$

mas ainda que por este modo o numero das operações se-  
ria menor, e a cada huma dellas se determinaria hum nu-  
mero maior de coefficients; com tudo cada huma dellas se-  
ria tambem mais complicada, e trabalhoza; pois que em  
vez de constar o multiplicador fô de dois termos constaria  
de quatro.

§. XXI.

Se quizeffemos converter em serie simples o producto  
infinito

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \&c.$$

achariamos pelo methodo exposto, que o seu limite de ex-  
pressão

$$1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \&c.$$

se reduz a

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \&c.$$

serie facil de continuar quanto se quizer; pois que, como  
he facil denotar, ella se pode separar em duas

$$x^0 - x^2 + x^7 - x^{15} + x^{26} - x^{40} + x^{57} - x^{77} + \&c.$$

e

$$-x + x^5 - x^{12} + x^{22} - x^{35} + x^{51} - x^{70} + x^{92} - \&c.$$

ambas faceis de continuar; por quanto as differenças dos ex-  
ponentes de  $x$  na primeira constituem a progressão arithme-  
tica

$$2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26; 29; \&c.$$

e as differenças dos expoentes de  $x$  na segunda constituem a progressão arithmetica

$$4, 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; \&c.$$

donde se vê que os expoentes de  $x$  na primeira serie constituem huma serie recorrente, cujo termo geral he  $\frac{3n^2 - 5n + 2}{2}$ ; e que os expoentes de  $x$  na segunda constituem outra serie recorrente, cujo termo geral he  $\frac{3n^2 - n}{2}$ . Do mesmo modo se poderia converter em series simples os outros dois productos infinitos mencionados em o §. XI.

### §. XXII.

O desenvolvimento do producto infinito, que tomámos por primeiro exemplo, e a lei que entre si guardaõ os seus factores nos mostraõ, que os divisores simples do primeiro gráo da serie infinita

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \&c.$$

saõ os mesmos que os de todas as Equações  $x + 1 = 0$ ;  $x^2 + 1 = 0$ ;  $x^3 + 1 = 0$ ;  $x^4 + 1 = 0$ ;  $x^5 + 1 = 0$ ;  $x^6 + 1 = 0$ ; &c. donde se conclue, que representando por  $P$  a semicircumferencia do circulo, cujo raio he 1, elles se poderaõ determinar substituindo na expressaõ

$$x = \text{Cof.} \left( \frac{2k+1}{n} \right) P \sqrt{-1}. \text{ Sen.} \left( \frac{2k+1}{n} \right) P$$

todos os numeros inteiros positivos em lugar de  $n$ ; e substituindo em lugar de  $k$  a cada valor de  $n$  todos os numeros inteiros positivos naõ maiores que  $\frac{n-1}{2}$ ; por quanto todas as ditas Equações saõ da fórma  $1 + x^n = 0$ ; e buscando os factores trinomios d'esta expressaõ se achará, que elles todos se contém na fórmula geral

$$1 - 2x \operatorname{Cof.} \left( \frac{2k+1}{n} \right) P + x^2$$

a qual igualada a cifra dá

$$x = \operatorname{Cof.} \left( \frac{2k+1}{n} \right) P \pm \sqrt{-1. \operatorname{Sen.} \left( \frac{2k+1}{n} \right) P}$$

expressão da qual se deduzem por consequencia todos os divisores simples da serie expressada fazendo em lugar de  $n$ , e  $k$  as substituições sobreditas.

§. XXIII.

Do mesmo modo se conclue pelo desenvolvimento em serie do producto infinito, que tomámos por segundo exemplo, que os divisores simples do primeiro gráo da serie infinita

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \&c.$$

saõ os mesmos que os das Equações  $x - 1 = 0$ ;  $x^2 - 1 = 0$ ;  $x^3 - 1 = 0$ ;  $x^4 - 1 = 0$ ;  $x^5 - 1 = 0$ ;  $x^6 - 1 = 0$ ; &c. n'uma palavra que elles saõ todos os que resultaõ da igualação de todos os factores do mesmo producto a cifra; e porque todos elles saõ da fórma  $1 - x^n = 0$  fica evidente pela razão expressada no §. antecedente, que os divisores simples da referida serie se podem determinar substituindo na expressão

$$x - \operatorname{Cof.} \frac{2k}{n} P \pm \sqrt{-1. \operatorname{Sen.} \frac{2k}{n} P}$$

em lugar de  $n$  todos os numeros inteiros positivos; e substituindo em lugar de  $k$  a cada valor de  $n$  todos os numeros inteiros positivos naõ maiores que  $\frac{1}{2}n$ .

§. XXIV.

Se quizermos desde logo converter em serie simples

qualquer producto infinito, que tenha as condições mencionadas no §. VII. sem primeiro converter em serie composta, reduziremos primeiramente o segundo membro da Equação

$$\text{Log. } FX = \int X - \frac{1}{2} \int X^2 + \frac{1}{3} \int X^3 - \frac{1}{4} \int X^4 + \frac{1}{5} \int X^5 - \frac{1}{6} \int X^6 \\ + \&c.$$

em serie simples, o que he sempre possível ainda que as expressões de  $\int X$ ;  $\int X^2$ ;  $\int X^3$ ; &c. se não possa obter; pois que sendo sempre dados os factores do producto são sempre dadas as series de cujas somas são  $\int X$ ;  $\int X^2$ ;  $\int X^3$ ; &c. os limites de expressão; series que sempre se podem converter em series simples se no seu primitivo estado o não forem já; então procedendo pelo methodo inverso das series d'effta expressão de  $\text{Log. } FX$  deduziremos

$$FX = 1 + \int X - \frac{1}{2} \int X^2 + \frac{1}{3} \int X^3 - \frac{1}{4} \int X^4 + \frac{1}{5} \int X^5 - \&c. \\ + \frac{1}{2} \int^2 X - \frac{1}{2} \int X \int X^2 + \frac{1}{3} \int X \int X^3 - \frac{1}{4} \int X \int X^4 + \&c. \\ + \frac{1}{6} \int^3 X + \frac{1}{8} \int^2 X^2 - \frac{1}{6} \int X^2 \int X^3 + \&c. \\ - \frac{1}{4} \int^2 X \int X^2 + \frac{1}{6} \int^2 X \int X^3 + \&c. \\ + \frac{1}{24} \int^4 X + \frac{1}{8} \int X \int^2 X^2 - \&c. \\ - \frac{1}{12} \int^3 X \int X^2 - \&c. \\ + \frac{1}{120} \int^5 X + \&c. \\ + \&c.$$

tambem expressado em serie simples.

## §. XXV.

Porém este methodo , posto que mais amplo que o precedente , pois que não depende da condição de se conhecerem as expressões de  $\int X; \int X^2; \int X^3; \&c.$  he nimiamente longo , e affaz laborioso todas as vezes que a lei , que seguem os termos da serie logarithmica , não he facil de notar ; ou ainda quando , sendo facil de notar , os primeiros termos da serie , que d'esta se deduz pelo methodo inverfo , não manifestaõ desde logo a lei , que devem seguir na sua successão. O exemplo do §. IX. em que he dado o producto infinito

$$FX = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \&c.$$

dá huma serie logarithmica simples , cuja lei he affaz patente ; pois sendo

$$\text{Log. } FX = \text{Log. } (1+x) + \text{Log. } (1+x^2) + \text{Log. } (1+x^3) + \&c.$$

desenvolvendo todos estes logarithmos em series , ordenando em huma mesma columna todos os termos , em que as potencias de  $x$  forem as mesmas , e sommando acharemos

$$\text{Log. } FX = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{4}{6}x^6 + \frac{8}{7}x^7 + \&c.$$

serie cuja lei he com effeito facilima de notar , attendendo-se ao modo porque cada hum dos seus termos he formado pela addição dos termos semelhantes das series , que resultão do desenvolvimento de  $\text{Log. } (1+x)$  ;  $\text{Log. } (1+x^2)$  ;  $\text{Log. } (1+x^3)$  ;  $\&c.$  pois por este modo se vê evidentemente

que todos os coefficients dos seus termos se podem determinar buscando todos os divisores do numero, que denota o lugar que cada hum d'elles occupa na mesma serie, e fazendo com cada hum dos mesmos divisores huma fracção, que tendo a unidade por numerador tenha cada hum d'elles por denominador; sommando depois á parte todas as fracções, cujos denominadores forem pares, e tirando a segunda somma da primeira. Querendo por exemplo o coefficiente do sexto termo, determinaremos todos os divisores do numero 6, que são 1, 2, 3, e 6: com elles faremos quatro fracções  $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}$ : sommando a primeira, e a terceira teremos  $\frac{4}{3}$ ; e sommando a segunda, e a quarta teremos  $\frac{4}{6}$ ; tirando finalmente esta segunda somma da primeira teremos o resto  $\frac{4}{6}$ , que será o coefficiente de  $x^6$ . Do mesmo modo querendo o coefficiente do nono termo, buscaremos os divisores de 9, que são 1, 3, e 9, e faremos as fracções  $\frac{1}{1}; \frac{1}{3}$ ; e  $\frac{1}{9}$ , as quaes tendo todas denominadores impares se juntarão em huma só somma  $\frac{13}{9}$ , que será por consequencia o coefficiente de  $x^9$ ; e assim semelhantemente se poderá obter os coefficients de todos os outros termos. Porém a passagem d'este logarithmo para o valor de  $FX$  dando

$$\begin{aligned}
FX = & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{4}{6}x^6 + \&c. \\
& + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + \frac{6}{5}x^6 + \&c. \\
& + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{4}{6}x^5 + \frac{1}{8}x^6 + \&c. \\
& + \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{6}x^5 + \frac{8}{9}x^6 + \&c. \\
& + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{8}x^6 + \&c. \\
& + \frac{1}{12}x^5 + \frac{4}{6}x^6 + \&c. \\
& + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{48}x^6 + \&c. \\
& + \frac{2}{9}x^6 + \&c. \\
& + \frac{1}{16}x^6 + \&c. \\
& + \frac{1}{48}x^6 + \&c. \\
& + \frac{1}{720}x^6 + \&c. \\
& + \&c.
\end{aligned}$$

dá huma expressãõ affaz trabalhoza de calcular, e que não deixa descobrir taõ facilmente a lei dos coefficients, como o methodo de que antecedentemente uzámos.

### §. XXVI.

Podéria igualmente uzar-se para o mesmo effeito de buscar duas expressões de  $\frac{d \text{Log. } FX}{dx}$  huma determinada, e outra indeterminada, e pela comparaçãõ de ambas de-

terminar a expressãõ de  $FX$  em serie simples. Por exemplo sendo como em o §. antecedente

$$FX = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \&c.$$

e suppondo

$$FX = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \&c.$$

ferá

$$\begin{aligned} \text{Log. } FX &= \text{Log. } (1+x) + \text{Log. } (1+x^2) + \text{Log. } (1+x^3) + \&c. \\ &= \text{Log. } (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.) \end{aligned}$$

e por consequencia

$$\begin{aligned} \frac{d \text{Log. } FX}{dx} &= \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{3x^2}{1+x^3} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{5x^4}{1+x^5} + \&c. \\ &= \frac{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + 6Fx^5 + 7Gx^6 + \&c.}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + \&c.} \end{aligned}$$

Ora reduzindo em serie as fracções  $\frac{1}{1+x}$ ;  $\frac{2x}{1+x^2}$ ;  $\frac{3x^2}{1+x^3}$ ;  $\&c.$  se terá

$$\begin{aligned} \frac{d \text{Log. } FX}{dx} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \&c. \\ &\quad + 2x \quad * - 2x^3 \quad * + 2x^5 \quad * - 2x^7 \quad * + \&c. \\ &\quad + 3x^2 \quad * \quad * - 3x^5 \quad * \quad * + 3x^8 - \&c. \\ &\quad + 4x^3 \quad * \quad * \quad * - 4x^7 \quad * + \&c. \\ &\quad + 5x^4 \quad * \quad * \quad * \quad * - \&c. \\ &\quad + 6x^5 \quad * \quad * \quad * \quad * - \&c. \\ &\quad + 7x^6 \quad * \quad * \quad * \quad * - \&c. \\ &\quad + 8x^7 \quad * \quad * \quad * \quad * - \&c. \\ &\quad + 9x^8 - \&c. \\ &\quad + \&c. \end{aligned}$$

ou

*d*

$$\frac{d \text{Log. } F^X}{dx} = 1 + x + 4x^2 + x^3 + 6x^4 + 4x^5 + 8x^6 + x^7 + \&c.$$

serie facil de continuar quanto se quizer ; pois que cada hum dos coefficientes dos seus termos se determina pelo modo indicado em o §. antecedente , isto he , buscando o numerador da fracçaõ , que pelo methodo alli exposto se acharia para coefficiente de cada hum dos termos correspondentes na serie alli expressada : mas sendo

$$\frac{A + 2 B x + 3 C x^2 + 4 D x^3 + 5 E x^4 + \&c.}{1 + A x + B x^2 + C x^3 + D x^4 + E x^5 + \&c.} = 1 + x + 4 x^2 + x^3 + 6 x^4 + 4 x^5 + 8 x^6 + \&c.$$

multiplicando ambos os membros desta Equação pelo denominador do primeiro , será

$$\begin{aligned} &A + 2 B x + 3 C x^2 + 4 D x^3 + 5 E x^4 + 6 F x^5 + \&c. \\ = &1 + x + 4 x^2 + x^3 + 6 x^4 + 4 x^5 + 8 x^6 + \&c. \\ &+ A x + A x^2 + 4 A x^3 + A x^4 + 6 A x^5 + 4 A x^6 + \&c. \\ &+ B x^2 + B x^3 + 4 B x^4 + B x^5 + 6 B x^6 + \&c. \\ &+ C x^3 + C x^4 + 4 C x^5 + C x^6 + \&c. \\ &+ D x^4 + D x^5 + 4 D x^6 + \&c. \\ &+ E x^5 + E x^6 + \&c. \\ &+ F x^6 + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

expressaõ igualmente facil de continuar ; pois que os coefficientes numericos saõ os mesmos em cada linha de calculo , e as letras *A* ; *B* ; *C* ; &c. que representaõ os coefficientes indeterminados entraõ huma só em cada linha , e vaõ-se succedendo segundo a ordem Alfabetica. Devendo pois esta Equação ser identica , a igualação dos termos , que em hum e outro membro multiplicação cada huma das differentes potencias de *x* , daraõ tantas Equações de condiçaõ quantas bastem para determinar os coefficientes indeterminados *A* ;

$B; C; \&c.$  que se acharão como acima : a saber ,  $A = 1 ; B = 1 ; C = 2 ; D = 2 ; E = 3 ; \&c.$

§. XXVII.

Para não terminar esta Memoria sem dar hum exemplo de desenvolvimento de hum producto infinito , de que resulte immediatamente pelo nosso methodo huma serie simples , fupponhamos

$$FX = \left(1 + x\right) \left(1 + \frac{1}{4} x\right) \left(1 + \frac{1}{9} x\right) \left(1 + \frac{1}{16} x\right) \left(1 + \frac{1}{25} x\right) \&c.$$

ferá

$$\int X = x \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \&c.\right)$$

$$\int X^2 = x^2 \left(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{64^2} + \&c.\right)$$

$$\int X^3 = x^3 \left(1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \frac{1}{49^3} + \frac{1}{64^3} + \&c.\right)$$

$$\int X^4 = x^4 \left(1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \frac{1}{49^4} + \frac{1}{64^4} + \&c.\right)$$

-----

$$\int X^n = x^n \left(1 + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{16^n} + \frac{1}{25^n} + \frac{1}{36^n} + \frac{1}{49^n} + \frac{1}{64^n} + \&c.\right)$$

Donde , chamando  $P$  a femicircumferencia do circulo , cujo raio he  $1$  , se deduz

$$\int X = \frac{P^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x$$

$$\int X^2 = \frac{P^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3} P^4 x^2$$

$\int X^3$

$$\int X^3 = \frac{2^4}{1.2.3.4.5.6.7} \cdot \frac{1}{3} P^6 x^3$$

$$\int X^4 = \frac{2^6}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \cdot \frac{3}{5} P^8 x^4$$

$$\int X^5 = \frac{2^8}{1.2.3.4. \dots 8.9.10.11} \cdot \frac{5}{3} P^{10} x^5$$

$$\int X^6 = \frac{2^{10}}{1.2.3.4. \dots 10.11.12.13} \cdot \frac{601}{105} P^{12} x^6$$

&c.

Ou servindo-nos dos numeros Bernoullianos , e representando-os por  $B^1$ ;  $B^2$ ;  $B^3$ ;  $B^4$ ;  $B^5$ ; &c.

$$\int X = \frac{2 B^1}{1.2} P^2 x$$

$$\int X^2 = \frac{2^3 B^2}{1.2.3.4} P^4 x^2$$

$$\int X^3 = \frac{2^5 B^3}{1.2.3.4.5.6} P^6 x^3$$

$$\int X^4 = \frac{2^7 B^4}{1.2.3. \dots 6.7.8} P^8 x^4$$

$$\int X^5 = \frac{2^9 B^5}{1.2.3. \dots 8.9.10} P^{10} x^5$$

- - - - -

- - - - -

$$\int X^n = \frac{2^{2n-1} B^n}{1.2.3. \dots (2n-2)(2n-1)2n} P^{2n} x^n$$

&c.

serie cuja lei he affaz patente , e que se póde por consequencia continuar por tantos termos quantos forem os numeros Bernoullianos, que se tiverem calculado . A substitui-

ção d'estes valores nas expressões de  $A; B; C; D; \&c.$  que indicamos em o §. VII., e que actualmente representaremos por  $A^1; A^2; A^3; A^4; \&c.$  nos dá

$$\begin{aligned} A^1 &= \frac{P^2 x}{1. 2. 3} \\ A^2 &= \frac{P^4 x^2}{1. 2. 3. 4. 5} \\ A^3 &= \frac{P^6 x^3}{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7} \\ A^4 &= \frac{P^8 x^4}{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9} \\ A^5 &= \frac{P^{10} x^5}{1. 2. 3. . . . . 9. 10. 11} \\ &\&c. \end{aligned}$$

ou em geral

$$A^n = \frac{P^{2n} x^n}{1. 2. 3. . . . (2n-1). 2n. (2n+1)}$$

e por tanto nos mostra ser

$$FX = 1 + \frac{P^2 x}{1. 2. 3} + \frac{P^4 x^2}{1. 2. 3. 4. 5} + \frac{P^6 x^3}{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7} + \&c.$$

### §. XXVIII.

Comparando esta expressão com as fórmulas exponenciaes bem conhecidas

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1. 2} + \frac{z^3}{1. 2. 3} + \frac{z^4}{1. 2. 3. 4} + \&c. \\ e^{-z} &= 1 - \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1. 2} - \frac{z^3}{1. 2. 3} + \frac{z^4}{1. 2. 3. 4} - \&c. \end{aligned}$$

em que  $e$  representa o numero, cujo Logarithmo hyperbolico

co he 1, veremos que diminuindo a segunda da primeira, tomando metade da differença, e dividindo depois por  $z$  se tem

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2z} = 1 + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \&c.$$

expressão que será a mesma que a do §. antecedente, todas

as vezes que fizermos  $z = p x^{\frac{1}{2}}$ , e que por consequencia nos mostra, que o limite de expressão do producto infinito, que alli considerámos, póde não só ser representado pela serie simples alli expressada; mas tambem por huma expressão de numero limitado de termos; pois que feitas as substituições mencionadas fica

$$FX = \frac{e^{p x^{\frac{1}{2}}} - e^{-p x^{\frac{1}{2}}}}{2 p x^{\frac{1}{2}}}$$

§. XXIX.

Das fórmulas

$$A^{n'} = \frac{p^{2n} x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n (2n + 1)}$$

$$\int X^n = \frac{2^{2n-1} B^{n'}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n} \cdot p^{2n} x^n$$

achadas em o §. antecedente se conclue, que o Theorema Newtoniano demonstrado nesta Memoria póde tambem contribuir para se calcularem com facilidade os *Numeros Bernoullianos*; pois que substituindo na segunda destas Equações o valor de  $p^{2n} x^n$  tirado da primeira se terá

$$B^{n'} = \frac{\int X^n}{(2n+1) 2^{2n-1} A^{n'}}$$

34 MEMORIAS DA ACADEMIA REAL  
 e como pelo Theorema Newtoniano he

$$\int X^n = A^1 \int X^{n-1} - A^2 \int X^{n-2} + A^3 \int X^{n-3} - A^4 \int X^{n-4} \\ + \dots + \pm n A^n$$

expressão em que o final + do ultimo termo serve para o caso de ser  $n$  numero impar, e o final - para o caso de ser  $n$  numero par, he evidente que por meio destas tres fórmulas

$$A^n = \frac{P^{2n} x^n}{1.2.3.\dots.2n(2n+1)}$$

$$\int X^n = A^1 \int X^{n-1} - A^2 \int X^{n-2} + A^3 \int X^{n-3} - A^4 \int X^{n-4} \\ + \dots + \pm n A^n$$

$$B^n = \frac{\int X^n}{(2n+1) 2^{2n-1} A^n}$$

se podem com effeito calcular tantos dos numeros Bernoulhianos quantos se quizer, substituindo em cada huma dellas em lugar de  $n$  todos os numeros inteiros positivos desde 1 até aquelle que se quizer.

### §. XXX.

Todas as vezes que a serie  $1 + A + B + C + D + E + \&c.$  que representa em geral o limite de expressão de hum producto infinito qualquer da fôrma

$$(1 + X)(1 + X')(1 + X'')(1 + X''')(1 + X^{iv}) \&c.$$

como vimos em o §. XII. for tal, que a sua somma admita limite de expressão, o dito producto não só podrá converter-se

ter-se em serie simples; mas terá por limite de expressão o limite da somma da serie  $1 + A + B + C + \&c.$  o qual será huma expressão algebraica, ou transcendente segundo a natureza d'esta serie, como acabamos de ver em o exemplo do §. XXVII. O mesmo succederá todas as vezes que a serie

$$\text{Log. } FX = \int X - \frac{1}{2} \int X^2 + \frac{1}{3} \int X^3 - \frac{1}{4} \int X^4 + \frac{1}{5} \int X^5 - \frac{1}{6} \int X^6 \\ + \&c.$$

for capaz de limite de expressão; pois que he evidente que sendo esta serie o Logarithmo hyperbolico d'aquelle producto; e sendo por exemplo  $v$  o limite de expressão da sua somma será

$$FX = e^v$$

Sendo  $e$  o numero cujo Logarithmo hyperbolico he 1.

### A D V E R T E N C I A .

Pelo que dizemos nos §§. XXII., e XXIII. sobre as substituições de valores numericos em lugar de  $k$  não se deve entender, que excluímos a substituição de 0; antes pelo contrario esta he sempre aquella pela qual se deve começar. E quando nas Fórmulas dos ditos §§. tivermos feito as mencionadas substituições deveremos sempre trocar o lugar dos termos passando  $x$  para segundo, e a expressão em que não entra  $x$  para primeiro; havendo além disso tambem a cautella de trocar-lhe os sinais quando a fórmula for a do §. XXIII.

## ADITAMENTO.

## §. I.

QUANDO não occorrer nenhuma das circumstancias fobreditas, e com tudo for conveniente ter por aproximação o limite da somma dos termos da serie, que rezulta do desenvolvimento do producto

$$(1+X)(1+X')(1+X'')(1+X''')(1+X^{iv}) \&c.$$

isto se poderá conseguir pelos methodos sabidos para a transformação das series em outras mais convergentes; porém por não repetir o que em muitos livros se acha escrito, proporei sómente hum Methodo affaz simples de substituir a qualquer serie convergente huma Função algebrica, de cujo desenvolvimento rezulte huma serie recorrente proximamente igual a ella, e mesmo taõ proximamente quanto se quizer; e que por tanto poderá algumas vezes ter util applicação, não só neste genero de questões, mas ainda mesmo em outras quaesquer, em que se precise sommar series por aproximação.

## §. II.

Seja  $1 + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{iv}x^4 + a^v x^5 + a^{vi}x^6 + a^{vii}x^7 + \&c.$  huma serie qualquer convergente, e representante  $Fx$  o limite da somma dos seus termos, cuja expressaõ se ignora, e cujo valor aproximado se pertende: supponhamos

$$Fx, \text{ ou } \frac{1 + A^1x + A^2x^2 + A^3x^3 + A^4x^4 + \dots + A^m x^m}{1 + Bx}$$

$$= 1 + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{iv}x^4 + a^v x^5 + \&c.$$

mul-

multiplicando ambos os membros d'esta Equação por  $1 + Bx$  será

$$1 + A^1 x + A^2 x^2 + A^3 x^3 + A^4 x^4 + \dots + A^m x^m = 1 + (a' + B)x + (a'' + B a')x^2 + (a''' + B a'')x^3 + (a^{IV} + B a''')x^4 + \&c.$$

mas sendo a serie proposta huma serie convergente, tambem a que constitue o segundo membro d'esta Equação será convergente, e por tanto tomando os seus primeiros  $m + 2$  termos teremos, que será proxicamente

$$1 + A^1 x + A^2 x^2 + A^3 x^3 + A^4 x^4 + \dots + A^m x^m = 1 + (a' + B)x + (a'' + B a')x^2 + \dots + (a^{(m+1)} + B a^m) x^{m+1}$$

Equação que igualada termo por termo nos dá as seguintes  $m + 1$  Equações de condição

$$A^1 = a' + B; \quad A^2 = a'' + B a'; \quad A^3 = a''' + B a''$$

$$A^m = a^m + B a^{(m-1)}; \quad 0 = a^{(m+1)} + B a^m$$

da ultima das quaes se tira  $B = -\frac{a^{(m+1)}}{a^m}$ ; valor que substituido nas outras as converte em

$$A^1 = \frac{a' a^m - a^{(m+1)}}{a^m}; \quad A^2 = \frac{a'' a^m - a' a^{(m+1)}}{a^m};$$

$$A^3 = \frac{a''' a^m - a'' a^{(m+1)}}{a^m}; \dots A^m = \frac{a^m a^m - a^{(m-1)} a^{(m+1)}}{a^m}$$

e por consequencia substituido estes valores na Equação primitiva teremos, que será proxicamente

$$F x = \frac{a^m + (a' a^m - a^{(m+1)})x + (a'' a^m - a' a^{(m+1)})x^2 + \dots + (a^m a^m - a^{(m-1)} a^{(m+1)})x^m}{a^m - a^{(m+1)}x}$$

## §. III.

Dividindo o numerador d'esta fracção pelo seu denominador até se ter no quociente hum numero  $m + 2$  de termos acharemos

$$\frac{1 + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \dots + a^{m'}x^m + a^{(m+1)'}x^{m+1} + a^{(m+1)'}a^{(m+1)'}x^{m+2}}{a^{m'} - a^{(m+1)'}x}$$

expressão identica até ao termo  $m + 2$  com a serie proposta, e que nos mostra que depois de formarmos hum numero qualquer  $m + 2$  de termos da dita serie o valor approxi-

mado de todos os outros será  $\frac{a^{(m+1)'} a^{(m+1)'} x^{m+2}}{a^{m'} - a^{(m+1)'} x}$ ; donde

se conclue, que o methodo indicado se reduz a suppor, que os termos da serie proposta subsequentes ao termo  $m$  constituem huma Progressão Geometrica, e que por tanto o limite da somma de todas as series, em que a razão dos seus termos immediatos depois de algum determinado numero d'elles se for continua, e rapidamente aproximando á igualdade, se poderá obter muito proximate por meio da fórmula antecedente.

## §. IV.

Neste caso está a serie

$$1 + \frac{x}{n u^n} - \frac{(n-1)x^2}{2 n^2 u^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)x^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^4 u^{4n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^4 u^{4n}} + \&c.$$

a qual tem por limite  $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u}$ ; pois que sendo qualquer dos

dos feus termos, a que na ordem numerica chamo  $k$ , para o feu immediato  $k+1$  como  $1 : \left(\frac{1-(k-1)n}{kn}\right) \frac{x}{u^n}$ , e o termo  $k+1$  para o feu immediato  $k+2$  como  $1 : \left(\frac{(1-kn)}{(k+1)n}\right) \frac{x}{u^n}$ , he claro, que estas duas razões feraõ tanto mais proximas á igualdade, quanto maior for o numero  $k$ ; pois que suppondo  $k$  sem limite em augmento se acha, que o limite da razão, que ellas entre si tem, he a razão de igualdade; e por tanto a lei da successão dos termos d'esta serie se avezinha continuamente á lei da successão dos termos de huma progressão geometrica: donde podemos concluir, que o nosso methodo será muito conveniente para determinar por aproximação as raizes irrationaes de qualquer gráo que sejaõ.

§. V.

Supponhamos pois que se pertenda o valor aproximado de  $\sqrt[n]{u^n + x}$ ; será  $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + \frac{x}{n u^n} - \frac{(n-1)x^2}{2 n^2 u^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)x^3}{2 \cdot 3 \cdot n^3 u^{3n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^4 u^{4n}} + \&c.$ ;

e por tanto  $a' = \frac{1}{n u^n}$ ;  $a'' = \frac{(n-1)}{2 n^2 u^{2n}}$ ;  $a''' = \frac{(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3 n^3 u^{3n}}$ ;

ou em geral  $a^{m'} = \frac{(n-1)(2n-1)\dots(m-1)n-1}{2 \cdot 3 \dots m n^m u^{m n}}$  fe-

gundo  $m$  for numero impar, ou numero par; e por tanto substituindo estes valores na fórmula que termina o §. II.

teremos a expressão geral do valor aproximado de  $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u}$ ,

d'aqual, substituindo por  $m$  diferentes valores, poderemos tirar tantas fórmulas particulares para calcular  $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u}$  por

aproximação quantas nos quizermos; mas por evitar huma fórmula complicada começaremos por determinar as fórmulas particulares antes da geral. Supponhamos primeiramente  $m = 1$  ferá

$$\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = \frac{a' + (a' a'' - a''') x}{a' - a'' x}$$

ou  $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + \frac{a' a'' x}{a' - a'' x}$ ; e por tanto, substituinto por  $a'$ , e  $a''$  os seus valores, ferá  $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + \frac{x}{n u^n + \frac{n-1}{2} x}$ ;

e multiplicando por  $u$

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{u x}{n u^n + \frac{n-1}{2} x}$$

expressão que, sendo a menos exacta de todas as que podemos affinar pelo nosso methodo, se pode com tudo reputar tão vantajoza como as celebres fórmulas de *Halley* incertas nas Transacções Filosoficas da Sociedade Real de Londres do anno de 1694; porque tendo a superioridade de ser racional, e applicavel a todos os grãos, dá huma aproximação quasi igualmente exacta, e muito mais facil de calcular.

#### §. VI.

Se supozermos  $m = 2$  a nossa fórmula ferá

$$\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = \frac{a'' + (a' a'' - a''') x + (a'' a'' - a' a''') x^2}{a'' - a''' x}$$

ou  $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + a' x + \frac{a'' a'' x^2}{a'' - a''' x}$ ; e por tanto substituinto por  $a'$ ;  $a''$ ; e  $a'''$  os seus valores ferá

$$\sqrt[n]{u^n + x}$$

$$\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + \frac{x}{n u^n} - \frac{\frac{n-1}{2} x^2}{n^2 u^{2n} + n \left(\frac{2n-1}{3}\right) u^n x}$$

e multiplicando por  $u$

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{x}{n u^{n-1}} - \frac{\frac{n-1}{2} x^2}{n^2 u^{2n-1} + n \left(\frac{2n-1}{3}\right) u^{n-1} x}$$

expressão muito mais exacta que a precedente, e tambem mais exacta que as de *Halley* em todos os casos, em que  $x$  he positivo.

§. VII.

Do mesmo modo suppondo  $m=3$  será a nossa fórmula

$$\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = \frac{a''' + (a' a''' - a^{IV}) x + (a'' a''' - a' a^{IV}) x^2 + (a''' a''' - a'' a^{IV}) x^3}{a''' - a^{IV} x}$$

ou  $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + a' x + a'' x^2 + \frac{a''' a''' x^3}{a''' - a^{IV} x}$ ; e por consequencia substituindo por  $a'$ ;  $a''$ ;  $a'''$ ; e  $a^{IV}$  os seus valores será

$$\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + \frac{x}{n u^n} - \frac{(n-1)x^2}{2 n^2 u^{2n}} - \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-1}{3}\right)x^3}{n^3 u^{3n} + n^2 u^{2n} \left(\frac{3n-1}{4}\right)x}$$

e multiplicando por  $u$

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{x}{n u^{n-1}} - \frac{(n-1)x^2}{2 n^2 u^{2n-1}} + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-1}{3}\right)x^3}{n^3 u^{3n-1} + n^2 \left(\frac{3n-1}{4}\right) u^{2n-1} x}$$

valor ainda mais exacto que o precedente .

§. VIII.

Procedendo do mesmo modo se achariaõ as aproximações relativas a todos os outros valores particulares de  $m$ ; porém sem passar mais adiante já fica evidente, que chamando  $S$  a somma dos primeiros  $m$  termos da serie resultante do desenvolvimento de  $\sqrt[n]{u^n+x}$  será geralmente falando

$$\sqrt[n]{u^n+x} = S \pm \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-1}{3}\right) \dots \left(\frac{(m-1)n-1}{m}\right) x^{\frac{m}{n}}}{n^m u^{n^{m-1}} + n^{m-1} \left(\frac{nm-1}{m+1}\right) u^{\frac{(m-1)n-1}{n}}}$$

fervindo o final + do segundo termo quando  $m$  for numero impar  $> 1$ , e o final - quando  $m$  for numero par, ou 1.

§. IX.

Se em vez de applicarmos o nosso methodo a fórmula

$$\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u} = 1 + \frac{x}{n u^n} - \frac{(n-1)x^2}{2 n^2 u^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)x^3}{2 \cdot 3 \cdot n^3 u^{3n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^4 u^{4n}} + \&c.$$

o applicarmos a fórmula

$$\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u} = 1 + \frac{x}{n(u^n+x)} + \frac{(n+1)x^2}{2 n^2 (u^n+x)^2} + \frac{(n+1)(2n+1)x^3}{2 \cdot 3 \cdot n^3 (u^n+x)^3} + \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^4 (u^n+x)^4} + \&c.$$

entaõ suppondo na fórmula do §. II.  $m=1$ , e multipliquan-

cando por  $u$  acharemos

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{u x}{n(u^n + x) - \left(\frac{n+1}{2}\right)x}$$

Expressão que fazendo as multiplicações indicadas se reduz a

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{u x}{n u^n + \left(\frac{n-1}{2}\right)x}$$

que he a mesma que achamos no §. V.

§. X.

Suppondo  $m = 2$ , e fazendo a multiplicação por  $u$  acharemos

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{u x}{n(u^n + x)} + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)u x^2}{n^2(u^n + x)^2 - n\left(\frac{2n+1}{3}\right)(u^n + x)x}$$

Formula mais exacta que a precedente, e tambem mais exacta que as de *Halley* em todos os casos, em que  $x$  he negativo; e que por tanto combinada com a do §. VI. nos poem em estado de podermos sempre obter aproximações mais exactas, e com mais facilidade, do que pelas fórmulas do Geometra Inglez.

§. XI.

Se supozermos  $m = 3$  acharemos

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{u x}{n(u^n + x)} + \frac{(n+1)u x^2}{2n^2(u^n + x)^2} + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{2n+1}{3}\right)u x^3}{n^3(u^n + x)^3 - n^2\left(\frac{3n+1}{4}\right)(u^n + x)^2 x}$$

L ii

e

e em geral se representarmos por  $S$  a somma dos primeiros  $m$  termos da serie

$$u + \frac{u x}{n(u^n + x)} + \frac{(n+1) u x^2}{2 n^2 (u^n + x)^2} + \frac{(n+1)(2n+1) u x^3}{2 \cdot 3 \cdot n^3 (u^n + x)^3} + \&c.$$

acharemos

$$\sqrt[n]{u^n + x} = S + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{2n+1}{3}\right) \dots \left(\frac{(m-1)n+1}{m}\right) u x^m}{n^m (u^n + x)^m - n^{m-1} \left(\frac{m n + 1}{m + 1}\right) (u^n + x)^{m-1} x}$$

## §. XII.

Por meio desta fórmula, e da outra que achamos no §. VII. se pôde levar a aproximação das raizes a qualquer gráo de exacção, que se pertender; mas ainda mesmo servindo-nos só da primeira fórmula particular

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{u x}{n u^n + \left(\frac{n-1}{2}\right) x}$$

se pôde conseguir esta vantagem repetindo o calculo; isto he, chamaudo  $u'$  ao valor achado por esta primeira aproximação, fazendo  $u^n + x - u'^n = x'$ ; e calculando esta nova expressão

$$\sqrt[n]{u'^n + x'} = u' + \frac{u' x'}{n u'^n + \left(\frac{n-1}{2}\right) x'}$$

e se ainda esta aproximação se não julgar bastante, se pode repetir outra semelhante operação, chamando  $u''$  a este novo valor achado; fazendo  $u''^n + x' - u''^n = x''$ , e calculando esta expressão

$$\sqrt[n]{\phantom{u''^n + x''}}$$

$$\sqrt[n]{u''^n + x''} = u'' + \frac{u'' x''}{n u''^n + \left(\frac{n-1}{2}\right) x''}$$

e assim successivamente

### §. XIII.

Se pelo decurso d'estas operações se chegar a alguma expressãõ, em que o segundo termo do denominador seja huma quantidade muito pequena, o Calculo se abreviará, e simplificará consideravelmente omittindo-o: por exemplo, se logo na segunda operaçaõ acharmos, que a quantidade  $\frac{n-1}{2} x'$  he muito pequena, poderemos omittilla, e por este modo reduziremos o segundo membro da expressãõ

$$\sqrt[n]{u''^n + x'} = u'' + \frac{u'' x'}{n u''^n + \left(\frac{n-1}{2}\right) x'}$$

a  $u'' + \frac{x'}{n u''^{n-1}}$ ; quantidade muito mais facil de calcular;

pois que  $u''$  he o valor achado pela primeira approximaçaõ, e a quantidade  $\frac{x'}{n u''^{n-1}}$ , que se lhe deve accrescentar, ou

tirar, segundo  $x'$  for positivo, ou negativo, facilmente se calcula por meio dos Logarithmos. Querendo continuar a approximaçaõ chamar-se-ha  $u'''$  ao valor ultimamente achado, e fazendo  $u''^n + x' - u''^n = x''$  lhe accrescentaremos ou tiraremos a quantidade  $\frac{x''}{n u''^{n-1}}$  segundo  $x''$  for positivo, ou negati-

vo, e assim continuaremos successivamente até se ter obtido a approximaçaõ, que se pertender. Esta mesma repetiçaõ de

calculos se pode praticar com qualquer das outras fórmulas mais exactas, de que fizemos menção em os §. §. VI., e VII.; e por meio d'ellas se obterá a approximação pertencida, sem que o Calculo se repita tantas vezes.

§. XIV.

He claro, que se em vez de termos supposto

$$FX = \frac{1 + A^1x + A^2x^2 + A^3x^3 + \dots + A^m x^m}{1 + Bx}$$

tivessemos supposto  $FX$  igual á outra qualquer Funcção racional, em cujo denominador entrassem mais de hum coe-ficiente indeterminado, teriamos achado outras expressões para o valor approximado do limite da somma dos termos da serie, de que se tratasse, ainda mais exactas em quasi todos os casos, e que nos dariao occasião a novas reflexões, e nos manifestariao meios faceis de sommar por approximação outras series, além das que servem para a determinação das rai-zes irrationaes; mas este trabalho além de não ser difficil depois dos passos, que até aqui temos dado, nos obrigaria a ser demasiadamente extensos.

## M E M O R I A

*Sobre huma especie de petrificação animal .*

PELO P. JOAÕ DE LOUREIRO.

*Flumen habent Cicones , quod potum saxea reddit  
Viscera , quod tactis inducit marmora rebus .*

Ovidio nas Metamorfofes. l. XV. v. 313.

N Aõ he tudo fabuloso , o que se acha escrito nos Poetas ; mas como a sua arte lhes dá privilegio para fingir , e dizer o que não he , precisamos de muita cautela , e muita critica , antes de dar crédito ás noticias , que nos communicão : muito mais quando estas trataõ de materias extraordinarias . O Poeta Ovidio na elegante obra das Transformações , em que se apurou em descrever com affaz naturalidade as mesmas couzas , que não são conformes á natureza , nos dá huma noticia , que posto que exotica , bem pode ser natural . Diz elle , que no Paiz dos Cicones ( povos da Thracia , hoje pertencentes á Turquia ) corre hum rio , que transforma em pedra os animaes , que allí bebem , e outras couzas , que tocaõ nas suas agoas . Plinio o Naturalista nos confirma em parte esta noticia , não só do rio dos Cicones , mas de outros varios , em cujas agoas diz , que os páos , ramos , e folhas de arvores se convertem em pedra . E ainda que Plinio o não affirma de viventes sensitivos , eu o tenho visto , e experimentado d'estes ( assim como o refere Ovidio ) em hum rio de Cochinchina , onde não todos os animaes , mas sim varias especies de Caranguejos , que bebem , e se banhaõ nas suas agoas , ficaõ inteiramente transformados em pedra dura .

Os Gabinctes dos curiosos , e amantes da Sciencia Natural se achaõ hoje providos d'estas maravilhas , ou raridades ,  
que

que por taes se fazem estimaveis; mas que já se não pode duvidar, que são effeitos da Natureza. No que toca ao Reino Vegetal, se vem allí troncos, ramos, folhas, espigas de flores, e fructos de diversas arvores, principalmente de diversos Filices inteiros, e outros generos pertencentes á Cryptogamia: dando a todos estes o nome generico de *Phytolithos*. No que pertence ao Reino Animal, se vem nos mesmos Muséos muitos petrificados de insectos, de vermes, de peixes, de amphibios, de aves, de animaes quadrupedes, e ainda de homens. D'estes, que são os mais maravilhosos, se achão alguns citados por Linneo na terceira parte do *Systema Naturae*, e entre elles hum descrito por Scheuchzero com o titulo, de *Homem testemunha do diluvio*. E nesta materia ainda he mais admiravel, o que refere Helmoncio de huma horda, ou tribu inteiro de Tartaros vagabundos Baskires, fogeitos agora ao Imperio Russiano, que no anno de 1320, diz, fôra transformada inteiramente em pedra, com todo o seu gado, carros, e alfayas, de que ainda permanecem naquelle sitio as estatuas de marmore mais naturaes, e mais conformes ao seu prototypo, que já mais deu á luz Escultor algum.

Porém eu duvido muito de taõ memoravel successo, não porque o tenha por impossivel; pois os mesmos agentes naturaes, que tem força para petrificar hum vivente, a tem da mesma sorte para muitos, em quem achem as mesmas disposições: mas como se pode crer, que se ache huma tal raridade nos dominios da Russia ha mais de quatro Seculos, sem que ao menos parte d'ella se tenha conduzido para o Muséo de Petersburgo? Desde o tempo do Czar Pedro o Grande até ao presente são excessivas as diligencias, e as despezas, que os seus Augustos Successores, verdadeiros Protectores das Sciencias, principalmente a que hoje taõ dignamente occupa o throno, tem feito em conduzir para a sua Metropole dos lugares mais difficeis tudo aquillo, que pode servir para o augmento d'ellas: e com tu-

Lin. Syft.  
nat. p. III.  
p. 130.

Helm. Traict.  
de Lithcast.  
c. I.

do não sei que allí se ache algum daquelles Tartaros Bafkires, que se achão petrificados em grande numero nas Obras de Helmoncio. Pelo que deixando casos, quando menos duvidosos, vamos expôr hum do mesmo genero, em que não ha duvida.

No Reino de Cochinchina corre hum rio pela Provincia de *Gua'ng binh*, que passando pela Cidade de *Muòì ko* toma d'ella o nome, chamando-se *Soung Muòì ko*, e vai desembocar no porto *Sái*, distante d'aquella Cidade quatro legoas para o Norte: ficando o tal porto quasi em 18 grãos de latitude Boreal, e por conseguinte pouco distante dos confins do Reino de Tunkim. Quasi no meio d'aquella distancia se alarga o rio, formando hum pequeno lago, ou enseada, na qual o fundo he de lodo, a agoa salgada, e ambas as margens do rio são cultivadas, e habitadas.

Neste sitio, e na altura de oito pés, ou pouco mais, se acha sempre desde alguns seculos até ao presente grande numero de Caranguejos petrificados, huns na superficie, e outros pouco encravados no lodo, dos quaes eu tenho hoje a honra de offerecer alguns ao sabio exame da Real Academia, que comigo trouxe da mesma paragem, aonde se transformaõ.

Pertencem estes ao quadragessimo genero do Systema Lapidum do Cel. Linneo, em que constituem a primeira especie com o nome de *Entemolitus Cancrì*, Petrificado de Caranguejo. Dos quatro modos em que, segundo Linneo, se observa a petrificação, he a que se diz *Transsubstanciação*, o modo mais proprio e adequado: e este he o que se pratica no nosso *Entemolitus*, no qual o corpo, e natureza de Caranguejo se muda, e transforma no corpo, e natureza de pedra. Esta pedra he densa, homogenea, pezada, e dura em huns mais que outros, ou seja pelo maior, ou menor influxo do agente, que em diversas occasiões os transformou, ou, como julgo mais certo, por ter perseverado mais tempo o tal influxo. Por fora conservaõ não sómente

*Syst. Nat.*  
P. III.  
p. 160.

a fôrma de Caranguejo; mas muitas vezes a côr propria da fua casca, ou concha natural: e por dentro tem todos a côr escura de ferro. Muitas vezes se achão encrustados, e pegados huns a outros como lodo, que ao mesmo tempo se converteo tambem em pedra menos escura, e menos dura.

Se me perguntarem, a que genero, e especie de pedras pertencem estas, de que fallamos, que dantes fôraõ viventes sensitivos? Responderei, que consideradas sómente pelo que são, sem respeito ao que fôraõ, pertencem á 2.<sup>a</sup> especie do genero \* *Cos* de Linneo, chamada *Cos Quadrum*, pois se achão nellas os Caracteres Generico, e Especifico, com que o mesmo Linneo as distingue das outras pedras. E se alguem quizer saber as especies do genero *Cancer*, que padecem esta transformação? Digo, que são varias, e todas dos *Brachyuros*, nenhuma dos *Macrouros*. E d'aquelles observei com mais frequencia esta mudança na especie 47.<sup>a</sup> de Linneo, dita *Cancer Brachyuros Longipes*: e na 52.<sup>a</sup>, dita *Cancer Brachyuros Calappa*: talvez por serem estas duas especies mais frequentes na India, como se faz menção no *Museum de Rumphio*. Não he facil o distinguir claramente todas as outras especies: assim porque o lodo, em que estão communmente involtos, não deixa descobrir adequadamente a fôrma, que os distingue, como tambem porque a maior parte d'elles se tiraõ do lodo mutilados, e disformes: principalmente faltos de pernas, que sendo delgadas, e mui frageis, quando formados em pedra se quebraõ facilmente em lhas tocando antes de sahirem da agoa.

Parecerá talvez superfluo o fallar eu nesta materia, de que já antes tem tratado homens mui sabios, e instruidos na Sciencia Natural, como fôraõ Gesnero, Rumphio, Scheuchzero, Lesser, d'Argenville, Seba, Grimmio, Bourguet, e outros; mas duvido muito, se algum d'estes Authores assistio, e presenceou (como a mim me succedeo) no lugar  
em

\* Rumph.

Arab. l. I. cap. 38. p.

124. de Ligno petrificato.

Syst. nar. P. III. p. 61.

Syst. nar. P. I. p. 1047.

em que se formáraõ as taes petrificações , ou se pela noticia dos Viajantes fôraõ entendidas do mesmo modo , que eu as vi.

O Doutor Joaõ Jacobo d'Annone , membrò illustre da Sociedade Helvetica , dando noticia de alguns Caranguejos petrificados , que tinha em seu poder , e d'antes tinhaõ sido do Muséo do celebre Naturalista Seba , começa dizendo : *Do mesmo nome se póde colligir , que os Caranguejos petrificados são Caranguejos , que tendo nascido , e vivido na agoa fôraõ levados para a terra , e mudados em substancia de pedra por meio de varias mudanças , que tem havido no globo terrestre.* Este he tambem o parecer de outtos Authores , que elle cita : o qual eu não nego , que se verifique em alguma parte : só digo , que não se póde admittir geralmente.

*Acta Hel-  
vet. t. 3. P.  
265.*

A origem dos nossos petrificados de Cochinchina não só he diversa , mas tambem mais natural , e mais palpavel , sem para isso nos vermos precisados a suppôr alguma mudança extraordinaria no nosso globo , de grandes diluvios , terremotos , ou vulcanos , que talvez não houve , nem ha lembrança , que houvesse jámais em Cochinchina .

Os petrificados d'este paiz nem se achaõ nas entranhas da terra , nem nas praias do mar , nem na extenção de todo aquelle rio , mais que sómente na pequena superficie de huma milha á flor da terra , e debaixo da agoa , e isto perennemente por alguns Seculos , sem notavel diminuição , por mais que os pescadores os tirem para terra : logo he indubitavel , que allí mesmo successivamente se formaõ , e não são levados para allí de outra parte por revolução alguma extraordinaria do globo terrestre . Tambem he indubitavel , que isto não succede por virtude alguma lapidífica das agoas d'aquelle rio , que os transforma ; pois sendo elle assaz extenço em nenhuma outra paragem se achaõ Caranguejos de pedra , mas sim muitos Caranguejos vivos , que pescaõ , e comem os habitantes .

Daquí se infere , e conhece claramente , que a violencia

cia, que tira a vida, e transforma em pedra aquelles viventes, está no lodo, e no fundo d'aquelle pequeno espaço de rio, aonde se achão sem cavar a terra: e tendo elles allí chegado vivos, quando sobem do mar, ou descem com a corrente para o mar, ficaõ naquelle sitio entorpecidos, e duros como he a pedra, em cuja substancia se transformaõ. Esta acção, e mudança, não he instantanea; pois se achão alguns mais endurecidos, e petrificados que outros: o que parece ser em razão do mais, ou menos tempo, em que ficáraõ expostos ao mortal influxo, que lhes destruiu a propria natureza, depois de lhes tirar a vida.

Os naturaes da terra pertendem, que a transformação se faça naquelle tempo do anno, em que os Caranguejos mudaõ a casca; pois he certo, que a mudaõ, assim como as Serpentes mudaõ a pelle: porém, ainda que neste estado se achão mais dispostos para receber quaesquer influencias externas, com tudo não se pôde affirmar isto geralmente de todõs; por quanto na maior parte d'elles depois de mudados em pedra, se distingue ainda claramente a casca, ou concha, que os vestia, quando nelles se effeituou aquella mudança.

Para de algum modo percebermos o como se faz a tal transformação, he necessario advertirmos com o celebre Chimico e Medico Boerhaave, que assim o composto animal, como o de pedra tem por base, e fundamento o mesmo elemento da terra, e que os corpos, que tem este mesmo principio, facilmente se transmudaõ huns em outros. Todo o corpo animal, além da terra, he composto de grande quantidade de partes oleosas, e volateis, que se não achão na terra simples, nem nas pedras; pelo que, em se exhalando as taes particulas oleosas, e volateis, e restando sómente as fixas, fica logo o corpo animal reduzido a terra, como succede quotidianamente aos cadaveres sepultados.

Assim os Caranguejos, a que os vapores d'aquelle sitio petri-

*Arist. Hist. Anim. l. VIII c. 17. p. 56.*

*Boerh. El. Chim. de terra. p. 333. vol. I.*

petrificante tiráraõ a vida , ficando logo cubertos , ou estendidos no lodo , perdem naturalmente com o tempo as partes mais subtis , e volateis , proprias do animal , permanecendo as fixas , e terreas : e ajuntando-se a estas as exhalações metallicas , principalmente de ferro , e chumbo , de que ha minas naquella Provincia , ficaõ mais condensadas , mais pezadas , e mais duras que a mesma terra ; que estas saõ as propriedades das pedras metallicas , e estas mesmas saõ as das pedras de Caranguejo. Tambem he mui provavel , que as mesmas exhalações metallicas foffem a causa dos Caranguejos ficarem naquelle sitio entorpecidos , e mortos , como tem succedido muitas vezes a alguns homens , que trabalhavaõ em minas. Aos que trabalhaõ nas de ouro em Cochinchina , se lhes endurece muitas vezes o ventre de tal forte , que parece principio de petrificação , de que muitos morrem. Porém naõ he possível o examinar-se com certeza pela Anatomia ; por quanto naquellas terras tem por impiedade execranda o abrir hum corpo humano depois de morto.

Bem conheço , que com esta exposição naõ fica totalmente clara a difficuldade da petrificação animal ; com tudo parece , que explica mais a materia do que a sentença commun , que diz , que hum animal se petrifica , porque se lhe introduz o succo , ou espirito Lapidifico , sem explicar que cousa seja , e como obre o dito espirito : ou a sentença Aristotelica , na qual pela corrupção da fórma antiga de animal se diz gerar-se de novo a fórma de pedra , sem dizer o como : ou finalmente por se lhe introduzir alguma semente de pedra , das que andaõ espalhadas , como as das plantas , por muitas partes , e fazer vegetar a materia , que achasse disposta , na mesma figura , e substancia de pedra : como poderia alguém dizer , seguindo o parecer de Baglivio , Tournefort , e Homberg á cerca da geração , vegetação , e sementes das pedras : mas esta sentença , ainda que foffe mais provavel , do que he , nunca poderia admittir-se

nos petrificados animaes, como os noſſos, que nunca tem creſcimento, nem por confequente vegetação.

Tom. III.  
P. 274.

Dos petrificados de Caranguejos, que ſe deſcrevem nas Actas Helveticas, ſe diz, que não ſe ſabe, de que parte do mundo foraõ trazidos para Europa; mas que pela grande ſemelhança, que tem com os que deſcreve Rumphio, Kundmann, Bruckmann, e Bourguet, ſe julga, que vierãõ da China, Japaõ, ou da Coſta de Coromandel. Eu que viví 46 annos naquellas terras (excepto o Japaõ) nunca lá ví, ou ouví dizer, que ſe formaffe a tal petrificação. Por muitas partes da India correm elles com o nome de Caranguejos de Hainan, que he huma Ilha affaz grande do Imperio da China, cujo lado Auſtral fica quaſi na meſma Latitude, em que eſtá ſituado o porto *Sái* de Cochinchina, aonde ſe transformaõ os Caranguejos; porém eu fallando com varias peſſoas, que aſſistiraõ na Ilha de Hainan, nenhuma me pôde certificar, que na dita Ilha ſe faça a tal patrificaçãõ.

Voyag.  
Tom. 7.  
P. 269.

No 7.º tomo do refumo da Historia das Viagens, diz Mr. de la Harpe, *que os habitantes d'aquella Ilha (Hainan) não conbecem hum Lago celebrado de alguns Viajantes, por ter a virtude de petrificar tudo, o que nelle ſe lança: mas que eſta idéa pôde vir das petrificações, que ſão communs em Cantãõ.* Eu não julgo ſer eſta a raziãõ do engano na noticia dos Viajantes, mas ſim a proximidade dos dous lugares, e o julgarem alguns, que a Cochinchina não he Reino ſeparado, e independente da China. Eu tenho fundamento para julgar, que a maior parte dos Caranguejos petrificados, ou talvez todos os que ſe achaõ eſpalhados por diverſos Reinos da Aſia, e tambem da Europa, tem a ſua origem naquelle Lago do Rio de *Mudi ko* de Cochinchina; por quanto tenho viſto, que aſſim os Navios da China, como os Europeos os compraõ allí em grande quantidade, e por baixo preço, e depois os exportaõ para a China, e outras partes, aonde ſe ſervem d'elles na Medicina.

E qual he o seu uso, ou virtude? Por experiencia de muitos annos posso affirmar, que saõ hum excellente Aborbente, e em nada inferior ao *Oculi Cancrorum* das Officinas. Daõ-se interiormente nas febres, nas dysenterias, nas diarrhéas, nos tenesmos, nas dores, e azias do estomago, nos pleurizes, nos accidentes hystericos, e epilepticos, principalmente quando procedem do acido: e externamente saõ uteis nas inflamações, e apostemas. De forte que, sendo taõ proveitoso o seu uso para conservar a vida dos homens, naõ se póde julgar por meramente especulativo, e ocioso o seu conhecimento, que entaõ seria contra o fim, que esta Real Academia nos propoem para seguir no seu judicioso apophthegma:

*Nisi utile est, quod facimus, stulta est gloria.*

---

---



---

## EXAME PHISICO, E HISTORICO.

*Se ha, ou tem havido no mundo diversas especies de homens?*

PELO P. JOAÕ DE LOUREIRO.

---

*Fecitque ex uno omne genus hominum inhabitare super universam faciem terrae. Act. Ap. C. XVII.*

---

Lida em 25  
de Janeiro  
de 1784.

**T**ENDO o celebre Linneo concebido a vasta idéa de expôr por novo, e claro methodo todas as produções naturaes sublunares, que se comprehendem nos tres reinos, Animal, Vegetal, e Mineral, começou pelo primeiro, e o dividio em seis Classes. Na 1.<sup>a</sup> Classe, dita *Mamalia* (a que os antigos chamavaõ *animaes perfectos*) collocou na primeira ordem aquelles, a que por excellencia chamou *Primates*. E dentre estes escolho o Homem, e o poz por principio, e cabeça de todo o creado, e juntamente da sua obra; por ser o Homem o genero mais nobre de todos, que sendo feito conforme á imagem, e semelhança do Creador, leva maior vantagem a todos os viventes sensitivos, do que estes excedem os vegetaveis, e os vegetaveis os mineraes.

Linn. Syft.  
Nat. T. I.  
pag. 28.

Como caracter generico, distinctivo do Homem, lhe assignou o discurso, e reflexão, que se denota no dito do Sabio Legislador de Athenas Solon *Nosce te ipsum*. Pois seria tão chimerico hum Homem, que não fosse racional, como o seria hum animal, que não fosse sensitivo, ou hum planta, que não fosse vegetavel. E para proceder coherente no seu Systema, em que distingue tambem os diversos generos de animaes da primeira ordem, pelo diverso numero, fórma, e disposição dos dentes, propoz Linneo a que lhe pareceo mais propria do genero humano:

ain-

ainda que nesta bem pouco se differença o Homem dos monos, e bugios; pois tem commummente huns, e outros o mesmo numero, e fórma de dentes: e sómente as prezas dos bugios são de ordinario hum pouco apartadas dos incisores de ambas as partes, e em alguns maiores. Porém differe infinitamente d'elles o Homem no racional, de que dá provas evidentes no fallar com hum discurso seguido, e juntamente na Policia, com que vive, no bem Moral, que estima, e no conhecimento, que tem do Creador, e de outros entes incorporeos: o que nunca jámais se vio em bruto algum.

Além da 1.<sup>a</sup> especie de Homens, a que Linneo chamou *Homo Sapiens*, e *Homo diurnus*, poem logo immediatamente Linnæus  
Ibi. p. 33 outra 2.<sup>a</sup> especie, a que chama *Homo Troglodytes*, *Homo Nocturnus*, e tambem *Homo Sylvestris*, *Orang-Outang*, e *Kakurlacko*. Diz, que esta 2.<sup>a</sup> especie de Homens se acha nos confins de Ethyopia, segundo Plinio: e tambem nas Ilhas de Java, Amboino, e Ternate, e no monte Ophir de Malacca, segundo Bontius, e outros Authores.

Faz logo a descripção d'elles nesta fórma: que tem o corpo branco com os pêlos tambem brancos, e retorcidos: que anda levantado em dous pés, e na estatura he ameadade menor que os homens ordinarios: que tem os olhos redondos com as pupillas da côr de ouro, e as palpebras cahidas, e tremulas: que olha de esguelha, e tem a vista mais clara de noite que de dia: que as mãos, deixando cahir os braços, lhe chegam aos joelhos: que vivem até 25 annos de idade, e que fallam por assobios. Finalmente diz, que, havendo de dar credito aos Viajantes, os taes Homens consideraão, e discorrem: e crem, que este mundo fôra creado para elles, no qual para o futuro haão de vir a dominar.

Ora este modo de narração parece-me ter seu ar de fabula. Se aquelles Homens, ou animaes só fallam por assobios, sem voz articulada, quem os podia entender? Como

poderaõ explicar, que o mundo foi creado para elles? Ou que elles haõ de vir a ser Senhores do mesmo mundo?

*Syst. Nat.*  
*Tom. I. p. 33.* Nem basta para acreditar semelhante extravagancia ( de que o mesmo Linneo nas notas, que accrescentou, mostra duvidar ), que o dicesse Kjoep, ou qualquer Viajante pouco veridico, ou pouco exacto. E muito mais quando as relaçoẽs, que fallaõ nesta materia, naõ concordão entre si: descrevendo varias castas de animaes, ou de Homens de regiões mui distantes, e entre si mui differentes. As propriedades raras, e exoticas de huns, e outros confundio, e ajuntou Linneo na descripçaõ, que nos inculca desta sua 2.<sup>a</sup> especie de Homens. Esta para maior clareza reduziremos a trez Clafses, ou castas de individuos, em que ellas se observaõ.

A 1.<sup>a</sup> he dos Troglodytas, naçaõ de Homens da mesma especie que nós, ainda que mui barbaros nos costumes. A 2.<sup>a</sup> naõ he naçaõ particular; mas sim muitos individuos, que espalhados por diversas naçoẽs, ainda de pretos, nascem branquissimos, com os cabellos, e pêlos todos brancos, e retorcidos, e com os olhos da côr de fogo, e tremulos, que vem melhor de noute, que de dia; e por esta razaõ se podem chamar Nocturnos; mas na realidade sãõ Homens, e filhos de Homens como nós: sómente com aquellas qualidades phisicas accidentaes, que os enfraquecem; pelo que de ordinario vivem pouco.

A 3.<sup>a</sup> he huma casta ( ou talvez varias ) de animaes, que se encontraõ em diversos Reinos da Asia, e da Africa, e a que os Viajantes commumente chamaõ *Bugios*, e os naturaes da India chamaõ *Orang-Outang*, que quer dizer *Homem do mato*, e tambem *Kakirlacko*; mas na Africa sãõ chamados *Pongo*, ou *Jocko*. Todos estes, ainda que differentes entre si na côr, e no tamanho, como tambem em algumas feiçoẽs do corpo, tem com tudo muita semelhança na figura com o Homem; porém nunca se vio algum, que fallasse, nem desse signaes de raciocinio, ainda sendo domesticado, e creado desde pequeno entre os Homens; pelo que

que não póde haver duvida, que são brutos, e não verdadeiros Homens, ou da nossa, ou de outra especie; por lhes faltar o caracter essencial, e generico do Homem: *Nosce te ipsum*. Vamos por partes, começando pela primeira.

Dos antigos Trogloditas fallão não sómente Plinio, mas tambem Strabo, Pomponio Mela, e outros Authores mais modernos, que Herodoto, de quem parece que houvêraõ principalmente esta noticia. Herodoto historiador grave, e Pai da Historia, como lhe chamou Cicero, diz no Livro 4.º das suas antiguidades, *que de todas as nações conhecidas os Troglodytas de Ethyopia são os mais ligeiros na carreira: que se sustentão de Serpentes, e lagartos, e outros animaes amphibios: que usão de Lingoa particular, que não tem semelhança com alguma outra, e que mais se parece com os guinchos, ou silvos dos morcegos.* Com pouca mudança de termos nos communica a mesma noticia Pomponio Mela: *Troglodytæ nullarum opum domini strident magis, quam loquuntur, specus subeunt, alunturque Serpentibus.* Strabo na sua Geografia das Nações do Mundo confessa, que elles costumão habitar em covas: que d'este costume procede o chamarem-lhes *Troglodytas*: e que são descendentes dos Arabios, que habitão da outra parte do Mar Roxo: *Quia enim terram subeant multi Troglodytas, quasi antricolos dixere: Hi ex Arabibus sunt, qui ad alteram sinus Arabici partem vergunt ad Ægyptum, et Æthyopiam.*

Herod. in Melpomene.

Pomp. Mela L. I. cap. 8.

Strabo de Situ orbis L. I. p. 39.

Plin. Hist. Nat. L. V. cap. 8.

Plinio citado por Linneo, diz no L. V. Cap. 8.º da sua historia natural: *que os Troglodytas fazem covas, que são as casas, em que vivem: que o seu comer he carne de Serpentes: que dão gritos, sem voz distincta: e que não podem communicar-se pela falla.*

Assim tendo Herodoto affirmado sómente, que tem Lingoa particular, que não he semelhante a alguma outra, Plinio accrescentou expressamente, que não podem communicar-se pela falla, *adeo Sermonis commercio carent.* Mas parece, que se esqueceo do que tinha já dito, quando no

Liv.

Liv. VI. cap. 29. fallando do lugar *Abulition* fundado pelos servos fugitivos dos Egypcios, diz, que ha allí hum grande emporio dos Troglodytas, e tambem dos Ethyopes: *Maximum hic Troglodytarum emporium, etiam Æthyopum.* Todos sabem, que hum grande emporio he huma grande Cidade negociante, huma grande feira, ou hum grande Lugar de commercio, aonde concorre muita gente para tratar entre si da venda, e compra de diversas fazendas. E póde-se fazer este vasto commercio *maximum emporium* sem se communicarem as pessoas por palavra, ou por escrito, por si mesmo, ou por interprete? De que servia pois este grande emporio aos Troglodytas, se elles não se communicavaõ pela falla?

Plin. L. VI.  
c. 29.

Plin. L.  
XXXVII.  
c. 8.º

Mais. No cap. 8.º do Liv. XXXVII, que he o ultimo, refere o mesmo Plinio, que no Mar Roxo, entre as Costas de Abyssinia, e Arabia está situada huma Ilha chamada *Topazon*, aonde se achaõ, e d'ella tiraõ o nome as pedras, que se estimaõ com o nome de *Topazios*: que estando muitas vezes a tal Ilha encoberta com a nevoa he mui difficil de achar aos navegantes, que a buscaõ, como faõ os Troglodytas, em cujo idioma o nome da Ilha *Topazin*, significa *buscar Topazin enim Troglodytarum lingua significationem habere querendi.* Com que temos já os Troglodytas com Lingoa, e vozes articuladas, como os outros Homens, qual he a palavra *Topazin*, que se percebe, e pronuncia mui bem por outras nações.

Muito bem a entendia, e fallava a Rainha Cleopatra do Egypto, não obstante, que a sua conversação era mais de cortezã, que de barbara; pois d'ella refere Plutarcho na vida de Marco Antonio, que se communicava com os Troglodytas immediatamente sem interprete. Donde se faz evidente, que os Troglodytas tinhaõ sim hum idiõma proprio, mas racional, e capaz de ser ouvido, e attendido nas Côrtes mais polidas do mundo, qual era a Metropole do Egypto.

O viverem aquelles Homens em covas, e serem ligeirissimos na carreira, se vê tambem em outros povos de Afri-

Africa, e de America; mas isto não basta para os desterrar da  
 comum especie de Homens. O comerem cobras, e la- Abr. des  
 Voyag. T.  
 X. f. 307. e  
 T. XI. f. 287.  
 e T. I. f.  
 164.  
 gartos ainda he menos singular. Muitos Européos na India,  
 e creio, que tambem em outras partes, usão na meza com  
 especial gofsto de huma especie de lagartos, que allí cha-  
 maõ *talagoyas*, e outros com Linneo lhes chamaõ *Iguanas*. Syst. Nat.  
 T. I. pag.  
 366.  
 Em muitas partes da Asia comem os naturaes a carne do  
 maior lagarto, que ha, e que não differe do Crocodilo de  
 Egypto. Para este fim me trouxeraõ huma vez amarrado hum  
 de mediana grandeza, o que eu lhes agradeçí, sem aceitar  
 o presente. Huns póvos pretos chamados *Mois*, que habitaõ  
 nas altas serranias, entre Cochinchina, e os Laos, vaõ  
 muitas vezes em ranchos á montaria das serpentes nos de-  
 zertos: e a mim me certificáraõ, que achaõ melhor gofsto  
 em comer as cobras, do que as gallinhas, que elles criaõ  
 em abundancia.

Além de que os Troglodytas, se he que usavaõ d'este  
 mantimento, que nos mete horror, não usavaõ tanto d'elle  
 quanto da caça dos Elefantes. O mesmo Plinio o con- Plin. L.  
 VIII. c. 8.  
 fessa, declarando a destreza, e valor, com que seguran-  
 do-se com huma maõ na cauda do Elefante, que perseguiaõ  
 á caça, subiaõ logo por detraz d'elle, e firmando os pés  
 na coxa da perna do mesmo animal, davaõ golpes com  
 huma machadinha, que tinhaõ na maõ direita, e cortavaõ  
 os nervos, ou tendões da outra perna do Elefante; com  
 que, ficando coxo o animal, o matavaõ facilmente, e o co-  
 miaõ: *Troglodytæ contermini Æthyopiæ, qui solo hoc venatu  
 (elephantum) aluntur. &c.*

Eu não tenho achado em algum author, que os Tro-  
 glodytas fossẽm ametade mais baixos que nós, nem até  
 agora consta com certeza, que haja no mundo nação alguma  
 taõ pequena. Dos Lapões do Norte, e dos Indios Esqui-  
 maux da America se affirma, serem comumente de baixa  
 estatura; mas não tanto, que não excedaõ 3 pés de alto.  
 Tambem não tenho lido, que os Troglodytas tivessem os

braços mais compridos, que o comum dos Homens. Bem pôde ser, que a natureza por acaso distinguisse alguns d'elles com aquelle excessão, que deo nome a Artaxerxes Longimano Rey da Persia. Além disso não percebo como aquelles povos de Ethyopia fossem brancos; pois tendo-se averiguado, que todos os povos de Ethyopia são de côr mais, ou menos escura, o fazer o Homem Troglodyta branco seria *Aethyopem dealbare*.

L. VI c. 29.  
nota b.  
Hom.  
*Odyss.* L.  
IV.

Os Comentadores de Plinio notaõ, que os Troglodytas, aquem Homero na sua *Odysséa* chamou *Ercmbus*, são hum povo dos Abexins na Ethyopia alta, que fica proximo ao Mar Vermelho. Nos tempos modernos se chama o paiz dos *Barnágas*, que nos mappas se vé situado em 14 grãos de Latitude Boreal, junto ao Reino de *Tigré*, que he huma Provincia do Imperio Abexim.

No meio do Seculo 16.º por petição do Emperador de Ethyopia Claudius, feita á Corôa de Portugal, com promessa de se reduzir aquelle Imperio á Igreja Catholica (pois era, e ainda he Scismatico) fôraõ mandados áquellas terras não só Missionarios, e Bispos; mas tambem hum soccorro de 400 Soldados Portuguezes, com o seu Capitaõ General D. Chistovaõ da Gama, que allí obráraõ maravilhas de valor em defença da Religiaõ Catholica, e do Monarcha Abexim, que os pedira. Com tudo achando-se as historias Portuguezas enriquecidas de noticias mui raras d'aquellas terras por meio dos seus naturaes, que lá assistiraõ por dilatados annos, não se lê nellas declaraçaõ, ou prova alguma convincente ácerca d'aquelles Homens, que se suppoem de diversa especie, com os quaes, se os houvesse, teriaõ tratado, quando menos os Missionarios, que assistiraõ no Reino de *Tigré*, confinante com o paiz dos *Barnágas*, e converteraõ nelle muitas almas com a protecçaõ, e ajuda do Vice-Rey Abexim, que era mui zeloso Catholico.

Ludolph.  
*Hist. Eth.*  
L. I. c. 14  
n. 102.

Leutolff na erudita historia, que compoz de Ethyopia, julga, que os Troglodytas não são diferentes de huns povos, que

que nas Cartas dos Missionarios Catholicos do Imperio Abexim são chamados *Sankdals*, e se diz d'elles, que andão nús, e comem ratos, e serpentes. O mesmo Author he de parecer, que os negros Hottentotes do Cabo de Boa Esperança procedem da mesma nação. E com tudo he hoje confiante, que todos são Homens da nossa mesma especie, ainda que a Lingoa, que fallaõ, tem hum tom deffemelhante ao de todas as outras, e elles mesmos tem alguma differença nas feições do corpo, e huma distancia enorme na barbaridade de costumes, com que se criaõ.

Visto que as principaes propriedades do *Homo Troglodytes* de Linneo, não se achaõ na propria nação dos Troglodytas, vamos ver se as descobrimos em outra parte. Ifigonus de Nicæa, citado por Plinio diz, que os Albanos, <sup>Apud Plin. L. VII. c. 2.</sup> povos da antiga Scythia, e descendentes de Jason, nascem com os cabellos brancos, e os olhos avermelhados, com os quaes vem melhor de noite, que de dia. Estas propriedades attribue Linneo ao seu *Homo Troglodytes*, a que tambem chama *Homo Nocturnus* por ter melhor vista de noute. Mas estes Homens Nocturnos, e Albanos (que ambos estes nomes lhes são proprios) não fazem por si huma nação, nem ainda huma familia distincta, segundo a experiencia moderna nos tem ensinado: antes sim se encontraõ espalhados por diversas nações, e nellas procedem de Pais, e de familias, que não tem as mesmas propriedades.

Eu, antes de ir para a India, ví nesta Cidade huma pessoa, que parecia ter 10, ou 11 annos de idade. Passados alguns annos ví outra em Macáo, que poderia ter 15. E ultimamente ví a terceira em Cochinchina de pouco maior idade. Todas estas trez pessoas eraõ de côr alvissima; mas sumamente desmaiada, como a cal, ou alvaiade. Tinhaõ os cabellos, e mais pêlos do corpo, totalmente brancos: as pupillas dos olhos, que abriaõ com difficuldade de dia, eraõ vermelhas, e luzentes, com alguma semelhança aos olhos da Coruja; pelo que viaõ com mais facilidade de noute, que de

de dia, cuja luz os obrigava a pestanejar com frequencia. O mais singular he, que a pessoa, que vî em Macáo, era nascida em Timor de Pais pretos, como saõ todos os naturaes d'aquella Ilha.

Passando despois ha trez annos por Moçambique na Africa, me affirmaraõ allí pessoas de credito, que entre os Cafres d'aquella Costa se achaõ tambem alguns individuos semelhantes a seus Pais na estatura, e outras feições, mas diversos na cõr branca da pelle, e pêlos, que tinhaõ retorcidos, o que naõ se observa nos que saõ Filhos de Homens brancos: e todos com as mesmas propriedades de olhos vermelhos, e vista nocturna.

*Abt. des  
Voyag. T.  
IV. c. 213,  
e T. XII.  
c. 438.*

Os mesmos, e da mesma forte diferentes do comum dos Homens, tem encontrado os Viajantes na Costa Occidental de Africa, e Reino de Cougo: como tambem nas Ilhas de Amboino na Asia, e no isthmo de Panamá na America, aonde os Hespanhoes os chamaõ Albinos. De sorte que estes fenomenos, e desvios das leys geraes da natureza naõ saõ dos mais raros. Com tudo sendo huma mudança, ou variedade, que naõ he transcendente de algum principio constante, mas sim do temperamento accidental, pela diversa combinaçaõ dos humores, naõ se póde dizer, que estes individuos formaõ huma especie de Homens diversa da nossa.

Despois de observarmos os paizes dos Troglodytas, e Albanos, Homens Nocturnos, passemos a dar vista dos *Orang-Outangs*, Homens do matto. Assim saõ elles chamados em algumas partes da India. Do que naõ se deve inferir, que os Indios os tem por verdadeiros Homens; mas sim por verdadeiros brutos, que com figura de Homens habitaõ nos mattos. Hum retrato, e hum cadaver de Homem tambem se dizem vulgarmente Homem pintado, e Homem morto, e com tudo naõ saõ Homens. Este naõ o he, porque naõ tem já a alma racional, principal constitutivo do genero humano: aquelle muito menos, por naõ ter a alma, nem o corpo, mas só-

men-

mente huma sombra, e semelhança de homem. Esta semelhança, e figura exterior, he unicamente a que nos pertende persuadir, que o *Orang-Outang* he Homem; mas esta mesma semelhança he muito menos propria, e adequada no *Orang-Outang*, que no cadaver, ou na pintura.

Nem me digaõ, que naquelle, além da grande semelhança na figura, se acha tambem a vida, com que se move, sente, e conhece, como os Homens; pois o modo de vida, e conhecimento, que os Escriitores mais exactos tem observado no *Orang-Outang*, he comum, e não superior ao de outros animaes: e com tudo se diz d'estes, que são viventes sensitivos, e não racionaes. Logo segue-se, que o unico motivo, que nos poderia induzir, e enganar para o ter por Homem á primeira vista, he sómente a grande semelhança, que tem com a figura humana.

Jacobo Boncio, Medico da Companhia Hollandeza em Batavia na Java, he citado por Linneo como testemunha de vista para prova da sua nova especie de Homens. Este Author, que assistio muitos annos na India, diz, *que elle vira allí varios Satyros, chamados Orang-Outangs, de ambos os sexos, que andavaõ direitos em dous pés; e principalmente hum do sexo feminino, que mostrava ter tanta vergonha á vista de Homens desconhecidos, que cubria a cara com as mãos, chorava, e dava gemidos com taes expressões das paixões humanas, que se poderia dizer, que só lhe faltava a falla para ser mulher.* Com tudo elle não se atreve a affirmar, que o era, antes pelo contrario a chama Satyro, e monstro.

Jac. Bonc.  
Hist. Nat.  
L. V p. 84.

*Mirabile monstrum*

*Humaná spectá facie; tum moribus illi*

*Assimile in gemitu, tum fletibus ora rigando.*

E essas mesmas demonstrações, que Boncio lhe attribue a pejo, e vergonha, com maior razão se devem attribuir a medo, e espanto, como eu tenho observado com outros animaes. Além de que, se aquella minina Satyra de Boncio

era de natureza taõ vergonhosa , com grande injuria , e muita impropriedade a representa o Author na estampa do seu livro , em figura taõ descomposta , que facilmente causaria pejo á mais barbara nação do mundo.

Buff. T. IV.  
pag. 279.

O sabio Conde de Buffon , que escreveu com muita exactidão , e ingenuidade a Historia Natural dos Animaes , diz , que elle vio , e observou muitas vezes em Paris hum *Orang-Outang* vivo , de dous pés , e meio de altura , o qual nem fallava , nem se dava a entender por assobios , nem fazia cousa alguma de maior habilitade , que hum caõ bem instruido naõ podesse fazer. Qual era logo o seu discurso , a sua falla , e a sua intelligencia racional? Diz mais , que se differença em quasi tudo da descripção , que d'elle nos dá Linneo ; pelo que duvida muito da verdade da tal descripção , como tambem da existencia do objecto d'ella o Homem Nocturno : e depois accrescenta , que naõ julga demasiado o exame escrupuloso , e dilatado , que fez de hum Ente , que debaixo da figura de Homem , naõ he toda via mais , que hum Animal.

Dict. of  
Arts and  
Sciences.

O Diccionario Inglez das Artes , e Sciencias os tem por verdadeiros brutos , e como taes os descreve na palavra *Monkey* , e traz a sua figura na Lamina 182 , como tambem a do *Satyro* conhecido por Plinio , e outros Escriitores Romanos , e Gregos , que tambem tem muita semelhança com o Homem.

Hum Capitaõ Inglez , com quem fiz viagem pelo Exercito de Malaca , me contou , que nos montes , que ficaõ para o Sudoeite , trez dias distantes d'aquella Cidade , se achao estes viventes , que parecem ser Homens : que naõ só andaõ sempre em dous pés levantados ; mas que tem todos os membros proporcionados. Que por serem mui medrosos , e fugirem com extraordinaria ligeireza , nunca se pôde apanhar algum. Accrescentou , que se suspeitava serem descendentes de alguns naturaes da Cidade , que tinhaõ fugido para os montes no anno de 1640 por occasião

fião da guerra, em que os Hollandezes se apoderáraõ de Malaca. Porém esta conjectura não parece verosimil; por quanto agora se diz, que elles não fallaõ lingoa alguma, e fallariaõ sem duvida a Lingoa Malaia propria de seus ascendentes, se fossẽm d'elles nascidos, e criados com elles naquelles montes. O que parece mais certo he, que elles saõ os mesmos *Orang-Outangs*, que Linneo diz, habitaõ no Monte Ophir de Malaca, e por serem taõ brutos, como quaesquer outros, não tem capacidade para discorrer, nem fallar.

O judicioso, e recente Author da Historia de Sama-  
tra (na qual Ilha junto ao Rio Passaman, na Costa Occi-  
dental, e não no continente de Malaca, fica situado o Mon-  
te Ophir) escreve, que entre as varias nações, que po-  
voaõ aquella Ilha, se achaõ duas totalmente sylvestres, e  
retiradas de todo o commercio com as outras, huma cha-  
mada *Orang-Cubu*, e outra *Orang-Gugu*, que ambas tem seu  
idioma proprio, em que fallaõ, e usaõ por comida de tu-  
do o que se cria nos bosques, veados, elefantes, rhino-  
cerontes, javalis, serpentes, e bugios. A segunda casta  
*Orang-Gugu* he menos numerosa, mais brutal, e tem o  
corpo peludo; de sorte, que exceptuando o uso da falla,  
em pouco mostra differençar-se dos *Orang-Outangs* de Bor-  
néo. Os naturaes da Provincia de *Labun*, na mesma Ilha,  
indo á caça, tiveraõ occasiaõ de apanhar huma mulher d'es-  
tes montanhezes, a qual depois vivendo em povoado se  
diz, que teve filhos, que nascêraõ tambem peludos como  
a Mãi; mas na terceira geraçaõ os seus descendentes não  
tinhaõ já pêlos, nem differença alguma dos outros Homens.  
Esta noticia nos communica M.<sup>r</sup> Marsden, como havida dos  
mesmos habitantes de Samatra, de cuja verdade elle não  
quer ser fiador; porém julga, que não he mera invençaõ,  
e sem algum fundamento na realidade do caso, ainda que  
exagerado nas circumstancias. *It has probably some foundation  
in truth, but exaggerated in the circumstances.* A mim me pare-  
ce, que ainda concedendo tudo o referido, aquelles mon-  
tanhe-

M.<sup>r</sup> Marsden. *Hist. of Sumatr.* c.2. pag. 35.

tanhezes de Samatra não eraõ *Orang-Outangs* ; porque tinhaõ o uso ordinario da falla , que só podem ter os racionais : nem tambem eraõ Homens de diversa especie da nossa ; porque o terem o corpo peludo , e viverem selvagens nos bosques , só he differença accidental , e não especifica.

Eu nos annos , que assistí em Cochinhina , não vi , mas tive comigo alguns tempo hum domestico , que tinha visto no Reino de Champá , pertencente á Cochinchina hum d'estes homens do matto , semelhante áquelles , que nos Reinos de Congo , e Guiné são chamados pelos Africanos *Pongo* , e *Baris*. Era todo preto , com poucos pêlos no corpo , da estatura ordinaria dos Homens , e com bastante semelhança a elles na proporção dos membros. Andava em dous pés , e mostrava huma força extraordinaria ; pois tendo-lhe amarrado fortemente os braços com cordas , quando o prendêraõ nos montes , com o impeto , que fazia , dando ao mesmo tempo hum salto , e hum grito , quebrava facilmente todas as prizoês , sem fazer mal a pessoa alguma. Não fallava , nem dava signaes de verdadeiro discurso ; pelo que os mesmos naturaes da terra o tinhaõ por bruto , e não por Homem.

Esta casta de animaes tem se propagado muito em varios Reinos da Asia , e da Africa , principalmente nas terras , que ficaõ de baixo da Zona torrida. Nas terras frias não podem absolutamente viver , e nas temperadas vivem mui pouco : no que mostraõ ter hum temperamento mui diverso dos homens , que vivem igualmente em todos os climas ; e pelo contrario são proximos á natureza dos bugios , dos quaes a maior parte das especies só podem viver em climas quentes. A razaõ , por que os *Orang-Outangs* se não vêm com mais frequencia , he porque ainda nos climas quentes , que habitaõ , se retiraõ para os montes mais agrestes , e para os desertos mais occultos , e menos frequentados dos homens. Alguns , que se apanháraõ com laços

fô.

fôraõ conduzidos em navios para Europa ; mas os mais d'estes morrêraõ logo na viagem , e hum , ou outro , que chegáraõ a França , Inglaterra , e Hollanda , duráraõ nestas terras mui pouco.

A estatura ordinaria dos *Orang-Outangs* he quasi a mesma que a dos Homens ; porém faõ mais encorpados , e alguns agigantados de 6 a 7 pés de altura. Outros muitos faõ a metade menores , como os descreve Linneo , e tambem era d'estes o que vio M.<sup>r</sup> de Buffon em Paris. Henrique Grosse na viagem ás Indias Orientaes refere , que o Nababo de Carnate mandára de presente ao Governador Inglez de Bombay dous d'estes animaes perfeitamente semelhantes aos Homens ; mas que só tinhaõ dous pés de alto , e eraõ de côr branca pallida : o que , se assim he , esta relação não se conforma bem com as outras. Quasi todos os outros pela maior parte faõ de côr escura , e tambem alguns ha de côr amarella , como eraõ os que Bosman vio em Guiné. Todos elles não tem cauda , nem tem pêlos na cara ; mas alguns tem muitos no corpo , principalmente nas costas.

Andaõ communmente em dous pés , e tambem algumas vezes em quatro , segundo outros referem. A cara he chata , e ainda mais o nariz , a bocca mui larga , os olhos encoados , e as orelhas grandes. Os pés faõ tambem chatos , com o dedo pollegar mui curto , e o calcanhar levantado , que não póde facilmente chegar ao chaõ , e se parecem mais ás maõs , que aos pés dos Homens , para com elles se segurarem mais facilmente nos ramos das arvores , aonde dormem. Os braços faõ mais compridos , e as coxas das pernas mais curtas , que nos Homens. Estas , e outras feições , e propriedades d'estes animaes se podem vêr com mais clareza nas relações de muitos viajantes , que se achaõ na Historia geral das Viagens , e tambem muitas d'ellas recopiladas na 4.<sup>a</sup> Parte da Historia Natural de M.<sup>r</sup> de Buffon.

M.<sup>r</sup> Tyson , Anatomico Inglez , não só vio vivo ; mas fez exacta anatomia em *Londres* de hum *Orang-Outang* pe-

queno, que tinha sómente dous pés de altura, e dous annos de idade. Abrio-o em companhia do celebre Anatomico Cowper, e tendo ambos examinado com a maior attenção todos os membros, orgãos, partes internas, e externas d'aquelle corpo exotico acháraõ, que em mais de 30 partes era mais semelhante ao corpo dos bugios, que ao dos Homens; porém que em outro maior numero de partes concordava mais com o corpo humano, que com o dos bugios. E do resultado d'estas observações deo M.<sup>r</sup> Tyson noticia ao publico em hum Livro, que imprimio em Londres no anno de 1693.

Isto he o que consta com certeza do exame mais exacto, e das relações mais veridicas, que nos tem dado a conhecer estes animaes maravilhosos: crescendo tanto mais a maravilha, quanto menos vezes se offerece occasião de os vêr. E como as noticias tanto se ouvem, ou lem com mais gosto, quanto se representaõ mais raras, d'aquí nasceo, que os Authores, e Viajantes accrescentáraõ, conforme a sua fantasia, mais do que viráõ em realidade: do que sorprendida a sinceridade do celebre Linneo, escreveu o que elle não tinha visto, nem podia vêr; porque o não ha.

Do que existe, e se sabe com certeza, se pôde conhecer mui bem, que os *Orang-Outangs*, Homens do matto, e Selvagens, são na figura do corpo mui parecidos, ainda que não em tudo, aos verdadeiros homens; mas realmente não são Homens; porque não são racionaes. Que os Albanos, Homens nocturnos, e os Troglodytas, são racionaes, e são Homens; mas não de diversa especie, por não terem diversas propriedades phisicas, transcendentas, que bastem para fundar huma nova especie.

Depois da que o celebre Linneo na 1.<sup>a</sup> Parte do seu *Systema Naturæ* chamou 2.<sup>a</sup> especie de Homens, deo á luz outra 3.<sup>a</sup> especie, que com o nome de *Gibbon*, ou *Golock* se acha descripta no appendix da *Mantissa* impressa em Stockolmo no anno de 1771. Elle lhe dá o nome especifico de *Homo Lar*,

*Lar*, que parece quer dizer *domestico*, e *familiar*, assim como o eraõ os Deozes *Lares*, que se diziaõ assistir com os Romanos para lhes guardar as suas casas, e os caminhos publicos: e segundo se refere nos *Fastos* de *Ovidio* tiveraõ origem em dous Irmãos gêmeos chamados *Lares*, que nasce-  
raõ da *Nympha Lara* pela violencia, que lhe fez *Mercurio*. Ovid. Naf.  
Fast. L. II.

*Fitque gravis, geminosque parit, qui compita servant,*

*Et vigilant nostrá semper in Urbe, Lares.*

Estes, que eraõ falsos Deozes, tinhaõ a sua assistencia na antiga Roma: os *Gibbons*, e *Golocks*, que saõ Homens fingidos, habitaõ hoje na Costa de *Coromandel*, em *Malaca*, nas *Ilhas Molucas*, nos confins da *China*, e nos bosques de *Bengalla*. Saõ, conforme a descripção de *Linneo*, de natureza mansos, e preguiçosos, que soffrem mal o frio, e a chuva. Naõ tem cauda. Andaõ com o corpo levantado, de estatura ordinaria dos Homens, e de côr preta, ou escura. A cara, diz, que tem de côr de carne: o lugar dos olhos, nariz, e bocca sem pêlos; mas á roda da cara os cabellos levantados. Os braços saõ mui corpidos, e estendidos até os pés, de forte, que ficando levantados andaõ em quatro.

O *Conde de Buffon* na sua *Historia Natural* dos animaes traz a figura mui propria d'este com o nome de *Grande Gibbon*. Diz, que elle o vio vivo: que naõ chegava a trez pés de altura, e que o caracter principal, que o distingue dos outros bugios, he a prodigiosa grandeza dos braços, que saõ taõ compridos como todo o corpo; que a cara era de côr escura, com bastante semelhança á dos Homens; mas os dentes caninos, que chamamos *presas*, eraõ maiores, que os humanos: que era de natural doce, e domestico, e que tomava mansamente o que lhe davaõ a comer. Porém naõ notou, que fizesse acção alguma, em que mostrasse ter discurso; e como assim o poem no numero dos bugios. Hist. Nat.  
T. IV. f.  
298.

No anno de 1778, que eu estive em *Bengalla*, ouvi di-

dizer, que os Hollandezes tinhaõ allí dous d'estes animaes na sua feitoria; porém eu não tive entãõ a curiosidade de os hir vêr. Logo no mesmo anno, passando por Malaca de volta para a China, vi outro naquella Cidade com quasi as mesmas propriedades, que referem os sobreditos Authores: e tive affaz de tempo para o examinar exactamente; porque o levamos com nosco no mesmo Navio para Cantão. Não chegava a trez pés de alto: o corpo era preto, sem cauda, e com pêlos densos em todo elle, excepto na cara, que os não tinha, e era de côr parda escura com hum circulo de pêlos cinzentos á roda d'ella. Na cabeça não tinha propriamente cabellos; mas pêlos enriçados, pouco mais compridos, e da mesma côr preta, como os do corpo. Os pés eraõ menos semelhantes aos dos Homens, que os de outras especies de bugios, e tinhaõ as unhas curvas, e agudas.

Os braços eraõ desmarcadamente grandes, e d'elles se valia com frequencia para andar; mas com esta singular differença, que pondo as mãos no chaõ não ficava, como os outros animaes, com o corpo parallello á terra, nem tambem perpendicular, como os Homens; porque encurvando-se hum pouco nos joelhos, e na cintura, formava com o corpo, e pernas dous angulos obtuzos á imitação da letra S. Era manso, e mui medroso: não fazia os brincos, e ridicularias, que fazem os outros bugios: nem mostrava mais intelligencia, que elles.

Este he o animal disforme chamado *Gibbon*, que de baixo do especioso nome de *Homo Lar* se nos quer introduzir por individuo do nosso mesmo genero, formando huma terceira especie do genero humano. Chamo-lhe disforme; porque na realidade o he, assim na fórma interna, como na externa. Na externa basta para o affirmar a enorme desproporção, que tem dos braços com o corpo, a qual deformidade não se vê em algum dos animaes, que chamamos perfectos, e nelle faz huma apparencia desagradavel, e medo-

donha. Na interna; porque não obstante alguma semelhança, que tem exteriormente com o Homem, elle não falla, nem discorre, nem ainda mostra aquella industria, e habilidade, de que a natureza tem dotado outras especies de bugios. Pois se d'estes, com serem mais industriosos, falta a razão para dizer, que são Homens, como se poderá dizer d'aquelles, que o são?

Nos annos, que eu assistí na Cidade de *Húé* Côrte de Cochinchina, havia allí huma Companhia de Comediantes, que todos eraõ bugios d'aquella especie, que mais communmente se chamaõ *macacos*, e costumaõ vir de Angola, e de outras partes de Africa. Estes, tendo-lhes cortado as caudas, e feito vestidos, e mascaras conformes ás pessoas, que haviaõ de representar, e industriados pelo seu mestre nas acções, lugar, tempo, e modo, que haviaõ de observar, começavaõ a Comedia, ou Entremez, logo que se lhes dava signal para sahirem ao theatro. Nelle tocavaõ instrumentos musicos, dançavaõ ao compasso, peleijavaõ com diversas armas, e o que mais he, fingiaõ com maravilhosa imitação as acções humanas, e o caracter proprio d'aquellas pessoas, de que faziaõ a figura. Do Soberano imitavaõ a gravidade, do Soldado a resolução, do criado a diligencia, do criminoso o temor, do parasito os obsequios, e com mais propria naturalidade as macaquices do bobo.

Ora quem não diria, que aquelles representantes eraõ racionaes? Pois nada menos; porque tantas, e taõ diversas acções, que faziaõ com tanta propriedade, não procediaõ de verdadeiro discurso; mas sómente de imitação, e lembrança do que lhes tinhaõ ensinado: em que esta casta de animaes he mais docil, que outras, como bem notou o eloquente Lacerda: *Simia quamvis ludum docetur, natum ad imitationem animal: sed vitia potius, quam rectè facta hominum imitatur.* Bem he verdade, que nos instrumentos, que tocavaõ, faziaõ elles as mudanças com os dedos; mas a harmonia da musica, como tambem a falla dos papeis, que representa-

In Campo  
Eloq. vol. 1.

Apud Her-  
nand. in  
ibef. Amer.  
tol. 716.

vão , sahia detraz das cortinas , sem que fóra se percebesse : e ainda nesta parte poderiaõ ser ajudados de pagaios , principalmente de hum , que conta João Fabri , vio em Roma , o qual respondia com acerto a varias perguntas , que lhe faziaõ , e cantava varias letras por folha. Mas tudo isto não he prova de discurso , nem excede a capacidade material dos animaes.

Para fallar , e fazer as cousas , que se vêm , e ouvem , principalmente em materias limitadas , não he necessario o uso do discurso ; mas sim lembrança , e imitação do que se tem visto , e ouvido : e disto ninguem nega , que alguns animaes sejaõ capazes. O discurso racional se mostra em conhecer , e inferir das cousas , que se viraõ , ou ouviraõ , outras , que não fóraõ vistas , nem ouvidas : e isto não por semelhança alguma sensível , que tenhaõ entre si ; mas sim pela connexão insensível de causalidade , ou razão comum , que as une , a qual não alcança o conhecimento material dos brutos ; mas sim a intelligencia racional dos Homens. Esta conhece tambem a existencia dos entes incorporeos , inferindo-a dos seus effeitos : conhece , e ama o bem moral , e honesto , de que os sentidos corporeos dos brutos não tem , nem podem ter alguma idéa. Do que se segue claramente ser a fórma Humana essencialmente diversa da dos brutos , e não só no mais , ou no menos : que esta diversa essencia consiste em ser racional : que por ser racional he espirito : e por ser espirito he immortal.

Não devo aquí dissimular huma difficuldade , que se me póde oppôr. D'aquelles animaes , que tem alguma semelhança com o Homem , se conta , que tem algumas vezes cohabitado com individuos da verdadeira especie humana. He certo , que na Africa tem vivido com elles algumas negras por annos inteiros , ou fosse por violencia , ou por consento voluntario. E tambem se diz ( ainda que não com a mesma certeza ) que d'este brutal commercio tem nascido creaturas humanas : com que se pertende mostrar , que ou os Pais  
eraõ

eraõ Homens , como faz Linneo os Gibbons , e *Orang-Outangs* , ou que a fórma humana naõ he diversa essencialmente da de outros animaes ; pois póde d'elles proceder.

He mui notavel a este respeito , o que se conta da origem da Familia *Dinh* , que começou a reinar em Tunkim no anno de 968 da Era de Christo. Referem as historias d'aquelle Reino , que havia allí huma mulher viuva , ainda moça , e formosa , mas de boa reputaçãõ , chamada *Nang Dam Nuong* , a qual por ser pobre , hia muitas vezes a hum bosque , que ficava perto da sua casa , a buscar alguns ramos de arvores seccos , com que fazer a comida. Em huma d'estas occasiões vio sahir do interior do bosque hum bugio ( assim lhe chama a historia *Kbitláng* ) branco , e grande , como hum homem , o qual , naõ lhe podendo ella resistir , a opprimio. Voltou para casa triste , e ainda mostrou maior afflicçãõ , quando depois de algum tempo veio a conhecer em si os effeitos da violencia passada.

Hum seu Tio , com quem vivia , vendo-a desconfolada , e notando tambem alguns signaes dos mesmos effeitos , a persuadio com brandura a declarar-lhe a causa da mudansa , que observava. Com repugnancia , e lagrimas contou ao Tio tudo , o que lhe tinha succedido , e que por isso naõ se attrevêra mais a hir áquelle bosque. Has de hir comigo , replicou o Tio , e naõ temas ; que eu te defenderei. Preparou logo as armas , e foi varias vezes com a Sobriuha ao lugar affinalado : até que huma vez , estando em cillada , vio sahir o bugio , e arremeter com impeto para gozar da preza ; mas o Tio , que o esperava resoluto , saltou de repente sobre elle , e o matou : ficando certificado ( segundo se refere ) com o exame do corpo morto , de que naõ fôra Homem , mas bruto o author d'aquelle violento insulto.

Passado o termo dos nove mezes determinado pela natureza sahiõ á luz hum menino perfeito , que desde os primeiros annos mostrou grande inclinaçãõ , destreza , e valor

no exercicio das armas. Tinha fallecido alguns annos antes o Rei de Tunkim, chamado *Haingô*; e como não deixasse successor ao throno por se extinguir nelle a Real Familia, se levantáraõ doze pertendentes, e com outros tantos partidos se puzeraõ em armas para usurpar a Corôa; mas o menino, de que fallamos, que já entaõ era Homem, os venceo a todos, e fogueitados elles, alcançou por premio do seu valor o throno vacante, que occupou com applauso do povo por doze annos, com o nome de *Dinh Lien*.

Confesso, que não dou inteiro credito a esta historia; ainda que corre por bem averiguada nas Chronicas dos Reys de Tunkim. Não duvido, que nasçaõ especies hybridas do ajuntamento defordenado de animaes de diversas especies, como vemos nascer do burro, e egoa; do carneiro, e cabra; do lobo, e cadella, ou rapoza; do leaõ, e pardo; e de alguns outros, cujas castas não são muito distantes entre si. Também sei, que da communicação infame de individuo humano com algum bruto, seguem alguns, que pôde nascer creatura racional, e contaõ varios casos, que dizem ter succedido, com que o pertendem provar.

Com tudo, ou sendo o Pai a unica causa efficiente na producção do feto, como quer Aristoteles, ou sendo o Pai, e Mãi agentes parciaes, como melhor sentem outros, assim Phisicos, como Anatomicos, sempre fica a grande difficuldade, que de hum Pai bruto podesse nascer hum Filho racional, capaz de governar hum reino? Sendo isto contrario á praxe, que segue a natureza, em que se funda o axioma Filosofico *Bonum ex integrâ causâ, malum ex quocumque defectu*. Mas não se deve d'aquí inferir, que o agente masculino no nosso caso, fosse mono racional: antes sim, que sendo verdadeiro individuo da nossa mesma especie, se procurou encobrir a indecencia (talvez voluntaria) da Mãi d'aquelle Rey com a violencia inevitavel (talvez fingida) do bruto aggressor, na qual a superstição gentilica acharia mysterio.

Nos

Nos animaes hybridos , ou mixtos , que nascem de Pais de diversas especies , sempre se nota alguma semelhança mixta , e inadequada a respeito de cada hum dos Pais , de que procedem : como se vê no macho , e mula , que em parte são semelhantes ao burro , e em parte á egoa ; não só na fórma exterior do corpo , mas tambem nas inclinações , e propriedades internas : e o mesmo se observa regularmente nas outras castas de animaes hybridos. Pelo contrario no nosso caso o Rey *Dinh Lien* de Tunkim era Homem perfeito assim na fórma corporal externa , como interna racional : logo não era Filho do Pai bruto , que se dizia ; mas sim de Homem , que se occultava. Além de que , contando a Historia , que o aggressor lascivo fôra hum bugio branco , seria este ( quando fosse verdade ) de huma casta , que M.<sup>r</sup> de Buffon chama *Uanderu* , dos quaes os brancos são os maiores , e os mais libidinosos , e atrevidos a respeito de individuos da nossa especie. E assim , ainda que fosse certa a historia , nada provaria a respeito do *Gibbon* , e *Orang-Outang* , que se achavaõ innocentes no caso.

T. IV pag.  
314.

Pelo que , geralmente fallando , venho a concluir , que de hum tal commercio brutal não poderia regularmente sahir á luz algum effeito : que , se em algum caso raro tivesse effeito , seria este monstro irracional , seguindo a natureza do agente parcial de inferior especie *malum ex quocumque defectu* : que finalmente , se se podesse conhecer , que tinha nascido creatura racional , sem que o fossem ambos os Pais ( o que he quasi impossivel provar-se ) entaõ digo , que seria por huma excepção das Leis geraes da Natureza , unindo o Author d'ella a alma racional ( de que elle sempre he a unica causa efficiente ) áquella materia informe , e desproporcionada , preparada pelos Pais , hum racional , outro bruto. E ainda assim a figura do feto teria alguma semelhança com o bruto , de que procedia , quando o mesmo Author da natureza não tivesse tambem dispensado nesta parte : o que sem gravissimo fundamento não se deve presumir.

Mas fosse, como quer que fosse, a origem genealogica d'aquelle Principe raro de Tunkim, ninguem poderia pôr duvida, que elle fosse Homem; não tanto pela figura humana, que tinha perfeita, quanto pela Ethica, e Politica acertada do seu governo, que internamente se fundava em hum perfeito discurso, e no exterior se manifestava pelas acções, e pela falla.

Se este constitutivo effencial do Homem se desse igualmente a conhecer no *Homo Lar* do celebre Linneo, nem eu, nem pessoa alguma duvidaria admittillo na sociedade humana, ainda quando na figura corporal fosse mais disforme, do que he. Aonde quer que se veja a fórma racional unida a hum corpo organico, devemos confessar, que aquelle composto he Homem: e que o não he, logo que lhe falte o principio do raciocinio. De forte, que se Deos unisse, como he possível, a alma racional ao corpo de hum quadrupede, ou de huma ave, ou de hum peixe, seria aquelle composto estranho verdadeiro animal racional, que continha o principio discursivo, ainda quando o não mostrasse na falla; mas que poderia mostrar com alguma mudança dos órgãos necessários para fallar. E se os taes individuos exóticos fossem muitos, e da mesma symetria, poderia então formar-se d'elles huma nova especie de Homens, que actualmente não nos consta, que exista.

Pelo contrario, se a hum corpo semelhante ao do Homem, se achasse unida, ou combinada a fórma sensitiva dos brutos, seria o tal composto bruto irracional, e não Homem: como actualmente de algum modo se observa em alguns monos, e Satyros dos bosques, e nos Tritões, e Nereidas, ou Sereias dos mares, nos quaes se vê alguma semelhança, mas nenhum tem falla, ou discurso, como o Homem.

Aristoteles na excellente obra, que compoz dos *anim.* L. I. maes, para cujo solido exame concorreo a magnificencia do seu grande discipulo Alexandre, admittindo, que ha Homens

mens fylvestres, assim como ha bois, cavallos, cães, e outros animaes, tem por erro o dizer, que estes são de diversa especie, que os domesticos. E na verdade parece, que tem razaõ, quando em huns, e outros se acha a mesma conformidade de membros, sómente com aquella differença accidental, que pôde causar a diversidade de vida, e criaçãõ.

Taes eraõ os dous mininos, que no anno de 1661, foraõ descubertos entre huma manada de urfos, nos bosques de *Litwania*, dos quaes se lembra o celebre Linneo, e se refere no Diccionario Historico. Os caçadores os seguiraõ; Lin. *Syfl.*  
*Nat.* T. I.  
pag. 28. mas fugindo hum d'elles com os urfos, o outro, que parecia ter nove annos de idade, foi prezo pelos caçadores. Era mui alvo, e de perfeita fórma humana; ainda que mui feroz, defendendo-se a unhas, e dentes dos Homens, que o tomáraõ. Leváraõ-no ao Rey de Polonia, e sendo allí baptizado, e criado com grande cuidado, nunca fallou, nem se esqueceo de todo da sua antiga ferocidade. Tanto pôde a boa, ou má educaçãõ nos primeiros annos! Achaõ-se nos Authores outros casos de individuos da nossa especie, que pela criaçãõ, que tiveraõ na mais tenra idade entre brutos, ficáraõ depois de tal forte abrutados, que nem fallavaõ, nem davaõ indicios certos de discurso, permanecendo nelles as potencias da alma adormecidas, e em grande parte sem exercicio, assim como as tem o feto no utero, e algum tempo depois que nasce.

Porém naquelles, que não mostrando discurso, se não acha tambem huma total conformidade com a figura humana, devemos persuadir-nos, que são brutos, e não Homens: e isto he o que se acha nos *Orang-Outangs*, e nos *Gibbons*. O não terem cauda, e andarem em dous pés, he o que á primeira vista nos representa estes animaes mais semelhantes a nós com alguma admiraçãõ; mas cessará esta quando advertirmos, que tambem outras especies de bugios, e do genero *Lemur*, e *Vespertilio*, nascem naturalmente sem cauda:

da: e que os urfos, e os animaes chamados em Latim *Hiena*, a que os Cafres chamaõ *Cazumba*, andaõ muitas vezes em dous pés; ainda que mais ordinariamente em quatro.

As hienas faõ animaes mui ferozes, e mui manhofos, que appetecem muito a carne humana. Quando a luz do dia não he mui clara, ou de noite ao luar fahem a pafsear nos caminhos levantadas em dous pés: e como esta postura, e a côr preta, que tem, he a mesma dos Cafres naturaes da terra, enganaõ facilmente algum d'elles, até que chegando mais perto o apanhaõ, e o comem. Tambem para este fim se valem dos gemidos, e choro humano, que fingem com propriedade. Plinio acrescenta, que as hienas fallaõ algumas palavras, que tem ouvido aos pastores, e chamaõ pelo nome de algum d'elles, que acudindo cahe no feu poder, e perde a vida; mas d'esta notavel circumstancia não tenho certeza.

Plin. L. 8.  
cap. 30.

Temos visto como de ambas as novas especies de Homens, que nos inculca o celebre Linneo, nem ha fundamento para dizer, que faõ racionaes, nem adequada semelhança no corpo com a nossa especie. Como logo se ha de dizer que faõ Homens? Na mesma tal qual semelhança não concordãõ as relações dos viajantes. Donde se póde inferir, que ou elles differaõ mais do que viraõ (como ordinariamente succede na relação de cousas maravilhofas), ou que não sendo os objectos das relações em si muito semelhantes, não podem formar hum todo, ou huma especie muito semelhante ao Homem.

Não entraõ nesta conta os Troglodytas, que, como temos visto, sempre fôraõ da nossa mesma especie; ainda que Homens agreltes, e barbaros, assim como eraõ os Tapúias do Brasil, quando fôraõ descubertos pelos Portuguezes. Assim aquelles, como todas as mais nações, que povoãõ o Universo, tiveraõ principio, e descendem todos do mesmo Pai. Isto nos ensina a Fé claramente por bocca do Apostolo das gentes: *Fecitque ex uno omne genus Hominum in*  
*habi-*

Act. Ap.  
cap. 17. v.  
26.

*habitare super universam faciem terræ.* E he muito de notar, que tendo o Santo Apostolo proposto esta verdade na mais grave assembléa de sabios da Grecia, qual era o Areopago de Athenas, não achou contradicção neste ponto, assim como achou no da resurreicção, que a razão natural não percebe, nem a experiencia ensina.

Tendo pois todos os Homens procedido do mesmo principio em Adam: sendo todos illustrados com aquella luz celeste, e eterna do raciocinio, como sentiraõ Socrates, e Plataõ: tendo participado todos da Mente Divina, como ensina a Escola de Pythagoras, na alma racional immortal: sendo todos incluidos no mesmo genero com a Divindade, como advertio S. Paulo aos Areopagitas *Ipsius et genus sumus*: não seria absurdo associar, e confundir a nossa especie no mesmo genero com os brutos? He possível, oh Homem, exclama o Filosofo, e Orador Romano, que tendo-te Deos, ou a Natureza nossa mãi dado huma alma, entre todas as cousas a mais excellente, e a mais Divina, te deixes tu cahir em tal desprezo, e em tal vileza, que não conheças a grande differença, que ha entre ti, e os brutos? *Sive Deus, sive Mater rerum omnium Natura dederit animum, quo nihil est præstantius, nihil Divinius: sic te ipse abjicies, et prosternes, ut nihil inter te, et quadrupedem aliquam putes interesse?*

*Act. Ap.  
Ibi. vers. 28.*

*M. T. Cicerone  
1º Parad. 1º*

## DESCRIPÇÃO BOTANICA

*Das Cúbebas Medicinaes.*

PELO P. JOAÕ DE LOUREIRO.

## § I.

Lida em 13  
de Maio de  
1784.

A Planta, que produz as *Cúbebas*, não foi conhecida pelos Medicos, e Botanicos antigos: nem até agora tiverão d'ella verdadeiro conhecimento os modernos. O que se usa na Medicina he o seu fructo, que são lumas bagas finhas pequenas, redondas, e pretas, mui semelhantes á pimenta, as quaes costumão trazer huma cauda tenue, que he o pedunculo do fructo, em razaõ do qual se chama em algumas Farmacopéas *Piper Caudatum*, ainda que o seu nome mais usual he *Cúbeba*.

## § II.

No Livro XVII. da Geographia de Strabo se faz menção de hum fructo, chamado *Corsium*, semelhante á pimenta, que por esta semelhança se poderia suspeitar, que fossem as *Cúbebas*, se o mesmo Author não declarasse, que este fructo nascia no Egypto, aonde não costumão nascer as *Cúbebas*. Plinio no Livr. II. Cap. 7. da Historia Natural diz com mais propriedade, que se acha na India huma droga semelhante aos grãos de pimenta: a qual segundo o parecer de Julio Cesar Escaligero na exercitação 146, são as nossas *Cúbebas*. E na verdade lhes compete bem a estas a semelhança do fructo, e o lugar do nascimento. Porém assim o nome de *Garyophyllon*, como o singular cheiro, que lhes dá a estimação, segundo Plinio, são mais proprios

prios dos Cravos da India, que das Cúbebas. *Est etiam in India* ( diz elle no lugar citado ) *pipcris grani simile, quod vocatur Garyophyllon, grandius, fragiliusque. Advebitur odoris gratia.* E por isso o douto Salmasio julgou, que Plinio neste lugar fallára do Cravo da India, e não das Cúbebas.

## §. III.

D'ellas fallou Camelli no volume XXIV das Transacções Filosoficas da Sociedade Real de Londres, e Clutius no Tractado das Plantas Exoticas. Como tambem varios Dictionarios, o da Historia Natural, o Encyclopedico, o Inglez das Artes e Sciencias, e o Francez do Comercio. Neste diz M.<sup>r</sup> Savary ( como tambem dizem outros ), que as Cúbebas nascem de huma planta sarmentosa, que quer dizer, huma planta trepadeira, que com os seus ramos se encoستا ás outras como a vide, ou como a hera. Porém isto he enganoso; porque a mim me consta ser huma arvore grossa, e firme, cujos ramos se elevaõ por si mesmos sem dependencia de outra.

## §. IV.

Esta droga Medicinal costuma nos nossos tempos ser conduzida da Ilha de Java para a Europa nos Navios da Companhia Hollandeza. E admira-me como esta Nação não só industria no Comercio, mas tambem no adiantamento das Sciencias Naturaes, e principalmente da Botanica, como nos testificaõ as grandes obras de Van-Rheede, Rumphius, Burmman, Marcgrave, e outros, não tenha até agora dado inteira noticia ao Orbe Litterario da util planta das Cúbebas, que nasce nos seus dominios Orientaes.

## §. V.

Novamente o clarissimo Bergius, digno discipulo do gran-

grande Linneo, falla do conhecimento, e uso das Cúbebas no livro, que doutamente escreveu da *Materia Medica*, e deu á luz em Stockolmo no anno de 1782. Mas como até agora não era conhecida a classe, ou genero, a que pertence este simples vegetal, fallou d'elle sómente o necessario para a praxe Médica debaixo do nome, e genero *Piper*, accommodando-se nisto á sua *Farmacopéa Nacional Sueca*, que tracta d'elle debaixo do nome de *Piper Caudatum*.

## §. VI.

Esta planta nasce não sómente na Java, mas tambem em outras partes da Asia. Eu a ví muitas vezes em diversos lugares de Cochinchina, e a tive por alguns annos plantada, e florecente na minha horta. Chama-se na lingua vulgar d'aquella terra *Cay Mang Tang*: e no idiôma, de que lá usa a Gente de Letras se diz: *Tat Truong Nhu*. Tendo eu bem examinado a sua flor, achei ser hum novo genero Botanico pertencente á *Emeandria Monogynia*, que no systema sexual de Linneo he a 9.<sup>a</sup> classe, e a mais rara em todo o Reyno Vegetal.

## §. VII.

O seu Calyx comum, que he de côr branca, e deciduo, consta de quatro folinhas redondas; iguaes, concavas, e patentes, que dentro em si contém cinco floresinhas, e cada huma d'estas não tem outro calyx, ou perianthio proprio.

## §. VIII.

A Corolla de cada florinha consta de seis petalos semelhantes, mas desiguaes na grandeza, quasi redondos, e patentes, premorsos na extremidade do limbo. O Nectario consta de seis glandulas oblongas, e inflexas.

## §. IX.

## §. IX.

Os Filamentos são nove, mui breves, pegados ao receptaculo: trez dos quaes, os mais internos, se levantão perpendicularmente; os outros seis tem posição obliqua, encostados á Corolla: nenhum d'elles tem annexo algum corpusculo, ou appendix. As Anthéras são grandes, compréssas, e quasi quadradas: cada huma tem quatro Loculos oblongos, dous de cada lado, que se oppoem decupadamente no mesmo plano.

## §. X.

O Germen he redondo, superior ao receptaculo. Não tem Stylo. O Stigma he simples.

## §. XI.

O Pericarpio he huma baga pequena, e globosa, com seu pedunculo proprio, delgado, e compridinho.

## §. XII.

A semente he só huma, tambem globosa. Nascem esta flor, e fructo em huma arvore hortense, mas não rara, de mediana grandeza, e mui copada. As folhas são pequenas, lanceoladas, integerrimas, planas, lisas, sem nervos, alternas, petioladas, de côr verde alegre, e luzente. A flor he branca, e lateral, com pedunculos simples, quatro, ou cinco juntos no mesmo lugar. A baga he mui redonda, vermelha escura, quando madura, pouco maior que a pimenta, e liza, como esta, que só depois de secar fica engilhada, e crespa.

## §. XIII.

As Cúbebas são mais aromaticas , que a pimenta , com menos ardor , e acrimonia. Como o seu cheiro , e gosto he agradável , usão d'ellas verdes os naturaes da terra para temperar alguns guizados , principalmente de peixe. Depois de maduras , e seccas , se fazem mais desagradaveis , e tambem mais oleosas. Eu tenho usado na Medicina do seu oleo , que he de côr verde escura , pouco mais grosso , que o azeite ordinario , e com hum cheiro penetrante , o qual tirei por expressão , quasi a sexta parte do pezo. Não tirei o oleo effencial , por me não ser necessario , e se tirar com mais trabalho , em menos quantidade. Mas tendo visto como estas bagas são muito oleosas , quando recentes , julgo , que tambem por distillação se poderá haver maior copia d'elle , do que conseguio M.<sup>r</sup> de Baumé , que de treze libras e meia de Cúbebas houve sómente duas onças , e huma drachma : talvez por terem já alguma corrupção , a que são mais fogeitas , que a pimenta , por serem menos folidas.

## §. XIV.

A virtude medicinal das Cúbebas he calefaciente , cefalica , e estomachica. Usa-se d'ellas com bom successo na Vertigem , e tambem em alguns affectos paralyticos , que tem a sua origem na cabeça , ou no estomago. Daõ-se em cozimento , ou substancia na dose de meia drachma : e o melhor methodo nas doenças chronicas he tomallas em pilulas.

## §. XV.

São tambem de natureza Apoflegmatizantes , que pu-  
 xão , e evacuaõ a flegma brandamente , ou pelo nariz for-  
 madas em errhinos , ou pela bocca em masticatorios , e gar-  
 garif-

garísimos. Nesta fórma aproveitaõ em muitas doenças da cabeça : naõ porque sejaõ purgantes do cerebro , como diziaõ os antigos , por falta de cabal noticia da Anatomia ; mas porque estimulando a membrana pituitaria de Schneider purgaõ , e fazem fahir das suas glandulas a materia pituitosa , que o sangue arterial allí tinha depositado , antes de subir ao cerebro.

### §. XVI.

D'este modo podem tambem aproveitar para o exercicio mais prompto da Memoria , que alguns dizem se fe-gue do frequente uso das Cúbebas. Mas quanto á virtude alexiteria contra os venenos , que outros lhes attribuem , naõ tenho até agora achado fundamento para o affirmar.

## CONSIDERAÇÃO PHISICA, E BOTANICA

*Da planta Aerides, que nasce, e se alimenta no Ar.*

PELO P. JOAÕ DE LOUREIRO.

..... *Quod nostri Calum memorant, Graeci perhibent æthera:  
Quidquid est hoc, is omnia format, animat, auget, alit, scit,  
Sepelit, recipitque in se omnia, omniumque idem est pater.*

Ex Pacuvio in *Chryse*.

Lida em 4  
de Julho de  
1785.

**T**Rago hoje a noticia de huma planta verdadeiramente rara, e exotica; não tanto por ter a sua origem nas Regiões remotas da China, e Cochinchina, quanto porque se cria, florece, e vive fóra do elemento natural dos Vegetaes, que he a terra. No elemento do fogo imaginá-raõ os antigos, que podia viver a Salamandra, e tambem huma casta de insectos em fórmula de moscas, chamados *Pyraustas*, dos quaes refere Plinio, que nasciaõ nas fornalhas, em que se fundia o bronze na Ilha de Chypre. E se isto se verificasse naquelles viventes sensitivos, não haveria difficuldade para o admittir tambem nos vegetativos; mas a verdade he, conforme a experiencia tem mostrado, que a Salamandra só vive por breve tempo nas brazas, em quanto despede de si hum humor viscoso, com que apaga o fogo; mas se affoprando fomentamos a chamma, se reduz brevemente a cinzas como qualquer outro vivente. E no que toca ás moscas *Pyraustas*, todos conhecem já ser huma fabula sem fundamento algum em boa razaõ.

Plin. *Hist.*  
*Nat.* L. II.  
cap. 36.

Helmont.  
L. *Mixt.*  
*Elem. fi-*  
*gment.* n. 20.

O elemento da agoa he mais proprio, e ainda necessario para conservar a vida, ou vegetal, ou animal. O celebre Chymico Van-Helmont (segundo elle mesmo refere) plantou hum pequeno salgueiro em hum vaso de terra, e

ten-

tendo cuidado em o regar sómente com agoa pura por muito tempo, creceo o salgueiro tanto, que arrancando-o da terra pezou 169 libras, conservando a terra a mesma quantidade, e pezo, que tinha quando o plantáraõ. Donde quer mostrar Van-Helmont, que toda a nutrição, e grande augmento d'aquella planta foi tirado da agoa, e não da terra.

Mas seja qual for o sentir dos Filosofos nesta materia, o que nos mostraõ os sentidos, e o de que ninguem póde duvidar, he que todos os corpos viventes, ou sejaõ sensitivos, ou vegetaes, se compoem de partes humas fluidas, e outras solidas. Pelo que, assim a terra, como a agoa, ou puras, ou mixtas, e combinadas, lhes saõ ambas necessarias para a sua producção, nutrição, e conservação; porém com esta notavel differença, que huns só podem viver na terra, e não na agoa, e d'estes he o maior numero, que quotidianamente estamos vendo: outros só se podem conservar na agoa, como saõ entre os sensitivos os peixes, e entre os vegetaes algumas plantas marinhas, como o *Sargaço*. Finalmente ha outra tereceira Classe amphibia, e indifferente, que participa da natureza de ambas, e póde natural, e comodamente viver assim na agoa, como na terra. D'estes entre os animaes he o *Hyppotamo*, o *Crocodilo*, e tambem algumas especies de serpentes. Das plantas, além de outras, he o *Convolvulus Reptans* de Linneo, a que Rumphio chama *Olus Vagum*, o qual he comida mui usual na India, e semelhante aos nossos espinafres; porém com esta rara propriedade, que ou plantado na terra, ou lançado em alguma lagoa, e nadando com as raizes sobre a agoa, cresce, florec, e se multiplica com a mesma facilidade.

Rumph.  
Amb. L.IX.  
c. 41. tab.  
155.

Do que se não deve inferir, que alguns d'estes vegetaes vivem, e se alimentaõ sómente das partes solidas da terra, e outros sómente das liquidas da agoa; pois os terrestres, ainda nas terras mais áridas, recebem o liquor do orvalho, que os refresca, e sustenta: e os aquaticos recebem

tambem o alimento solido da terra, que do fundo, e praias do mar, e das lagôas se levanta com as ondas, e se acha sempre, ainda na agoa, que nos parece mais pura, como tem examinado os Chymicos, e o testifica o celebre Roberto Boyle, dizendo, que sempre na distillação das agoas se acha algum sedimento de partes solidas.

R. Boyl. de  
Ortu for-  
mar. p. 259.  
&c.

Beaumé

Chym. T.I.

P. 73.

Conhecido pois o não haver repugnancia, em que as plantas vivaõ, e se alimentem da agoa, resta-nos averiguar se a ha, em que vivaõ sómente do ar? A planta, de que eu hei de fallar, nasce, recebe a nutrição, e multiplica-se no ar, vivendo nelle perenemente, e com augmento successivo, e constante, totalmente separada da terra, e da agoa. E seria innegavel o argumento *ab actu ad potentiam* para quem conhecesse claramente a sua existencia. Mas como julgo, que em Europa não he conhecida, he me preciso mostrar, que não repugna; para que não pareça inverisimil, que existe.

O elemento do ar pôde-se considerar dividido em duas regiões, huma mais inferior, a que chamamos *atmosfera*, a qual he hum ar pezado, e denso, como mostraõ os experimentos feitos na maquina pneumatica, e no barometro. Esta regioã se estende da superficie da terra para cima, por espaço de 15 legoas Francezas, segundo o computo mais ordinario, e conforme os calculos do grande Astronomo de Inglaterra Halley: no que todavia não pôde haver cabal certeza. Depois d'esta, segue-se outra regioã de materia mais liquida, leve, e pura, a que por distincção chamamos *Æther*: e Ovidio lhe chama tambem *Ceo*, referindo mais como Naturalista, que como Poeta, o como Deos separou estas duas regiões, que cercaõ o globo da terra: *Et liquidum spisso secrevit ab aere Cælum*: e continuando a dizer, como sobre o ar espesso, e grave dera o Author da natureza lugar ao *Æther*, ou *Ceo*, que não tem pezo algum, e he puro de todas as fezes terreas:

Ovid. Me-  
tam. L. I.  
vers. 23.

Ibi. vers. 67.

*Hec superimposuit liquidum, et gravitate carentem  
Æthera, nec quidquam terrenæ fœcis habentem.*

Nes-

Nesta regiaõ superior do ar, no *Æther* leve, e puro confesso eu, que não pôde presfistir, e muito menos alimentar-se, e crescer vivente algum: assim como a experiencia tem mostrado, que nenhum vegetativo, ou animal pôde viver, no que impropriamente chamaõ *vacuo* da maquina pneumatica, que na realidade não he *vacuo*, mas sim hum ar mais puro, e leve, que allí ficou depois da extracção das partes mais crassas feita pela maquina. Este ar denso, e pezado, que respiramos, he ( diz Boerhaave no I. Tomo dos Elementos da Chymica ) huma mistura confusa de cor-<sup>Elem.</sup>pos miudos de todo o genero, que constituem hum todo,<sup>Chym T. I.</sup> composto de partes diversissimas. No ar se achaõ divididos<sup>de Aere</sup> em tenuissimos corpusculos, não só a terra, fogo, e agoa, mas todos os saes, oleos, espiritos, e exhalacões vegetaes, animaes, e mineraes, que ha na terra: e o que he mais de admirar, até o mesmo ouro com ser o corpo mais pezado, que produz a natureza, se acha tambem em particulas subtís elevado ao ar, como pela Chymica se tem averiguado. De sorte, que tudo o que serve de nutrimento ás plantas, tudo o que dá alimento aos animaes cá na terra, tudo se acha tambem recolhido, e conservado neste cellciro universal da natureza a atmosfera.

Boerh. ibi  
pag. 229.

Sem duvida, que notando os antigos a abundancia de toda a calta de corpos, que se acha semeada pelo ar, não duvidáraõ annuir, a que d'elle podia viver o Cameleaõ, o qual he hum pequeno lagarto, de que o celebre Linneo<sup>Lin. Syff.</sup> fórma a segunda especie do genero *Lacerta*. Depois não<sup>Nat. T. I.</sup> vendo os mesmos antigos, que o Cameleaõ comia coufa<sup>pag. 364.</sup> alguma, e observando, que estava sempre com a bocca aberta recebendõ o ar, com o qual todo o seu corpo, humas vezes se mostrava cheio, e inchado, outras lançando o ar fóra, se via attenuado, e magrissimo, assentáraõ, que na realidade não tomava outro alimento mais, que o ar. Assim deixáraõ escrito com outros Authores Gregos Theophrasto, e Plinio com os Latinos. O Cameleaõ, diz este,

Plin. L:  
50- VIII. c. 33.

*Solus animalium nec cibo, nec potu alitur, nec alio, quam aeris alimento.*

Porém os modernos mais exactos nas suas observações, sem negarem a possibilidade, negão o facto. Na Academia Real das Sciencias de Pariz se examinou com diligencia, e se achou, que o Cameleão come alguns insectos, como são as moscas, as quaes apanha com a lingua, que he mui subtil, e ligeira, do comprimento de ametade de todo o seu corpo, com a qual despedida como huma seta caça a mosca, e a engolle inteira. Isto se confirmou com mais evidencia abrindo o Cameleão, em cujo estomago, e intestinos se achárao as moscás, e tambem nas fezes sinaes d'ellas, com que se mostrou claramente, que o Camelcaõ não vive sómente com o ar; mas de nenhum modo se concluiu, que elle não possa viver, e viva muito tempo só com elle.

Plin. L. VIII. c. 36. Dos urfos do Norte deixou escrito Plinio, e outros, que no tempo do inverno se recolhem nas suas covas, aonde passaõ alguns mezes sem tomar alimento algum: e assim diz tambem dos ratos Ponticos, e o observou o excellente Medico, e Poeta Ausonio na sua Ephemeris:

D. Mag.  
Auson.  
Ephemeris  
p. 38.

*Dormiunt glires hyemem perennem,  
Sed cibo parcunt.*

Hall. præ-  
lect. in  
Boerb. n. 55.

O mesmo refere Linneo das Marmotas dos Alpes, que passavao o inverno em profundo sono, e por conseguinte sem comer. O douto Haller nos Commentarios, que escreveu sobre a *aconomia animalis* do seu grande mestre Boerhaave diz, que os urfos, e algumas especies de *Mustella*, e *Vulpes* se recolhem a dormir no principio do inverno, e continuaõ sem despertar até á entrada da primavera: e ainda ha quem affirme, que despois d'esta rigorosa, e prolongada abstinencia sahem das suas covas mais fortes, e mais gordos.

Pois se os urfos, sendo animaes taõ corpulentos, e taõ vorazes, podem passar muitos mezes sem comer, porque o não faraõ mais facilmente os Cameleões, sendo taõ tenues, e que

e que rara vez se observa, que comaõ? E se huns, e outros não comem, como se sustentaõ, e crescem sem alimento? He absolutamente certo, que nenhum vivente pôde naturalmente viver sem se nutrir. A vida nos animaes, conforme a definição do engenhoso Medico Escoccez Pitcarne, consiste no movimento intrinseco, a que chamamos *circulação do sangue pelas veias, e arterias*: e nas plantas em hum movimento do succo nutricao pelos subtis canaes, que nelas formou a natureza, com analogia ao movimento do sangue nos animaes, segundo observou o perspicaz Malpighi. Ora com este continuo movimento, que não pôde cessar, sem cessar a vida, se exhala continuamente pela superficie dos corpos huma grande quantidade de materia em effluvios pelos vasos exhalantes, que segundo a anatomia de *Ruischio* procedem sómente das extremidades das arterias.

O celebrado Sanctorio, a quem pela utilissima obra; que nos deixou da perspiração insensivel, fundada em observações staticas, deo *Boerhaave* lugar junto a Hippocrates, e mui superior a todos os Commentadores de Galeno, diz, que a materia da perspiração, que em hum dia se exhala em vapores do corpo humano, chega á quantidade de 5 libras, na supposição que o sustento d'aquelle dia em comida, e bebida tenha pezado 8 libras: vindo a ser por este computo muito maior a evacuação, que a natureza faz pelos poros, do que todas as outras juntas. E assim fica sendo impossivel, que ainda faltando estas nos animaes, que dormem continuamente sem comer, nem beber por alguns mezes, possaõ estes viver, se não receberem outra casta de alimento; pois cada dia perdem muita substancia pela transpiração, sem adquirirem alguma pelo pasto. Donde se vem a conhecer, que a substancia nutritiva, com que se refazem, da que quotidianamente exhalaõ, e perdem, não pôde vir de outra parte senão do ar, o qual recebein pela bocca, e pelo nariz na inspiração, e pelos infinitos poros, ou boccas das veias absorbentes, que se achaõ em todo o am-

Pitcarne  
Elem. Med.  
defin. 1.

Sanct. Aph:  
4. apud  
Goster de  
Perspir. in-  
sensib.

bito do corpo. D'allí se introduz nas veias maiores com o fangue, que purificado, e subtilizado nas glandulas, e nos bofes passa ao coração, do qual por mcio das arterias se reparte, e communica para alimento, e vida de todo o corpo.

Este he o modo, e o caminho, pelo qual se communicão ordinariamente a peste, e enfermidades contagiosas, como bem conhecco, e ensinou o douto Medico Hollandez Gorter: *materiam pestilentialem aeri mixtam misceri sanguini constat*. E este he tambem o mcio, por onde com hum ar limpo, e saudavel se restauraõ as forças de alguns doentes, a quem de outra forte naõ póde aproveitar a Medicina.

Gorter de  
Perisp. in-  
fus. c. 13.  
n. 19.

Nos tempos mais antigos antes da vinda de Christo, já era conhecida esta verdade; pois o sabio, e prudente velho Hippocrates ensinou aos da sua cícola, que toda a superficie do corpo humano transpira, isto he, segundo a exposiçaõ de Haller, que em todos os membros, e em todas as partes do corpo, internas, e externas, se achaõ vasos exhalantes, e inhalantes. Pelos exhalantes perde o animal em effluvios a substancia, que tinha adquirido: e pelos inhalantes a restaura, attrahindo a si as partes aptas para a nutriçaõ, que se achaõ espalhadas no ar.

Hall. pre-  
lect. n. 87.

Este admiravel mechanismo da natureza, que he certo se acha nos animaes, he tambem indubitavel, que o ha nas plantas: e ainda nestas o suppoem Boerhaave, ou mais necessario, ou mais conhecido, quando d'ellas faz parallelo para os animaes, dizendo, que assim como as plantas attrahem a si o nutrimento liquido do ar pelos canaesinhos absorbentes, da mesma sorte os animaes: *ut plantæ bibulis superficiei fistulis ex aere hauriunt applicatos humores, ita et animalia*. E pouco mais acima tinha dito, que *supposto a raiz da planta seja o orgaõ mais ordinario, por que ellas costumão receber o alimento, tambem o recebem pela superficie de todo o corpo, conseguindo a nutriçaõ por meio das boccas attrahentes, que estaõ dispostas em ordem mui densa por toda a superficie,*  
com

Boerh. El.  
Chym. T. I.  
pag. 32.

Ibi pag. 28.  
de radice  
veg.

com as quaes chupaõ o humor do pabulo, e o vaõ introduzindo pelos canaesinhos, que o distribuem a todo o corpo da planta. No que fundado o mesmo Author affirma, que com razãõ se podem comparar estes vasos, ou canaesinhos dos vegetaes ás veias lacteas, mesentericas, e absorbentes dos animaes.

Eu considerando este modo admiravel da nutrição das plantas, e ouvindo dizer, que huma mui vulgar da India, a que Linneo chama *Cotyledon Laciniata*, se conservava no ar arrancada da terra, quiz certificar-me com a experiencia. Pendurei-a por hum fio no ar livre de hum alpendre, tendo primeiro examinado o seu pezo. Continuou por muitos dias na mesma fórma, e frescura, e ainda brotando algumas folhas novas; porém depois foi diminuindo no pezo, que eu observava com frequencia, de sorte, que passados alguns mezes não pezava já ametade, ainda que na apparencia se mostrava verde; pelo que vim a concluir, que a *Cotyledon Laciniata* não se nutria adequadamente do ar, e que aquella vida, que parecia conservar, era huma vida attenuada com huma atrophia, e marasmo, em que por fim faltando-lhe o alimento externo necessario se conservava violenta, consumindo-se a si mesma: assim como aquelle, de quem falla o Poeta, que obrigado de huma fome desesperada se alimentava de seus proprios membros: *Minuendo corpus alebat*.

Lin. Syst.

plant. G.

628. sp. 6.

He mui differente a vida, e mui propria a vegetação da planta *Aerides*, que agora vou descrever, a qual pendurada por hum fio no ar livre, vai sempre crescendo assim na extenção, como no pezo.

O Calix he huma pequena spatha, ovada, monoflora, e persistente.

A Corolla são cinco petalos, ovados, planos, expansos, e quasi iguaes.

O Nectario consta de duas folhas horizontaes: d'estas a inferior he oblonga, carnosa, hum pouco concava em fórma de barquinha: a superior cobre, e fecha a inferior,  
e de

e de hum lado se levanta , encurvando-se para cima em fôrma de tubo subulado : o outro lado se dilata horizontalmente cortado em trez lacinias , duas das quaes são obtusas , e verticalmente parallellas ; e a terceira , que fica no meio , he de figura conica.

Os Stamines são dous filamentos , breves , e elasticos , pegados á extremidade interna da folha inferior do nectario. As Antheras são em fôrma de lentilha , simples , e cobertas.

O Pistillo consta de hum Germine trigono , renue , e curvo , que sustenta a flor. Não tem Stylo. O Stigma he huma pequena concavidade , junta á base dos Stamines.

O Pericarpio aborta.

A Raiz he composta de bulbos lineares , simples , compridos , e enlaçados. O Caule he redondo , grosso , simplicissimo , igual , inflexo , e comprido de hum pé , ou mais. As folhas são grandes , lizas , crassas , reflexas , compridas de oito pollegadas , e largas de huma , com os lados parallelos , e a extremidade obtusa , e emarginada : com os petiolos curtos , e vaginantes. A flor he pallida , maior que hum jasmim , de vista agradável , e cheiro mui suave. Nasce em ramos simples , lateraes , e reclinados , quasi do mesmo comprimento , que as folhas.

Esta planta he de origem agreste , que nos bosques costuma nascer parasitica , pegada aos ramos das arvores ; pois já se vê , que sendo pezada de huma , e mais libras , era impossivel ficar suspensa , no ar , sem se segurar de algum modo. Trazida dos bosques , se pendura por huma cordinha no ar livre , ou se mete em hum cestinho de qualquer materia , porém tecido com aberturas por todas as partes , e suspenso da mesma sorte por hum cordel. Nesta postura , sem se lhe lançar terra , agoa , ou alguma outra couza , vai continuamente crescendo , ainda que lentamente , e florece no Outono. Allí mesmo se multiplica , gerando cada anno novos filhos , com raizes novas , e novas folhas , que separando-se da planta mãe , e suspensos na mesma fôrma ,

ma, vão todosy egerando, florecendo, e multiplicando-se por largos annos, sem receberem outro alimento, que do ar.

Eu tendo achado nas especies, e systema das plantas de Linneo huma planta, a que elle chama *Flos Aeris*, e he a segunda especie do *Epidendro*, de que he Author Kempfer, e diz, que nasce na Java, com o caule escandente, poucos ramos, as folhas lanceoladas, e os petalos da corolla lineares em figura de aranha, suspeiiei; em razaõ de lhe chamar *Flor do ar*, se seria a nossa *Aerides*, que na lingua de Cochinchina se chama *Phaong Lon*, que quer dizer *flor do ar*; mas adverti logo, que he totalmente diversa, como se póde ver combinando o habito de ambas as plantas, de que se fórma a differença especifica: e tambem a fórma da mesma flor, que na nossa em nada se parece com a aranha, nem nos petalos, nem no nectario: e muito mais, que este na nossa não he turbinado, caracter effencial do *Epidendro* de Linneo.

Na nossa planta *Aerides*, não sei, que até agora se tenha achado virtude alguma; mas nem por isso se póde dizer, que he inutil o seu descobrimento, e exame. Por elle se vê claramente, que hum vivente corporeo póde conservar-se por largos annos sem tomar outro alimento, que o dos effluvios do ar, que o cercaõ. Pois não será util este exemplo para salvar a vida de hum homem, que apertado de huma esquinencia, ou outro semelhante accidente, não póde engollir mantimento algum? Em tal caso, porque não pereça o enfermo desfallecido, póde-se-lhe acodir não só com clysteres nutritivos, cujos vapores entrem nas veias lacteas, ou com os cheiros de guizados substanciaes, mas tambem com fatias de paõ enfiadas em bons caldos temperados com vinho, e noz muscada, que applicadas exteriormente de ambas as partes na regiaõ do estomago, introduzaõ nelle as partes mais subtis do alimento por meio dos vasos inhalantes.

E para que alguem não julgue ser isto huma mera es-

peculação, póde consultar as obras do Doutor Haller, Phisico Mór da Rainha de Gram-Bretanha, e digno discipulo do grande Boerhaave, o qual nas Prelecções sobre a economia do animal affirma, ter-se já mostrado em Inglaterra, que hum homem por meio de fomentações applicadas exteriormente, póde receber tanto alimento, quanto lhe baste para sustentar a vida: *In Britania demonstratum est hominem de solâ materia extrinsecus per fomenta applicatâ tantum sibi sumere, ut vitam utcumque sustinere possit.*

Haller *Prælect.* n. 1021.

## M E M O R I A

*Em que se dá noticia de diversas especies de abelhas, que dão mel, proprias do Brasil, e desconhecidas na Europa.*

POR VICENTE COELHO DE SEABRA.

A Família dos Insectos, que hum grande numero de homens tem contemplado como insignificante; inutil, e mesmo superflua, he aquella, que sendo observada pelos olhos de Swammerdam, Maraldi, Reaumur, Linneo, Bomare, &c. he summamente necessaria, e util: e me faz dizer com Plinio: *In his tam parvis, atque tam nullis quæ ratio! Quanta vis! Quam inextricabilis perfectio!* Para prova disto basta lançarmos os olhos sobre as abelhas, e examinarmos, como estes grandes observadores, as suas funcções, o seu governo, a sua industria, a arte dos seus trabalhos, e a utilidade em fim, que nos resulta do seu mel, e cera. Eu me não demorarei em narrar cada huma d'estas cousas, bem descriptas pelos Authores acima referidos, e tratadas profundamente por Bomare nos seus Diccionarios de Historia Natural. O meu objecto he sómente dar noticia de algumas especies de abelhas melliferas, proprias do Brasil, principalmente da Capitania de Minas geraes, que não fôraõ ainda descriptas pelos Naturalistas da Europa.

Linneo no seu *Systema Naturæ*, mete as abelhas na ordem *Hymenoptera*: e no genero *Apis*, sómente faz menção da especie *Apis mellifera pubescens, thorace subgriseo, abdomen fusco, pedibus posticis glabris, utraque margine ciliatis*. Esta he justamente a abelha, que se cultiva em Portugal, e quasi toda a Europa. Mas além d'esta ha ainda na mesma Europa outras muitas abelhas melliferas, que Bo-

ma-

mare refere no seu Diccionario de Historia Natural, como são abelhas *bourdons*, abelhas solitarias, abelha fura-páos, abelhas *maçomes*, abelhas mineiras, e outras, as quaes todas comprehende debaixo do nome de Abelhas *Villageoises*.

A maior parte d'estas abelhas, por não dizer todas, são desconhecidas no Brasil. A mesma abelha vulgar *Apis mellifera* de Linneo, não he allí vista. Ha porém naquelle Paiz muitas outras differentes especies de abelhas, que dão mel, e a maior parte tambem dão cera, ainda que differente entre si, e differente da cera da abelha vulgar da Europa. Sendo o Brasil tão fertil d'estes uteis insectos, os seus habitantes não cuidão na sua cultura. As colmeias são allí desconhecidas: e quando a necessidade os obriga, servem-se das colmeias, que as mesmas abelhas fazem dispersamente, aonde a natureza lhes offerece lugar commodo. A cera he muito abundante em algumas; porém antes querem comprar por hum preço carissimo a que da Europa, e da Africa lhes vai, do que cultivar a que a natureza tão liberalmente lhes dá. Tanto póde o ocio! E tal he a desgraça de hum Paiz abundante, onde a industria he desconhecida! O mel de algumas he superior ao mel Portuguez. A estrutura das cascas, e dos favos de mel he diversa, nas diversas abelhas. Eu vou appresentar na Memoria, que hoje offereço á Academia huma taboa Synodica d'estas abelhas; onde do modo possível darei huma idéa das suas differentes especies, e da utilidade, que se póde tirar de cada huma. Para maior clareza faço quatro divisões d'estas abelhas. Na primeira comprehendendo aquellas, que são desarmadas, isto he, que não mordem, e são destituidas de aculeo, e humor caustico no anus: aquí entraõ seis especies *Urusi*, *Mumbuca*, *Mandasaia*, *Jatai*, *Mendori*, *Bate-Chapeo*. Na segunda divisão entraõ aquellas, que não mordem, nem tem aculeo, mas lançaõ pelo anus, segundo parece, hum humor caustico, o qual sendo lançado sobre qualquer parte do nosso corpo, serve de hum estimulante mais, ou menos activo: com elle se defen-

defendem. Aquí entraõ trez especies *Caga-fogo*, *Jandatra*, e *Tubiba*. Na terceira divisaõ entraõ aquellas, que naõ mordem, mas offendem á maneira das vespas com hum, ou mais aculeos envenenados, que tem junto ao anus. Comprehede duas especies *Marimbondo vulgar*, e *Marimbondo In-chú*. Na quarta em fim comprehendemos aquellas, que sómente mordem: tal he a *Arapúa*. Eu me sirvo dos seus nomes mais vulgares.

Abelhas mellíferas proprias do Brasil.

Divisaõ.

1.<sup>a</sup> *Desarmadas: destituidas de aculeo, e humor caustico, e naõ mordem.*

Especies

I. *Urusú*: abelha grande: côr avermelhada: thorax, e cabeça manchados com estrias negras.

*Urusú pé de páo*: faz sua casa dentro dos páos, e ordinariamente junto á raiz: a casa he grande: os favos quasi cylindricos, ou melhor, em fórma de hum solido eliptico: grandes: mais compridos, que huma pollegada, e quasi de huma pollegada de largura: unidos como em racemo. Cera aloirada: em muita quantidade. Mel branco aloirado: em quantidade vinte libras, ou quartilhos.

*Urusú do chaõ*: a sua casa he subterranea, e em tudo o mais semelhante á antecedente. Quando temem alguma cousa, huma d'ellas occupa a porta da casa, e de forte a tapa com a cabeça, que he difficil dar com a mesma porta.

- II. *Mumbúca*. Negra : do tamanho da *Urusú*. Faz a sua casa grande , ordinariamente dentro dos ramos das arvores. Os seus favos são grandes , e unidos. Cera negra , e muita. Mel alourado : muito doce : em quantidade até quarenta , e tantos quartilhos. Criação huma especie de resina , que os Brasileiros chamaõ *cerol de Mumbúca* : e usaõ d'elle como resolvente , madurante , e abstergente.
- III. *Mandasaia*. Avermelhada : mais pequena , que as antecedentes. Faz as suas casas ordinariamente nos troncos das arvores. Favos encadeados , e menores , do que os da *Urusú*. Cera negro-alourada. Mel em menor quantidade , do que o das antecedentes , e loiro.

- IV. *Jataí*. Corpo muito pequeno : alourado : as tibias muito compridas : faz a sua casa em páos , e a sua porta sahe para fóra em fórma de trombeta de cera , que de noite fechaõ com cera.

*Jataí verdadeira*. Fazem as casas nos troncos seccos. Favos orbiculados , encadeados , e do tamanho de bago de uva. Cera loira. Mel branco : muito doce : em quantidade até cinco libras , ou quartilhos.

*Jataí mosquito* , ou *Moça branca*. Muito pequena : alvarenta. Faz a sua casa nos páos seccos. Favos arredondados : pequenos : encadeados. Cera esbranquiçada. Mel muito branco , e doce : em quantidade até huma libra.

*Jataí amarella*. Tem maior corpo , do que as outras *Jataís* : loira : tem as extremidades das azas esbranquiçadas. Em quanto á casa , favos , cera , e mel he' muito semelhante á *Jataí verdadeira*.

- V. *Mendortm*. Maior , do que a *Jataí*. Cór ouracca , avermelhada. Faz as suas casas nas partes mais altas das arvores ,

res, e formad na porta huma muito comprida trombeta de cera, que não tapaõ como a *Jataá*. Favos cylindricos, de comprimento de meia pollegada, e até cinco linhas de largura: unidos. Cera vermelho-amarellada. Mel loiro: até quatro quartilhos.

VI. *Bate-Chapéo*. Do tamanho da antecedente. Côr fusco-avermelhada. Faz a sua casa no alto das arvores. Favos compridos. Cera aloirada. Mel alvo: alguma coufa azedo: em quantidade até seis quartilhos.

2.<sup>a</sup> *Abelhas sem aculeo; mas que lançaõ pelo anus (segundo parece) hum humor caustico, e não mordem.*

#### Especies

I. *Caga-fogo*. Negra. Corpo delgado. Tibias peludas, e compridas. Faz as suas casas nos troncos seccos das arvores ordinariamente. Favos grandes. Cera quasi negra. Mel espeffo: esbranquiçado: até huma libra em quantidade.

II *Jandaira*. Abelha negro-avermelhada: dotada de hum humor mais caustico: no mais semelhante á antecedente.

III *Tubiba*. Menor, do que as duas precedentes: em quanto ao mais muito semelhante á *Caga-fogo*.

3.<sup>a</sup> *Abelhas com aculeo venenoso no anus, que offendem á maneira das vespas: não mordem: não tem cera.*

I. *Marimbondo vulgar*. Negro. Mais pequeno, que o seguinte: comprido. Casa redonda formada ás vezes ao redor de hum ramo de qualquer arvore; ás vezes porém sómente apegada, ou ao ramo, ou a outra qualquer parte por huma substancia propria como coriacea: he patente, e coberta de huma como materia coriacea: internamente he dividida, como por laminas horizontaes, cuja superficie inferior he liza, e a superior toda cheia de cellulas cylindricas, cheias de hum clarissimo mel, e summamente doce. Não tem cera. Estas laminas horizontaes ás vezes são convexo-concavas, com a convexidade

xidade para cima , e a concavidade para baixo , e são mais , ou menos multiplicadas. O mel he muito pouco.

- II. *Marimbondo Incbit.* { amarello }  
 { rajado } Maior , do que o vul-  
 { preto. }

gar. Não tem cera. O mel he semelhante ao do *Marimbondo vulgar*. As suas cascas são unidas ás arvores : muito raras vezes a outras couças. A materia , de que são feitas , nos he desconhecida ; porém he como coriacea. A figura he varia , ou quasi cylindrica : tapada por ambas as bases , e sómente com huma pequena porta ao lado , ou globosa , ou eliptica , maior , ou menor. Toda a casa he patente pela sua superficie externa ; mas por dentro tem a mesma estrutura , que a da especie antecedente. D'esta especie já ha noticia em algumas partes da Europa ; por se ter mandado para cá algumas cascas.

4.<sup>a</sup> *Abelhas que mordem.*

- I. *Arapud.* Grande. Negra. Cheia de pêlo pelas pernas , e abdomen. Faz a sua casa , ou nos buracos das paredes , ou nos ramos delgados das arvores , abraçando os mesmos ramos : he cercada por fóra com huma grossa crusta , ou capa formada de esterco , pedaços de páo misturados , e unidos com terra. A figura he quasi orbicular. Favos de figura oval : negros. Mel grosso : avermelhado : e doce com alguma couça de azedo. Cera resinosa : negra : e muito impura.

De todas estas ultimas especies se tira o mel sem perigo , fazendo-se junto á casa fumo : principalmente fumo de tabaco , pelo qual se affugentaõ. Além d'estas especies ha outras , de que , se eu lá estivesse , poderia dar noticia : por hora contentar-me-hei com isto.

OBSER-

## OBSERVAÇÕES METEOROLOGICAS

*Feitas no Real Collegio de Mafra no anno de 1785.*

POR D. JOAQUIM DA ASSUMPÇÃO VELHO.

**A**S presentes Observações foram feitas com os mesmos Instrumentos, e do mesmo modo, que as do anno precedente.

## JANEIRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noire	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	26 11 7	26 10 4	26 9 5	52	54	53	0,4	1,6	5,2
2	26 9 6	26 11 2	27 0 2	49	52	51	2,1	1,4	0,9
3	27 1 3	27 2 6	27 3 0	51	55	52	1,3	1,1	0
4	27 3 0	27 3 0	27 2 3	54	55	54	0,8	0,2	0,1
5	27 1 6	27 1 5	26 10 5	53	56	54	0	0	6
6	26 10 7	26 11 0	27 2 6	52	53	52	4,5	2,6	1,8
7	27 3 4	27 4 5	27 8 0	50	50	50	0	0	0
8	27 9 0	27 9 5	27 9 0	48	53	49	0	0	0
9	27 8 4	27 8 0	27 6 0	49	53	49	0	0	0
10	27 5 9	27 5 5	27 5 0	47	52	48	0	0	0
11	27 4 5	27 4 0	27 3 0	44	47	46	0	0,2	0,8
12	27 3 0	27 3 2	27 3 0	45	50	49	0	0	0
13	27 2 9	27 3 0	27 2 5	48	53	52	0	0,1	0
14	27 0 0	27 11 2	27 0 0	50	54	48	7,8	2,8	5,4
15	27 2 5	27 6 0	27 6 7	49	53	49	0	0,1	0
16	27 7 0	27 7 0	27 6 5	47	53	51	0	0	0,2
17	27 6 0	27 6 0	27 5 6	51	54	50	0	5	2,3
18	27 5 0	27 4 9	27 4 8	49	51	49	2,1	1	0
19	27 5 0	27 4 6	27 3 1	46	51	46	0,6	0,4	1,1
20	27 2 0	27 1 9	27 3 5	48	53	46	0,4	4,8	0,7
21	27 5 0	27 6 5	27 6 2	43	51	47	0	0	0
22	27 7 5	27 7 8	27 8 0	44	51	48	0	0	0
23	27 8 5	27 8 3	27 8 8	44	52	49	0	0	0
24	27 8 9	27 8 4	27 7 5	46	51	47	0	0	0
25	27 6 5	27 5 9	27 4 5	42	51	47	0	0	0
26	27 4 6	27 5 0	27 6 9	46	50	49	0	0	0
27	27 7 6	27 8 8	27 9 0	47	54	48	0	0	0
28	27 10 0	27 9 5	27 9 4	46	54	48	0	0	0
29	27 9 0	27 8 0	27 7 2	44	52	47	0	0	0
30	27 7 0	27 6 5	27 6 0	45	52	47	0	0	0
31	27 6 5	27 7 9	27 10 0	48	52	48	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevação	27 10 0	Maior calor - -	56	Total da chuva.
Menor elevação	26 9 5	Menor calor - -	42	P. L. D.
Elevação media	27 5 0	Calor medio - -	50	8 9 3

JANEIRO.

Ventos e estado do Ceo.

<i>Dias do mez</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. m.rij. de temp. Ceo c.
2	O.m.rij. de temp.Ceo c. t.	O. m. rij. de temp. torv.	O. m. rij. de temp. torv.
3	O. rij. nuv. enter.	O. rij. e N. E. Ceo cl.	O. rij. nuv. rar.
4	S. m. rij. de temp. hum.	S. m. rij. de temp. hum.	S. m. rij. de temp. hum.
5	S. rij. de temp. hum.	S. de temp. Ceo cub.	S. E. rij. Ceo cub.
6	S. E.rij. Ceo cub.nuv.car.	S. E. rij. Ceo c. nuv. car.	E. Ceo cub. nuv. car.
7	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. E. Ceo cl.
8	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.
10	E. br. nev. alt.	E. br. nev. alt.	S. E. Ceo cub.
11	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
12	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
13	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
14	S. O. m. rij. de t. Ceo cub.	S. O. m. rij. de t. dep. O. C. c.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
15	N. O. alg. nuv. folr.	N. alg. nuv. folr.	N. Ceo cl. e lind.
16	S. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
17	S. E. e N. O. Ceo cub.	S. Ceo cub. nuv. car. hum.	S. Ceo cub. nuv. car.
18	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	O Ceo cub.
19	O. Ceo cub.	O. Ceo cub. nuv. car.	O Ceo cub. nuv. car.
20	S. Ceo cub. nuv. car.	S. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo ennevoado.
21	E. alg. nuv. folr.	E. alg. nuv. folr.	E. Ceo cl. e lind.
22	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
23	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
25	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	S. br. Ceo cub.
26	S. br. dep. E. alg. nuv.	E. alg. nuv.	N. E. Ceo cub. nev. alt.
27	N. E. br. Ceo c. nev. alt.	N. E. nuv. folr.	N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub. nev. alt.
30	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub. nev. alt.
31	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. E. m. seco Ceo cl. e lind.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
9	13	0	3	5	1

## FEVEREIRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 10 2	27 9 9	27 8 6	40	46	43	0	0	0
2	27 8 0	27 7 9	27 7 5	45	49	48	0	0	1,8
3	27 8 0	27 6 5	27 8 0	44	49	47	0	0,6	2,2
4	27 8 2	27 6 5	27 7 0	41	47	45	0,4	0	1
5	27 8 0	27 8 5	27 8 8	48	50	49	0	0	1,7
6	27 9 0	27 9 0	27 9 1	48	53	51	0,3	0,4	0,2
7	27 8 9	27 8 6	27 8 5	49	52	48	0	0	0,5
8	27 8 2	27 9 0	27 9 0	49	53	48	0	0	0
9	27 9 7	27 9 5	27 9 3	45	55	52	0	0	0
10	27 9 5	27 9 0	27 8 2	45	55	52	0	0	0
11	27 8 0	27 7 9	27 7 0	50	57	50	0	0	0
12	27 6 5	27 6 1	27 5 6	47	54	49	0	0	0
13	27 5 1	27 5 0	27 4 9	46	53	48	0	0	0
14	27 5 0	27 4 5	27 3 8	43	45	45	0	3,2	0,4
15	27 3 2	27 3 0	27 2 6	42	44	47	1,8	2,5	1,1
16	27 2 4	27 2 3	27 0 0	44	50	48	0,3	0,9	2
17	26 11 0	26 10 2	26 11 3	45	50	46	3,2	0	0,7
18	26 11 4	27 0 0	27 0 5	44	49	46	0,5	0	1,6
19	27 2 3	27 1 5	27 3 6	45	47	44	1,9	0	0,5
20	27 2 3	27 2 5	27 2 5	41	47	45	0	0	0,2
21	27 2 5	27 2 6	27 2 8	41	46	44	0,1	0,2	3,9
22	27 4 0	27 5 3	27 6 1	42	49	46	0	0	0
23	27 6 2	27 6 2	27 5 0	45	51	46	0,1	0,2	0
24	27 5 2	27 5 9	27 6 6	45	50	45	0,8	0,3	0
25	27 6 9	27 7 5	27 7 0	47	55	50	0	0	0
26	27 7 0	27 6 5	27 6 0	49	55	50	0	0,2	0
27	27 5 8	27 5 0	27 3 0	52	56	52	0,1	0,1	3,1
28	27 2 6	27 2 2	27 2 0	51	54	48	6,6	0	1

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.		
Maior elevação	27 10 2	Maior calor - -	56	P.	L.	D.
Menor elevação	26 10 2	Menor calor - -	40	4	8	5
Elevação media	27 5 5	Calor medio - -	45			

## F E V E R E I R O .

Ventos e estado do do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. sec. Ceo cl. e lind.	S. E. sec. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	N. Ceo cub. nev. altr.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. alg. nuv. enter.
3	N. Ceo cub.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
4	N. O. Ceo cub.	N. O. nuv. enter. e car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
5	O. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. nuv. car.
6	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
7	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
8	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
9	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
10	E. m. br. Ceo cl. e lind.	E. m. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
11	E. m. br. Ceo cl. e lind.	E. m. br. Ceo cl. e lind.	E. muito br. Ceo cl. e lind.
12	Vario m. br. Ceo cl. e lind.	E. m. br. Ceo cl. e lind.	N. muito br. Ceo cl.
13	Vario Ceo cl. dep. cub.	N. O. br. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	Muito vario Ceo cub.	N. O. e S. ao mesm. temp.	N. O. Ceo cub.
15	S. E. Ceo cub. nuv. car.	Muito vario Ceo cub.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
16	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
17	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
18	N. E. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. E. Ceo cub. nuv. car.
19	O. dep. N. O. n. ent. e car.	O. nuv. solt.	O. nuv. solt. e car.
20	S. E. br. Ceo cub.	N. O. nuv. enter. e car.	N. O. nuv. enter. e car.
		S. E. br. Ceo c. dep. O. br.	O. br. nev. alt. dep. N. O. nuv. car.
21	N. O. n. f. e car. chuv. dep.	N. O. n. f. e car. chuv. dep.	N. O. nuv. solt. e car.
22	N. O. nuv. solt. e car.	N. O. n. f. dep. N. Ceo cl.	N. muito br. Ceo cub.
23	N. e S. e ao m. r. N. b. S. alt.	N. junt. a ter. e S. mais alt.	S. E. br. Ceo cub.
24	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. br. Ceo cub.
25	S. E. junt. a ter. e N. O. alt.	N. alt. e S. E. junt. a ter.	S. nev. alt.
26	S. E. nev. alt. humidade.	S. nuv. car. nev. e humid.	S. O. br. nev. esp. e hum.
27	S. O. nev. esp. gr. hum.	S. O. Ceo cub. n. car. hum.	S. O. Ceo c. nuv. car. hum.
28	S. O. Ceo cub. n. car. hum.	O. Ceo c. dep. N. O. n. ent.	N. O. nuv. solt.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
5	17	2	3	0	0

MARÇO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 2 9	27 3 0	27 4 8	45	49	44	1	0	0
2	27 5 0	27 5 0	27 4 5	35	42	41	0	0	0
3	27 4 0	27 3 6	27 1 2	42	51	50	0	0	1,8
4	27 0 4	27 0 8	27 3 0	44	50	48	4,4	0	0
5	27 4 1	27 4 6	27 5 0	44	52	50	0	0	0
6	27 4 2	27 3 2	27 1 0	47	55	52	0	0	8,4
7	27 0 9	27 1 0	27 1 5	51	55	54	0,2	0,4	0,9
8	27 2 1	27 2 4	27 2 8	52	54	52	0,5	0,6	0,8
9	27 2 0	27 1 0	27 3 0	49	55	54	2	0,8	4,4
10	27 4 0	27 4 6	27 4 0	51	54	53	0	0	0
11	27 3 6	27 3 0	27 1 0	52	57	56	0	0	0
12	27 0 5	27 0 0	26 0 6	52	58	55	0	0	0
13	26 11 0	27 0 0	27 0 2	50	55	52	0	0	0
14	27 0 4	27 1 0	27 1 5	49	56	52	0	0	0
15	27 2 0	27 2 9	27 2 4	49	55	51	0	0	0
16	27 1 0	27 0 8	27 2 0	48	56	52	0	3,2	5
17	27 2 0	27 2 5	27 4 0	49	54	50	0,7	1	0
18	27 5 0	27 5 9	27 5 2	50	56	52	0	0,8	0,6
19	27 4 6	27 4 9	27 5 1	47	57	53	0,2	0,1	0
20	27 5 2	27 5 4	27 5 2	49	59	53	0	0	0,4
21	27 5 0	27 4 8	27 4 0	50	56	50	0,3	0,6	0
22	27 4 0	27 4 0	27 4 5	46	56	50	0	0,2	0
23	27 4 8	27 4 6	27 5 0	48	57	52	0	0	0
24	27 4 8	27 4 6	27 3 9	49	58	52	0	0	2
25	27 4 8	27 5 0	27 5 1	48	52	49	0	0	0
26	27 5 6	27 6 2	27 7 1	44	54	48	0	0	0
27	27 7 0	27 6 6	27 5 8	44	53	51	0	0	0
28	27 5 0	27 3 2	27 1 0	48	54	50	0	1,2	1,5
29	27 2 0	27 2 8	27 3 0	49	56	51	1,8	0	1,5
30	27 2 3	27 1 5	27 2 5	52	53	52	0,5	1,4	4,9
31	27 2 6	27 2 8	27 3 2	51	56	52	0,8	2,3	0,3

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva		
				P.	L.	D.
Maior elevação	27 7 1	Maior calor - -	58	4	9	5
Menor elevação	26 10 6	Menor calor - -	35			
Elevação media	27 3 0	Calor medio - -	51			

ABRIL

MARÇO.

Ventos e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan	Tarde	Noite
1	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. nuv. folt. dep. N. E.
2	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. dep. N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
3	N. dep. N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
4	S. E. rij. Ceo c. nuv. car.	E. e S. E. dep. N. E. Ceo c.	N. O. br. Ceo cl.
5	N. O. m. br. C. cl. dep. cub.	N. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cl.
6	S. E. Ceo cub.	O. rij. dep. S. Ceo cub.	S. Ceo cub. nuv. car. hum.
7	S. O. rij. Ceo c. gr. hum.	O. rij. Ceo cub. humid.	S. O. m. rij. Ceo cub. hum.
8	S. O. m. rij. Ceo cub. hum.	S. O. rij. Ceo cub. hum.	S. O. br. Ceo cub. hum.
9	S. rij. Ceo cub. humid.	S. O. m. rij. Ceo cub. hum.	S. O. Ceo cub. hum.
10	S. O. Ceo cub. humid.	S. O. Ceo cub. humid.	S. O. br. Ceo cub. hum.
11	S. muito rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
12	E. rij. junt. a ter. e S. alt.	S. rij. Ceo cub.	S. Ceo cub.
13	S. O. Ceo cub.	S. O. nuv. enter.	E. br. Ceo cl.
14	E. br. Ceo cl. dep. S. E.	S. e dep. S. O. nuv. enter.	S. O. nuv. enter.
15	S. O. br. nuv. enter.	O. br. nuv. enter.	S. E. br. Ceo cl. e lind.
16	S. E. rij. nev. alt.	S. E. m. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.
17	S. E. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.
18	S. E. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.	S. E. nev. alt.
19	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. br. alg. nuv. folt.
20	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. ao mesm. r.	S. E. Ceo cub.
21	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. dep. N. E. Ceo cl.
22	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. nuv. car.	N. br. Ceo cl. e lind.
23	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. n. car. dep. C. cl.	N. Ceo cl. e lind.
24	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. nuv. car.	S. E. Ceo cub.
25	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. Ceo cub.	N. br. Ceo cl. e lind.
26	E. br. dep. N. alg. nev. folt.	N. O. e S. E. alg. nuv. folt.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	*	N. O. e S. E. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
28	S. E. Ceo cub.	S. O. gr. fur. e panc. de chu. p.	S. O. m. rij. Ceo c. nuv. car.
29	N. O. rij. nuv. car.	N. O. rij. nuv. car.	O. dep. S. O. m. r. C. c. n. car.
30	S. O. m. rij. Ceo cub. n. car.	O. e dep. N. O. nuv. car.	S. e N. O. rel. e rorv. ao long. dep. S. O. rij.
31	O. m. rij. Ceo cub. n. car.	O. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. nuv. car.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
1	19	0	5	2	1

ABRIL

## ABRIL DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 4 0	27 3 6	26 11 0	52	56	53	0	0	8,6
2	27 0 0	27 1 1	27 3 5	52	56	52	2,2	0,6	1
3	27 4 0	27 5 3	27 7 3	43	49	47	0	0	0
4	27 7 3	27 7 1	27 6 2	37	49	46	0	0	0
5	27 5 9	27 6 0	27 5 5	39	54	50	0	0	0
6	27 5 3	27 5 1	27 6 0	47	56	53	1	0,6	0,2
7	27 6 0	27 6 5	27 7 0	51	56	53	0,4	0,6	0,2
8	27 7 1	27 7 5	27 7 3	51	55	52	0,1	0	0
9	27 7 8	27 7 4	27 8 0	51	55	49	0	0.	0
10	27 8 2	27 8 1	27 8 9	47	60	56	0	0	0
11	27 8 5	27 8 8	27 8 0	53	64	55	0	0	0
12	27 8 1	27 8 5	27 7 0	52	66	61	0	0	0
13	27 6 4	27 6 5	27 6 0	58	64	56	0	0	0
14	27 6 2	27 6 1	27 6 2	54	66	57	0	0	0
15	27 6 5	27 6 4	27 6 6	56	70	65	0	0	0
16	27 7 0	27 6 0	27 4 8	57	67	61	0	0,2	2,2
17	27 4 6	27 5 0	27 5 2	56	67	61	0	0	0
18	27 4 8	27 5 0	27 5 6	53	59	53	0,1	1,8	0,9
19	27 6 2	27 7 0	27 6 6	51	58	54	0	0	0
20	27 6 4	27 6 0	27 5 9	52	61	57	0	0,9	0
21	27 6 0	27 6 1	27 7 2	53	58	54	0	0	0.
22	27 7 5	27 7 4	27 6 7	52	57	53	0	0	0
23	27 6 5	27 6 0	27 5 5	55	68	57	0	0	0
24	27 5 9	27 5 0	27 4 9	57	69	62	0	0	0
25	27 6 0	27 7 1	27 7 0	60	70	62	0	0	0
26	27 7 3	27 6 7	27 5 8	56	63	60	0	0	0
27	27 5 6	27 5 8	27 5 5	56	65	57	0	0	0
28	27 5 6	27 5 5	27 5 4	56	69	60	0	0	0
29	27 5 6	27 5 8	27 6 4	56	68	60	0	0	0
30	27 6 5	27 6 3	27 5 5	49	64	59	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevação -	27 8 9	Maior calor - -	70	Total da chuva.
Menor elevação	26 11 0	Menor calor - -	37	P. L. D.
Elevação media	27 6 0	Calor medio - -	56	1 9 6

ABRIL

ABRIL.

Ventos, e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Tarde.
1	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. dep. S.	S. e O. nuv. car. gr. temp.
2	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. rij. C. cl. dep. N. O. rij. Ceo cl.
3	N. nuv. folt. e enter.	N. nuv. folt. dep. N. E. C. cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
5	E. Ceo cl. e lind.	E. junt. a ter. e S. alt. n. alt.	E. junt. a t. e S. O. alt. n. folt.
6	S. E. junt. a t. e S. O. alt. n. car.	S. nuv. car. gr. humid.	S. nuv. car. dep. O. br. C. cl.
7	O. dep. S. O. nuv. car.	S. O. nuv. car. nev. esp.	O. dep. N. O. Ceo cub.
8	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
9	N. alg. nuv. folt.	N. Ceo cl. e lind.	N. br. dep. N. E. C. cl. e lind.
10	E. e O. juntam. C. cl. e lind.	E. junt. a ter. e O. alt. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
11	E. junt. a ter. e O. alt.	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.
12	E. junt. a ter. e S. O. alt. nev. alt. e rar.	E. junt. a ter. e S. O. alt. nev. alt. e rar.	E. muito br. Ceo cl.
13	E. junt. a ter. e S. alt. C. c.	E. e N. O. Ceo cub.	E. junt. a ter. e N. alt. dep. S.
14	N. e S. ao m. temp.	N. alt. e S. junt. a ter.	N. muito br. C. cl. e lind.
15	E. junt. a ter. e S. alt. C. cl.	E. muito br. Ceo cl.	E. e S. Ceo cl.
16	E. C. cl. dep. S. E. m. rij. C. c.	S. E. muito rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub. relamp.
17	S. E. dep. S. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
18	S. alt. e N. junt. a ter.	S. e N. nuv. car.	N. junt. a ter. e S. alt.
19	N. junt. a ter. e S. alt. C. c.	N. junt. a ter. e S. alt. C. c.	N. E. nev. alt. dep. C. cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	S. E. e N. O. torv. dep. N. E.	N. E. alg. nev. alt.
21	N. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. O. nev. alt.
22	N. E. nev. alt.	N. O. junt. a ter. e N. E. alt.	E. Ceo cl. e lind.
23	E. br. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
24	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
25	E. br. Ceo cl. e lind.	E. dep. S. E. alg. nuv. folt.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
26	O. junt. a ter. e E. alt. C. cl.	O. junt. a ter. e E. alt. C. cl.	N. O. Ceo cub. nev. alt.
27	N. O. C. c. d. N. e N. E. C. cl.	N. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. Ceo cl. e lind.	N. br. Ceo cl. e lind.	N. br. Ceo cl. e lind.
29	N. E. dep. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
13	6	1	1	1	2

## M A I O D E 1785.

Dia, do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 5 1	27 5 0	27 5 4	57	63	56	0	0	0
2	27 5 6	27 5 4	27 4 9	54	66	60	0	0	0
3	27 4 8	27 4 5	27 4 4	59	70	66	0	1,4	2,1
4	27 4 0	27 3 4	27 3 9	56	68	60	0	0	4,6
5	27 4 0	27 3 9	27 4 0	57	59	56	2,2	0,9	0
6	27 3 8	27 3 4	27 3 5	54	63	59	0	0	2,6
7	27 3 9	27 3 1	27 4 1	56	64	57	0,7	0,4	0
8	27 4 0	27 4 1	27 5 1	56	63	57	0	0,6	0
9	27 5 4	27 5 3	27 5 4	55	61	56	0,8	0,4	1,2
10	27 5 6	27 5 9	27 6 1	55	58	56	0	0	2,1
11	27 6 3	27 6 5	27 6 6	54	59	55	2,1	0	0
12	27 6 6	27 6 3	26 7 0	53	59	55	0	0	0
13	26 7 2	27 7 4	27 7 5	54	70	63	0	0	0
14	27 7 6	27 7 5	27 6 9	56	68	60	0	0	0
15	27 6 2	27 6 0	27 6 3	54	66	61	0	0	0
16	27 6 6	27 6 8	27 6 4	57	68	61	0	0	6
17	27 6 7	27 6 8	27 7 0	58	65	57	0	0	0
18	27 7 1	27 7 0	27 7 0	54	64	59	0	0	0
19	27 7 0	27 6 9	27 6 6	55	64	56	0	0	0
20	27 6 0	27 5 8	27 5 7	55	63	57	0	0	0
21	27 5 7	27 5 7	27 5 6	56	66	58	0	0	0
22	27 5 8	27 5 7	27 6 0	58	65	58	0,2	0,1	0
23	27 7 0	27 7 4	27 8 0	58	66	59	0,8	0	0
24	27 8 1	27 8 0	27 7 8	56	66	59	0	0	0
25	27 7 9	27 7 8	27 7 6	56	69	60	0	0	0
26	27 7 5	27 7 7	27 7 7	68	79	69	0	0	0
27	27 7 6	27 7 5	27 7 8	68	73	62	0	0	0
28	27 7 7	27 7 7	27 7 5	59	63	57	0	0	0
29	27 7 6	27 7 7	27 8 0	57	61	56	0	0	0
30	27 8 3	27 8 2	27 8 3	54	61	55	0	0	0
31	27 8 2	27 8 1	27 8 5	52	59	55	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva		
Maior elevação	27 8 3	Maior calor - -	79	P.	L.	D.
Menor elevação	27 3 4	Menor calor - -	53	2	5	2
Elevação media	27 6 3	Calor medio - -	61			

M A I O

M A I O.

Ventos e effado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. junt. a ter. e S. E. alt.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
2	E. junt. a ter. e S. O. alt.	S. E. Ceo cl. e lind.	S. E. Ceo cl.
3	S. E. alg. nuv. folt.	S. e N. O. nuv. car. torv.	S. nuv. car.
4	S. Ceo cub.	S. Ceo cub. nuv. car.	S. Ceo cub. nuv. car.
5	S. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. br. alg. nuv. folt.
6	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. nuv. car.
7	S. E. Ceo cub. nuv. car.	N. E. e S. E. torv. ao long.	S. E. Ceo cub.
8	N. O. junt. a ter. e S. E. alt.	N. O. e S. E. nuv. car. torv.	N. E. br. Ceo cl. '
9	N. E. C. cl. N. O. C. cub.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
10	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
11	N. O. rij. C cub. nuv. car.	N. O. rij. nuv. car.	N. rij. nuv. folt. e enter.
12	N. rij. nuv. folt. e enter.	N. rij. nuv. folt. e enter.	E. nuv. folt.
13	E. nuv. folt.	E. nuv. folt.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl.
15	E. Ceo cl. e lind.	E. alg. nuv. folt.	S. E. Ceo cub.
16	S. E. Ceo cub.	S. E. e O. dep. N. O. n. folt.	N. O. Ceo cl. e lind.
17	N. O. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. O. dep. E. br. C. cl. e lind.
18	E. br. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. dep. alg. nuv. folt.	N. nev. alt.
19	N. nev. alt. dep. E. br. C. cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. C. cl. e lind. dep. N. O. nev. alt.
20	O. alg. nuv. folt.	O. rij. alg. nuv. folt.	S. O. nuv. car.
21	S. O. nuv. folt. e car.	S. O. nuv. folt. e car.	S. O. dep. S. Ceo cub.
22	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
23	S. O. Ceo cub.	S. O. dep. O Ceo cub.	N. nev. alt.
24	N. E. nev. alt.	N. E. nev. alt.	N. E. nev. alt.
25	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
26	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. C. cl. e lind. torv. ao long.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. C. cl. dep. N. O. n. esp.	N. O. nev. esp.
28	N. O. rij. nev. alt.	N. O. rij. nev. alt.	N. O. rij. nev. alt.
29	N. O. rij. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. rij. nev. alt.
30	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.
31	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

*Dias*

Clar.      de chuv.      de nev.      de humidade.      de temp.      de torv.

8

10

1

0

0

4

## JUNHO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 8 4	27 8 1	27 7 8	51	65	57	0	0	0
2	27 7 9	27 7 8	27 7 2	54	64	56	0	0	0
3	27 7 0	27 7 9	27 7 0	55	65	59	0	0, 1	2, 3
4	27 7 5	27 7 8	27 8 0	59	66	60	0	0	0
5	27 8 4	27 8 5	27 8 3	58	68	60	0	0	0
6	27 8 3	27 8 0	27 7 9	58	68	61	0	0	0
7	27 8 1	27 8 5	27 8 9	59	68	63	0	0	0
8	27 8 8	27 8 4	27 8 6	60	67	60	0	0	0
9	27 8 7	27 8 4	27 8 6	56	74	66	0	0	0
10	27 9 0	27 8 3	27 8 3	67	82	68	0	0	0
11	27 8 1	27 8 2	27 8 2	66	84	69	0	0	0
12	27 8 0	27 7 8	27 7 5	69	82	70	0	0	0
13	27 7 0	27 6 8	27 5 9	69	82	71	0	0	0
14	27 5 9	27 6 0	27 6 0	71	81	70	0	0	0
15	27 6 0	27 6 5	27 6 7	65	76	65	0	0	0
16	27 6 8	27 6 9	27 7 3	64	74	65	0	0	0
17	27 7 9	27 8 3	27 8 0	63	76	65	0	0	0
18	27 8 0	27 7 9	27 7 8	61	72	64	0	0	0
19	27 7 6	27 7 6	27 7 9	65	70	65	0	0	0
20	27 8 1	27 7 8	27 7 2	63	70	64	0	0	0
21	27 6 8	27 6 1	27 6 6	64	72	65	0	0	0
22	27 6 5	27 6 9	27 7 0	64	73	66	0	0	0
23	27 7 1	27 6 8	27 6 7	62	73	66	0	0	0
24	27 7 0	27 6 8	27 6 7	64	73	68	0	0	0
25	27 6 9	27 6 6	27 6 8	63	72	67	0	0	0
26	27 6 5	27 6 4	27 6 7	62	71	66	4, 8	0	0
27	27 7 0	27 6 9	27 7 1	62	72	67	1, 6	0	0
28	27 7 4	27 7 3	27 7 6	63	73	67	0	0	0
29	27 7 8	27 7 6	27 7 4	64	72	66	0	0	0
30	27 7 3	27 6 9	27 7 1	64	73	65	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.		
Maior elevação -	27 9 0	Maior calor - -	84
Menor elevação	27 5 9	Menor calor - -	51
Elevação media	27 7 4	Calor medio - -	62
		Total da chuva.	
		P.	L.
		0	8
			8

JUNHO.

Ventos e estado do do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	O. Ceo cl.	O. Ceo cl.	O. dep. S. O. Ceo cl.
3	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
4	S. O dep. O. Ceo cub.	O. dep. N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. O. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. nev. alt.
6	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt.
7	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt.
8	N. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
10	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. dep. N. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	O. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	E. dep. S. E. Ceo cub.	O. br. Ceo cl. e lind.	O. muito br. Ceo cl. dep. S. nuv. folr.
15	S. Ceo cub.	O. br. Ceo cl. e lind.	N. O. dep. S. Ceo cub.
16	S. alg. nuv.	N. O. alg. nuv. folr.	N. O. Ceo. cl. e lind.
17	N. O. alg. nuv. folr.	N. O. alg. nuv. folr.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
19	N. alg. nuv. folr.	N. nuv. folr.	N. nuv. folr.
20	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cl.
21	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
22	Vario: Ceo cub.	Vario: Ceo cub.	N. Ceo cl. e lind.
23	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
24	O. Ceo cl.	O. alg. nuv.	O. nuv. folr.
25	O. nuv. folr.	O. nuv. folr.	O. nuv. folr.
26	O. nuv. folr.	O. nuv. folr.	O. nuv. folr.
27	O. nuv. folr.	O. nuv. folr.	O. nuv. folr.
28	O. nuv. folr.	O. nuv. folr.	N. nuv. folr.
29	O. nuv. folr.	O. nuv. folr.	N. O. nuv. folr.
30	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. Ceo cub.	N. E. nuv. folr.

*Dias*

Clar.      de chuy.      de nev.      de humidade.      de temp.      de torv.

13

2

0

0

0

0

## JULHO DE 1785.

Dias do mez	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 7 6	27 7 8	27 7 7	64	72	65	0	0	0
2	27 7 5	27 7 9	27 7 8	66	73	64	0	0	0
3	27 7 7	27 7 6	27 7 4	64	78	66	0	0	0
4	27 7 3	27 7 1	27 7 4	67	79	70	0	0	0
5	27 7 5	27 7 2	27 6 7	65	72	65	0	0	0
6	27 6 8	27 6 6	27 6 5	60	73	64	0	0	0
7	27 6 6	27 6 5	27 6 6	60	76	66	0	0	0
8	27 6 8	27 7 0	27 7 7	60	87	74	0	0	0
9	27 7 8	27 7 6	27 7 5	70	85	75	0	0	0
10	27 7 4	27 7 2	27 7 0	75	83	73	0	0	0
11	27 6 8	27 6 7	27 6 4	72	78	71	0	0	0
12	27 6 2	27 6 0	27 6 0	66	75	67	0	0	0
13	27 6 2	27 6 4	27 6 5	65	70	65	0	0	0
14	27 6 4	27 6 5	27 6 8	62	70	65	0	0	0,8
15	27 7 0	27 7 3	27 7 8	61	70	66	0	0	0
16	27 8 0	27 7 7	27 7 9	61	74	63	0	0	0
17	27 7 8	27 7 7	27 7 6	66	83	70	0	0	0
18	27 7 6	27 7 5	27 7 0	63	73	64	0	0	0
19	27 6 9	27 6 7	27 6 7	62	70	65	0	0	0
20	27 6 8	27 6 5	27 6 7	64	69	64	0	0	0
21	27 7 0	27 7 2	27 8 3	60	70	65	0	0	0
22	27 8 4	27 8 5	27 9 0	60	70	64	0	0	0
23	27 8 7	27 8 5	27 8 1	60	73	65	0	0	0
24	27 7 6	27 7 0	27 6 4	63	81	75	0	0	0
25	27 6 4	27 6 2	27 5 9	72	83	68	0	0	0
26	27 6 8	27 7 0	27 7 5	62	71	66	0	0	0
27	27 7 8	27 8 0	27 8 4	64	71	64	0	0	0
28	27 8 3	27 8 3	27 8 2	59	71	62	0	0	0
29	27 8 3	27 8 0	27 7 7	59	75	63	0	0	0
30	27 7 5	27 7 3	27 7 0	62	73	65	0	0	0
31	27 6 7	27 6 6	27 6 5	63	74	67	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.		
M.ior elevação	27 9 0	Mayor calor - -	83
Menor elevação	27 5 9	Menor calor - -	59
Elevação media	27 7 3	Calor medio - -	45
		Total da chuva.	
		P. L. D.	
		0 0 0,8	

JULHO.

Ventos e estado do Ceo.

<i>Dias</i> <i>do</i> <i>mez.</i>	Manhan	Tarde	Noite
1	N. alg. nuv. folr.	N. nuv. folr.	N. Ceo cl.
2	N. nuv. folr.	N. nuv. folr.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.
6	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
8	N. E. dep. E. C. cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
9	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
10	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
11	O. Ceo cl.	O. Ceo cl.	O. br. Ceo cl. e lind.
12	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.
13	O. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.	O. Ceo cub.
14	O. rij. Ceo cub.	N. O. nuv. folr.	N. O. nuv. folr.
15	O. br. nuv. folr.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
16	N. Ceo. cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
17	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind. dep. N. muito rij.	N. rij. Ceo cl. e lind.
19	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. nev. alt. Ceo cub.
20	N. nuv. folr. e enter.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
21	N. nuv. folr.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.
25	N. Ceo cub.	N. e S. O. Ceo cub.	N. Ceo cub.
26	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub.
29	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cub.
30	N. Ceo cl.	N. nuv. enterromp.	N. Ceo enev.
31	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.

*Dias*

Clar.    de chuv.    de nev.    de humidade.    de temp.    de torv.

23

○

○

○

○

○

## AGOSTO DE 1785.

Dia do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 6 4	27 6 2	27 5 6	64	73	66	0	0	0
2	27 5 0	27 4 7	27 4 5	63	70	65	0	0	2,6
3	27 5 4	27 5 7	27 6 2	63	68	63	2,8	0,8	2,6
4	27 7 1	27 7 1	27 7 3	60	70	65	0	3	0
5	27 7 1	27 6 9	27 7 0	61	72	65	0	0	0
6	27 7 1	27 7 0	27 6 0	62	71	66	0	0	0
7	27 5 7	27 5 4	27 5 2	60	70	65	0	0	0
8	27 6 3	27 6 4	27 6 7	59	69	66	0	0	0
9	27 7 2	27 7 0	27 6 3	60	72	64	0	0	0
10	27 6 4	27 6 2	27 6 2	59	69	65	0	0	0
11	27 6 4	27 6 3	27 6 6	58	73	64	0	0	0
12	27 7 2	27 7 3	27 7 7	59	72	63	0	0	0
13	26 7 8	27 7 6	27 7 5	60	73	65	0	0	0
14	27 7 0	27 6 8	27 6 2	60	69	63	0	0	0
15	27 6 0	27 5 8	27 6 0	60	72	66	0	0	0
16	27 5 7	27 5 9	27 5 9	61	70	64	0	0	0
17	27 6 0	27 6 7	27 7 2	62	66	63	0	0	0
18	27 7 3	27 7 4	27 7 6	60	67	63	0	0	0
19	27 6 8	27 6 7	27 6 7	61	67	64	0	0	0
20	27 6 0	27 6 6	27 6 2	63	66	62	0	0	0
21	27 5 9	27 6 0	27 5 8	63	70	65	0	0	0
22	27 6 6	27 7 2	27 7 2	60	74	65	0	0	0
23	27 7 6	27 7 9	27 7 4	61	74	69	0	0	0
24	27 7 4	27 6 8	27 7 0	63	72	67	0	0	0
25	27 7 1	27 7 2	27 7 4	63	72	68	0	0	0
26	27 7 5	27 7 4	27 7 6	63	70	65	0	0	0
27	27 7 8	27 7 7	27 7 8	59	71	64	0	0	0
28	27 8 4	27 8 2	27 8 3	61	74	69	0	0	0
29	27 7 7	27 7 4	27 6 8	66	75	68	0	0	0
30	27 7 1	27 6 8	27 6 4	65	73	67	0	0	0
31	27 7 0	27 7 2	27 7 3	46	72	64	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva		
Maior elevação	27 8 4	Maior calor	- - 75	P.	L.	D.
Menor elevação	27 4 5	Menor calor	- 58	0	11	8
Elevação media	27 6 6	Calor medio	- 65			

MAIO

AGOSTO.

Ventos e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. Ceo cl.	O. nuv. folt.	O. nuv. folt.
2	O. nuv. folt.	O. nuv. folt.	O. Ceo cub. torv.
3	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. nuv. folt.
4	N. O. nuv. folt.	N. O. nuv. folt.	O. br. nuv. folt. 4.
5	O. nuv. folt.	O. nuv. folt.	O. nuv. folt.
6	N. nuv. folt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
7	N. rij. alg. nuv.	N. rij. Ceo cub.	N. Ceo cub.
8	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
10	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
11	N. nev. esp. dep. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind. no f. nev. alt.	N. E. nev. alt.
12	N. nev. alt. dep. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. C cl. e lind. dep. nev. alt.
14	N. E. nev. alt. dep. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. nev. alt. dep. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub. nev. alt.
16	N. nev. alt. dep. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. nev. alt. dep. Ceo cl.
17	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
19	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.
23	N. nev. alt. dep. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. nev. alt.
24	N. O. nev. alt.	N. O. alg. nuv. folt.	N. O. nev. alt. Ceo cub.
25	N. O. Ceo cub. nev. alt.	N. O. nuv. inter.	N. nev. alt.
26	N. O. Ceo cub.	N. E. nuv. intrer.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cub. nev. alt.
29	N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. nev. alt.
30	O. Ceo cl.	O. e N. O. nuv. folt.	N. O. Ceo cub.
31	N. E. nev. esp. dep. C. cl.	N. E. Ceo cl.	N. Ceo cl.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
21	2	0	0	0	0

## SETEMBRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhã	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 7 2	27 7 1	27 7 3	63	72	66	0	0	0
2	27 7 3	27 7 2	27 8 0	65	74	70	0	0	0
3	27 7 9	27 7 6	27 7 0	64	71	64	0	0	0
4	27 6 8	27 6 7	27 6 0	59	70	64	0	0	0
5	27 5 7	27 5 6	27 5 9	66	72	66	0	0	0
6	27 6 0	27 6 3	27 6 8	65	72	64	2	4	6
7	27 7 2	27 7 8	27 7 8	64	68	65	3,9	0	0
8	27 7 9	27 7 6	27 7 0	60	67	64	0	0	0
9	27 6 3	27 6 1	27 5 6	59	69	66	0	0	0
10	27 6 4	27 7 5	27 7 9	66	68	65	4,4	0	0
11	27 9 0	27 9 3	27 8 6	62	69	61	0	0	0
12	27 8 4	27 8 0	27 7 8	58	68	64	0	0	0
13	27 7 4	27 7 2	27 7 0	64	70	65	0	0	0
14	27 7 2	27 7 2	27 7 4	61	70	65	0	0	0
15	27 7 5	27 7 8	27 7 7	61	68	66	0	0	0
16	27 7 5	27 7 5	27 7 1	62	67	65	0	0	0
17	27 7 3	27 7 8	27 8 0	58	69	63	0	0	0
18	27 8 4	27 8 6	27 8 5	63	70	64	0	0	0
19	27 8 6	27 8 6	27 8 2	64	72	67	0	0	0
20	27 7 7	27 6 8	27 7 0	63	72	66	0	0	1,7
21	27 6 7	27 6 6	27 7 2	63	71	66	0	0	0
22	27 6 6	27 5 9	27 4 5	63	67	64	0,5	0	0
23	27 4 3	27 3 8	27 2 2	65	66	64	15,8	0	3
24	27 2 0	27 1 9	27 4 4	65	67	64	1,4	2,3	0
25	27 5 5	27 6 0	27 6 8	64	70	65	0	0	0
26	27 7 1	27 7 2	27 8 0	66	71	66	0	0	0,6
27	27 8 3	27 8 3	27 8 4	67	72	68	0	0	0
28	27 8 4	27 8 5	27 8 0	66	76	68	0	0	0
29	27 7 5	27 7 7	27 7 5	66	79	70	0	0	0
30	27 7 4	27 6 7	27 6 3	70	80	71	0	0	0

Resultado de todo o mez.

Maior elevação -	27 9 3	Maior calor - -	80	Total da chuva.		
Menor elevação	27 1 9	Menor calor - -	58	P.	L.	D.
Elevação media	27 7 0	Calor medio - -	66	3	9	1

S E T E M B R O.

Ventos e estado do do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. nev. esp. dep. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. dep. nev. alt.
2	N. O. nev. alt. dep. C. cl.	N. O. e O. nuv. folr.	N. O. C. cl. dep. nev. esp.
3	N. nev. esp. e hum.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
4	N. Ceo cub. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	N. O. nev. alt. dep. S. O. Ceo cub.
5	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. rij. dep. S. Ceo cub.
6	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
7	S. Ceo cub.	O. nuv. folr. dep. N. C. cl.	N. Ceo cl.
8	N. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.
9	N. C. cl. dep. S. O. rij. C. cub.	S. O. rij. Ceo cub.	O. Ceo cub.
10	S. O. dep. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. dep. N. Ceo cl.
11	N. E. dep. O. nuv. folr.	N. E. nuv. folr.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. dep. O. C. cl. e lind.	N. E. dep. N. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.
14	N. Ceo cl.	N. dep. N. O. nuv. folr.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. nuv. folr.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
17	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. nev. esp. dep. C. cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
19	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
20	N. E. dep. O. nev. alt.	S. O. Ceo cub.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. E. C. cl. dep. O. C. cub.	S. O. Ceo cub.	N. br. Ceo cl. e lind.
22	N. O. nev. esp. dep. S. O. rij. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.	S. Ceo cub.
23	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
24	S. Ceo cub.	S. rij. de temp. Ceo cub.	S. Ceo cub.
25	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. Ceo cub.
26	S. e S. E. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub. nev. esp.
27	S. Ceo cub. nev. esp.	S. Ceo cl. e lind.	S. E. Ceo cl. e lind.
28	E. Ceo cl. e lind.	O. muito br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. junt. a ter. e N. O. alt.	O. Ceo cl.	O. br. Ceo cub.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
13	6	1	0	0	0

## OUTUBRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noire	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 6 4	27 6 4	27 6 5	68	74	67	0	0	0
2	27 7 0	27 7 0	27 7 3	65	70	66	0	0	0
3	27 7 5	27 7 3	27 7 4	64	69	55	0	0	0
4	27 7 6	27 7 4	27 7 5	61	67	57	0	0	0
5	27 7 8	27 7 6	27 7 9	59	66	61	0	0	0
6	27 7 9	27 7 8	27 9 2	58	67	64	0	0	0
7	27 9 0	27 8 7	27 8 0	59	67	62	0	0	0
8	27 7 9	27 7 6	27 7 5	62	68	63	0	0	0
9	27 7 5	27 7 4	27 7 6	62	77	64	0	0	0
10	27 7 6	27 7 4	27 7 5	58	67	61	0	0	0
11	27 7 5	27 7 4	27 7 6	59	70	64	0	0	0
12	27 8 0	27 8 2	27 9 2	62	69	66	0	0	0
13	27 9 3	27 9 3	27 9 2	62	71	67	0	0	0
14	27 9 7	27 9 0	27 8 2	65	75	67	0	0	0
15	27 8 0	27 7 5	27 6 7	65	75	70	0	0	0
16	27 6 4	27 6 3	27 6 4	64	76	71	0	0	0
17	27 6 5	27 6 0	27 6 4	65	73	71	0	0	4,3
18	27 6 9	27 6 8	27 6 3	62	67	64	0	0	0
19	27 6 6	27 6 7	27 6 8	60	68	65	0	0	0
20	27 6 9	27 6 7	27 6 2	64	68	64	0	0	0
21	27 6 8	27 6 9	27 7 2	56	67	64	0	0	0
22	27 7 8	27 7 8	27 7 7	55	64	60	0	0	0
23	27 7 4	27 6 6	27 4 1	56	65	60	0	0	0
24	27 4 4	27 4 1	27 4 6	60	65	61	5	0	0
25	27 5 0	27 4 8	27 4 7	62	68	66	0	0	10,5
26	27 4 8	27 4 8	27 6 3	62	67	60	0	0	0
27	27 6 6	27 7 1	27 8 3	57	60	56	0	0	0
28	27 8 4	27 8 4	27 8 5	48	58	56	0	0	0
29	27 8 7	27 8 7	27 8 8	50	58	55	0	0	0
30	27 8 6	27 8 5	27 8 6	51	63	60	0	0	0
31	27 8 0	27 7 1	27 6 7	53	63	54	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevação	27 9 7	Maior calor - -	77	Total da chuva.
Menor elevação	27 4 1	Menor calor -	50	P. L. D.
Elevação media	27 7 3	Calor medio -	63	1 7 8

OUTU-

O U T U B R O .

Ventos , e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
2	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. E. ceo cl.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
6	N. Ceo cub. nuv. folr.	N. nuv. folr.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. E. Ceo cl. e lind.	N. alg. nuv. folr.	N. Ceo cl. e lind.
8	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cl. e lind.
9	N. Ceo cub. nev. alt.	N. alg. nuv. folr.	N. E. Ceo cl. e lind.
10	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	O. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
14	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
15	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	S. E. Ceo cl. e lind.
16	S. E. e E. Ceo cl. e lind.	S. E. e S. rij. C. cl e lin.	S. Ceo cl.
17	E. rij. Ceo cub.	E. Ceo cub.	S. e N. O. C. cub. torv. rij.
18	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. Ceo cub.
19	N. E. Ceo cub. nev. alt.	N. nuv. enter.	N. C. cl. e lind. dep. nev. esp
20	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cl. alg. nuv. folr.	N. Ceo cl. e lind.
21	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. dep. N. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. O. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.	N. O. dep. S. E. rij. C. cub.
24	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
25	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. e S. rij. Ceo cub. torv. long.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
26	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub. dep. N. E.	N. Ceo cub.
27	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
16	2	1	0	1	2

## NOVEMBRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 6 5	27 6 4	27 6 3	55	63	60	0	0	0
2	27 6 5	27 7 8	27 8 4	59	62	60	0	0	0
3	27 9 1	27 8 7	27 8 0	55	62	58	0	0	0
4	27 8 4	27 7 7	27 7 0	54	66	63	0	0	0
5	27 7 6	27 5 5	27 6 4	59	64	60	0	0	2
6	27 7 9	27 8 4	27 9 2	57	62	60	0	0	0
7	27 9 5	27 9 1	27 9 0	48	60	55	0	0	0
8	27 9 1	27 9 1	27 8 7	50	60	57	0	0	0
9	27 8 5	27 8 0	27 7 8	50	60	56	0	0	0
10	27 7 7	27 7 2	27 7 7	48	56	50	0	0	0
11	27 7 9	27 7 5	27 7 4	43	53	49	0	0	0
12	27 7 4	27 7 0	27 6 6	44	54	50	0	0	0
13	27 6 2	27 5 9	27 5 7	45	56	51	0	0	0
14	27 5 6	27 5 2	27 7 3	48	58	52	0	0	0
15	27 5 5	27 5 2	27 5 9	48	59	55	0	0	0
16	27 6 3	27 6 5	27 7 3	54	60	54	0	0	0
17	27 6 6	27 6 3	27 6 0	57	64	55	0	0	1,5
18	27 5 0	27 4 4	27 3 8	58	63	60	2	0	2
19	27 4 0	27 5 2	27 6 5	58	64	52	1,5	1,5	0
20	27 6 9	27 7 1	27 6 9	52	56	54	0	0	0
21	27 7 2	27 8 0	27 8 1	43	50	47	0	0	0
22	27 8 5	27 8 3	27 8 6	43	50	48	0	0	0
23	27 8 7	27 8 4	27 8 7	42	49	47	0	0	0
24	27 7 7	27 7 4	27 7 5	44	51	47	0	0	0
25	27 7 8	27 7 9	27 8 4	48	53	51	0	0	0
26	27 8 7	27 8 1	27 4 8	48	54	52	0	0	1,2
27	27 5 0	27 5 4	27 6 4	53	55	50	0,2	0,2	0,8
28	27 6 8	27 7 6	27 8 3	51	58	53	0	0	2,2
29	27 8 4	27 8 0	27 7 3	56	59	58	0	0	0
30	27 6 4	27 6 8	27 8 0	56	58	57	0,5	2,3	1,4

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.
Maior elevação -	27 9 5	Maior calor -	64	P. L. D.
Menor elevação	27 3 8	Menor calor -	42	1 7 3
Elevação media	27 7 3	Calor medio -	54	

NOVEMBRO.

Ventos e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. br. Ceo cl. e lind.	N. O. br. Ceo cl. e lind.
2	S. O. Ceo cub.	N. alg. nuv. folr.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	S. O. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub. dep. N.
6	N. rij. Ceo cl.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
8	N. E. Ceo. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
10	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	S. E. nev. alt.
16	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
17	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.
18	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
19	S. O. Ceo cub.	O. Ceo cub. dep. N. O.	N. O. nuv. folr.
20	N. nuv. folr.	N. nuv. folr.	N. E. nuv.
21	N. E. rij. alg. nuv. folr.	N. E. rij. alg. nuv. folr.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
25	N. E. Ceo cub.	N. nuv. folr.	N. Ceo cl.
26	N. Ceo cl.	N. O. dep. O. nuv. folr.	O. dep. S. O. Ceo cub.
27	S. O. dep. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
28	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
29	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
30	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. nuv. folr.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
26	5	0	0	0	0

## DEZEMBRO DE 1785.

Dia, do mez	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manha	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 8 9	27 8 6	27 9 4	50	53	51	0	0	0
2	27 9 3	27 9 2	27 8 5	48	56	54	0	0	2,2
3	27 8 3	27 7 8	27 7 6	56	60	57	1,4	0,8	4,3
4	27 8 9	27 9 0	27 9 8	54	55	53	0	0	0
5	27 9 1	27 8 7	27 6 0	50	55	54	0	0	0,3
6	27 5 6	27 5 9	27 9 0	54	55	51	4,3	0,2	3
7	27 9 7	27 8 8	27 8 3	47	54	53	0,2	0	2,7
8	27 8 4	27 8 8	27 7 4	53	56	54	0,3	0	5
9	27 7 1	27 6 4	27 4 8	53	54	53	0	0,1	2,3
10	27 4 3	27 4 1	27 2 4	49	53	51	0	0	1,9
11	27 0 8	27 1 9	27 2 1	54	53	50	0	4,1	1,5
12	27 2 7	27 3 5	27 5 4	49	53	52	0,2	0	1,5
13	27 6 8	27 7 3	27 8 3	48	53	49	0	0	0
14	27 8 5	27 8 3	27 8 4	48	54	52	0	0	0
15	27 8 1	27 7 8	27 6 6	49	54	51	0	0	0
16	27 5 8	27 5 3	27 6 1	52	56	53	0	0,5	5
17	27 6 8	27 7 5	27 7 8	50	53	49	0	0	0
18	27 7 5	27 7 4	27 7 0	44	52	48	0	0	0
19	27 6 7	27 6 2	27 6 1	43	53	51	0	0	0
20	27 5 9	27 5 9	27 4 8	48	55	52	0	0	0
21	27 4 0	27 3 4	27 2 7	50	58	54	0	0,2	1,2
22	27 1 6	27 0 7	26 11 1	52	54	52	0	1,2	4,4
23	26 11 7	26 11 8	27 0 6	53	54	52	0,3	0	1,3
24	26 11 0	27 0 2	27 2 2	50	54	52	0	0	1,1
25	27 1 3	27 0 6	27 0 4	49	56	53	0	0	4,6
26	27 2 0	27 2 1	26 9 6	50	54	50	0	0	11,4
27	26 9 4	26 10 3	27 1 0	50	52	50	0	3,2	0,5
28	27 1 8	27 2 7	27 1 3	49	50	49	2,4	1,9	0
29	27 0 5	27 0 2	27 0 0	46	50	46	0	0	6
30	27 0 0	26 11 6	26 10 7	48	53	50	0	0	0
31	27 0 0	27 1 4	27 2 9	52	53	50	0,2	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva		
Maior elevação	27 9 7	Maior calor - -	60	P.	L.	D.
Menor elevação	26 9 4	Menor calor - -	43	6	9	4
Elevação media	27 3 3	Calor medio - -	51			

DEZEMBRO.

Ventos e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
2	N. E. Ceo cl.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
3	S. O. Ceo cub. nev. esp.	S. O. Ceo cub. nev. esp.	S. O. Ceo cub.
4	N. alg. nuv. solt.	N. alg. nuv. solt.	N. E. br. Ceo cl.
5	N. Ceo cub.	N. dep. O. e S. O. C. cub.	S. O. rij. Ceo cub.
6	S. O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. rij. Ceo cub.	O. rij. dep. N.
7	N. e N. E. Ceo cub.	N. dep. O. Ceo cub.	N. O. br. Ceo cub.
8	N. O. br. Ceo cub.	N. O. br. Ceo cub.	N. O. br. Ceo cub.
9	O Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
10	N. nev. alt. dep. N. O.	O. Ceo cub.	O. rij. dep. S. O. C. cub.
11	S. O. muito rij. Ceo cub.	S. O. muito rij. Ceo cub. dep. O.	O. rij. dep. S. O. nuv. enter.
12	O. e S. O. rij. Ceo cub.	O. muito rij. nuv. solt.	O. rij. nuv. solt.
13	O. rij. nuv. solt.	O. br. Ceo cl.	E. br. e baixo e O. br. alt
14	E. br. Ceo cl.	E. e O. br. Ceo cl.	O. br. Ceo. cl.
15	E. br. Ceo cl. e lind.	O. br. Ceo cl. e lind.	O. br. dep. S. O. Ceo cub.
16	S. O. br. Ceo cub.	O. br. dep. S. O. Ceo cub.	S. O. dep. N. O. Ceo cub.
17	N. nuv. solt.	N. E. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
18	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.
19	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. C. cub. nev. esp. hum.
21	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	E. C. cub. nev. esp. hum.
22	S. E. C. cub. nev. esp. hum.	S. E. C. cub. nev. esp. hum.	S. E. C. cub. nev. esp. hum.
23	S. E. dep. O. Ceo cub. nev. esp. hum.	S. O. Ceo cub. nev. esp. hum.	O. Ceo cub. nev. esp.
24	O. Ceo cub. nev. esp.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
25	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. e N. O. torv. e temp.
26	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. muito rij. de temp. C. cub.
27	S. muito rij. de temp. C. cub.	S. rij. Ceo cub.	S. dep. N. O. C. cub.
28	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. dep. O. Ceo cub.
29	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	S. O. Ceo cub.
30	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. muito rij. de temp. Ceo cub.
31	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. rij. Ceo cub.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
7	20	4	2	3	1

*Resultado de todo o Anno*

BAROMETRO.			THERMOMETRO		PLUVIMETRO.		
	P. L. D.						
Maior elevação	27	10	2	Maior calor - - -	84	Total da chuva	
Menor elevação	26	9	6	Menor calor - -	35	P.	L
Elevação media	27	4	4	Calor medio - -	58	38	2
						1	

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
145	95	10	14	12	11

**E**Ste anno foi geralmente fertil, e abundante : a producção, e colheita dos grãos foi muito boa, principalmente a dos milhos : com tudo as fementeiras temporans do trigo, e as ferodias da fevada produzirão mais, e melhor : houve bastante vinho, e muito azeite : as frutas do sedo forão em abundancia, as do tarde não vingarão tão bem : a producção do gado foi abundante, e a sua creação feliz.

Este anno foi doentio mais que o passado : além das molestias ordinarias das estações grafarão na Primavera humas diarreias epidemicas : principiavaõ com ameaços de vertigens, vomitos, meteorismo do ventre, &c. a duração d'esta molestia não passava ordinariamente de cinco dias, e cedia facilmente ao uso dos absorventes, e diluentes, e ás sangrias, quando eraõ mais inflammatorias. No veraõ foi muito geral huma Ophthalmia : esta molestia cedia bem ao uso dos vitriolados, e agoa fria. No fim do veraõ, e por todo o Outono reinarão com excessõ as febres intermitentes ; mas cediaõ bem ao uso dos emeticos, purgantes, sangrias, e quina : nos ultimos mezes d'este anno tem havido bastantes bexigas.

ANNO DE 1785.

A Freguezia de Santo André d'esta Villa de Mafra, no districto de pouco mais de huma legoa, consta de 648 fogos, nestes houve este anno o seguinte.

Pessoas de Communhaõ	- - - -	23122
Menores	- - - -	182
Total	- - - -	23304
<i>Nasceraõ</i>		
Meninos	- - - -	49
Meninas	- - - -	40
Total	- - - -	89
<i>Morreraõ</i>		
Homens	- - - -	23
Mulheres	- - - -	16
Meninos	- - - -	12
Meninas	- - - -	11
Total	- - - -	62
Cazamentos em todo o anno	- - -	28

OBSER.

## OBSERVAÇÕES METEOROLOGICAS

*Feitas no Real Collegio de Mafra no anno de 1786.*

POR D. JOAQUIM DA ASSUMPÇÃO VELHO.

**A**S presentes Observações foram feitas com os mesmos Instrumentos, e do mesmo modo, que as do anno precedente.

JANEIRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noire	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 3 8	27 2 7	26 10 3	47	50	49	0	0	5,5
2	26 7 8	26 6 5	27 0 4	44	50	47	15,9	7,3	1,9
3	27 4 2	27 7 8	27 9 1	45	44	42	0	0	0
4	27 8 9	27 8 7	27 7 4	36	44	42	0	0	0
5	27 6 7	27 6 6	27 6 3	40	53	52	0	0	0
6	27 6 3	27 6 0	27 7 3	56	58	53	2,3	3	1,5
7	27 8 1	27 8 8	27 7 8	55	58	56	0,2	0,1	1,4
8	27 6 6	27 5 4	27 6 7	56	58	57	1,3	0	6,7
9	27 6 4	27 6 1	27 2 3	50	55	54	0	0	2,8
10	27 1 2	27 0 5	27 0 0	54	56	52	0	1	1,6
11	27 0 0	27 1 6	27 2 5	49	52	50	0,2		
12	27 3 4	27 5 3	27 5 7	46	54	47	1,6	0,4	1,7
13	27 4 9	27 4 7	27 4 6	47	52	50	1,3	0	2,4
14	27 4 2	27 3 7	27 3 0	54	55	54	0,5	1,8	3
15	27 3 5	27 5 2	27 7 0	54	56	53	0,5	0	0
16	27 7 0	27 6 7	27 1 0	49	52	50	0,8	0	2
17	27 4 0	27 4 4	27 4 4	53	52	50	0,6	0,4	1,4
18	27 3 3	27 1 9	27 0 0	48	52	48	1,6	0	3
19	27 2 1	27 4 5	27 7 0	50	52	50	0,5	0	0
20	27 7 4	27 7 8	27 9 0	45	51	49	0	0	0
21	27 9 5	27 9 7	27 10 8	49	55	53	0	0	0
22	27 11 3	27 10 7	27 11 2	40	56	53	0	0	0
23	27 10 6	27 10 0	27 8 1	49	55	53	0	0	0
24	27 7 3	27 6 5	27 7 4	50	55	53	0	0,6	1,2
25	27 8 0	27 8 3	27 9 0	47	51	49	0	0	0
26	27 9 3	27 9 6	27 10 5	46	56	53	0	0	0
27	27 11 4	27 11 1	27 11 1	47	56	54	0	0	0
28	27 11 7	27 11 0	27 10 8	50	56	53	0	0	0
29	27 10 3	27 10 2	27 10 1	49	58	54	0	0	0
30	27 10 5	27 10 1	27 10 4	49	58	55	0	0	0
31	27 11 1	27 10 9	27 11 1	47	56	50	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevação	27 11 7	Maior calor	- - 58	Total da chuva. P. L. D. 6 6 0
Menor elevação	26 6 5	Menor calor	- 36	
Elevação media	27 3 2	Calor medio	- 51	

## JANEIRO.

Ventos, e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. E. muito rij. de temp. Ceo cub.
2	S. E. muito rij. de temp. trov.	S. E. rij. Ceo cub. hum.	S. E. dep. N. O. muito rij. de temp.
3	N. O. muito rij. de temp.	N. E. rij. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. dep. E. C. cl. e lind.
5	E. C. cl. dep. S. E. C. cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. dep. S. nev. esp. hum.
6	S. O. rij. nev. esp. grand. hum.	S. O. muito rij. nev. esp. grand. hum.	S. O. muito rij. nev. esp. grande hum.
7	S. O. br. nev. esp. grand. hum.	S. O. br. nev. esp. grand. hum.	S. O. br. nev. esp. grande hum.
8	S. O. br. nev. esp. grand. hum.	S. O. rij. nev. esp. grand. hum.	S. O. rij. dep. N. O.
9	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. dep. S. O. rij. nev. esp.
10	S. O. rij. Ceo cub. hum.	S. O. rij. N. O. trov. e min.	S. O. rij. C. cub. trov. ao log.
11	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. e O. Ceo cub.
12	O. Ceo cub.	N. O. Nuv. enter.	N. nuv. enter.
13	S. E. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.
14	S. O. muito rij. de temp. hum.	S. O. muito rij. de temp.	S. O. muito rij. de temp. hum.
15	S. O. rij. C. cub. grand. hum.	S. O. rij. C. cub. grand. hum.	N. O. Ceo cl. secco
16	O. br. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.	O. br. dep. S. O. muito rij. grand. temp.
17	O. rij. Ceo cub.	O. dep. N. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.
18	O. br. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.	N. O. e dep. S. O. Ceo cub.
19	O. Ceo cub.	N. E. br. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
20	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. junt. a ter. e S. O. alt.
21	E. Ceo cl.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
22	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.
23	O. muito br. Ceo cl.	O. muito br. Ceo cl.	S. O. br. Ceo cub.
24	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. C. cub. N. E. C. cl.
25	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
26	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
27	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. E. br. Ceo cl. e lind.	O. br. dep. N. O. br. C. cl.	E. br. Ceo cl. e lind.
29	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. dep. N. O. br. C. cl.	E. br. Ceo cl. e lind.
30	E. br. Ceo cl. e lind.	O. dep. N. O. datr. N. E.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	E. Ceo cl. e lind.	E. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de grand. humid.	de vent.	temp. de trov.
4	14	15	3	6	5

FEVEREIRO DE 1786.

Dia. do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 11 4	27 10 7	27 8 7	46	53	50	0	0	0
2	27 8 2	27 8 2	27 8 1	49	51	46	0	0	0
3	27 7 3	27 7 3	27 8 7	43	50	46	0	0,2	0
4	27 9 3	27 9 4	27 11 4	39	48	47	0	0	0
5	27 11 9	27 11 5	27 11 3	41	50	48	0	0	0
6	27 11 5	27 11 3	27 11 4	46	53	49	0	0	0
7	27 11 2	27 10 7	27 10 3	46	52	48	0	0	0
8	27 10 3	27 10 3	27 10 3	47	53	49	0	0	0
9	27 10 5	27 10 2	27 9 5	48	54	50	0	0	0
10	27 11 2	27 9 6	27 9 3	49	56	50	0	0	0
11	27 9 8	27 9 2	27 9 2	47	56	52	0	0	0
12	27 9 4	27 9 3	27 8 8	50	58	53	0	0	0
13	27 9 1	27 8 8	27 8 4	52	64	60	0	0	0
14	27 8 2	27 7 8	27 7 7	53	64	60	0	0	0
15	27 7 4	27 7 2	27 7 8	52	58	53	0	0	0
16	27 8 3	27 7 8	27 6 4	49	59	56	0	0	0
17	27 6 8	27 6 6	27 7 6	55	60	53	0	0	0
18	27 7 8	27 7 3	27 8 9	53	58	55	0	0	0
19	27 8 8	27 8 7	27 8 9	53	58	57	0	0	0
20	27 9 0	27 8 8	27 7 0	54	59	57	0	0	0
21	27 7 2	27 6 1	27 2 4	53	58	56	1,2	1,8	12,4
22	27 1 0	27 0 7	27 2 9	52	50	47	2	3,9	3,9
23	27 3 7	27 3 5	27 4 3	48	54	50	0,6	0,2	12,4
24	27 5 0	27 4 8	27 5 0	49	54	50	0	0	0
25	27 4 1	27 0 6	26 8 6	47	53	52	0	0	5,3
26	26 9 7	26 10 1	26 11 0	47	52	50	5	0,2	0
27	26 11 6	26 11 9	27 0 9	47	53	49	0,8	0,4	1,0
28	27 1 0	27 0 9	27 0 4	47	52	50	0,5	0,5	11,0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevação	27 11 9	Maior calor - -	64°	Total da chuva.
Menor elevação	26 8 6	Menor calor - -	39	P. L. D.
Elevação media	27 3 5	Calor medio - -	52	5 3 3

## F E V E R E I R O .

Ventos, e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. nev. alt.	N. N. E. nev. alt.	N. E. rij. nev. alt.
2	N. E. rij. nev. alt.	N. rij. nev. alt.	N. E. rij. nev. alt.
3	N. E. rij. nev. alt.	Var. ent. N.E. e N. O.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. e N. Ceo. cl. e lind.	N. nev. alt.
7	N. nev. alt.	N. e O. nev. alt.	N. e N. E. nev. esp.
8	N. e N. E. nev. esp. dep. Ceo cl.	N. e N. E. Ceo cl.	N. e N. E. Ceo cl.
9	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt. Ceo. cub.
10	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt. dep. N. esp.
11	N. nev. esp. dep. N. E. C. cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
12	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
13	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo. cl. e lind.	E. rij. Ceo cl. e lind.
14	E. rij. Ceo cl. e lind.	E. rij. Ceo emp.	E. e S. E. muito. rij. C. emp.
15	E. e S. E. rij. Ceo emp.	E. e S. E. rij. Ceo emp.	E. e S. E. rij. Ceo emp.
16	E. nev. alt.	E. nev. alt.	E. e S. E. nev. alt.
17	S. e S. O. nuv. car.	S. e S. O. nuv. car.	S. e S. O. nuv. car.
18	S. e S. O. nuv. car.	S. e S. O. nuv. car.	S. e S. O. nuv. car.
19	E. e S. E. nuv. folr.	S. e S. O. nuv. car.	S. br. nev. esp.
20	O. nuv. folr.	N. O. nuv. folr.	O. e N. O. nuv. car.
21	O. nuv. folr.	O. nuv. folr.	S. e S. O. nuv. car.
22	N. O. nuv. car.	N. e N. O. nuv. car.	N. O. nuv. car.
23	N. O. nuv. car.	N. O. nuv. car.	N. O. nuv. car.
24	O. nuv. enter.	O. nuv. enter.	E. Ceo cl.
25	S. E. Ceo. cub.	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. e S. O. nuv. car.
26	S. O. rij. nuv. car.	S. O. nuv. car.	S. E. br. Ceo cl. e lind.
27	S. e S. E. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.	N. O. e S. E. trov. e chuv. de ped.
28	S. O. Ceo cub.	S. O. e O. C. cub. nuv. car.	N. O. e S. E. trov. e pedr.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	7	2	0	0	2

MAR-

MARÇO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manha	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 0 4	27 0 1	27 0 0	45	50	48	3	0	2,8
2	27 0 8	27 1 1	26 11 4	46	52	49	0	0	4,2
3	27 0 4	27 1 6	27 3 9	47	52	49	1,3	0	10
4	27 4 1	27 2 9	27 0 7	48	55	53	0	2	2
5	26 11 0	26 9 2	26 11 1	55	56	53	5,7	1,3	1,5
6	26 11 8	27 1 7	27 4 7	52	53	52	0,4	0	0
7	27 4 8	27 4 3	27 2 1	49	55	52	0	2,2	3,1
8	27 3 6	27 4 0	27 2 9	48	56	52	0,5	0	3,7
9	27 2 5	27 2 0	27 1 4	55	58	54	0	0	2,3
10	27 2 5	27 3 8	27 4 8	50	59	56	0	0	0
11	27 5 2	27 5 6	27 6 6	48	58	54	0	0	0
12	27 6 7	27 6 6	27 6 2	53	59	56	0	0	0
13	27 6 0	27 5 9	27 5 0	53	58	55	0	0,7	0,8
14	27 5 5	27 5 3	27 4 0	55	57	56	0	0	3,6
15	27 4 5	27 4 6	27 3 4	51	58	56	0	0	0,9
16	27 3 0	27 2 8	27 2 6	56	58	57	0,6	0,9	6,7
17	27 1 4	27 2 8	27 3 8	56	58	55	1,2	0,2	0,9
18	27 4 9	27 4 9	27 2 6	49	53	49	0	0	3,5
19	27 2 0	27 4 0	27 5 1	45	52	48	0	0	6
20	27 6 0	27 6 6	27 7 4	50	55	54	1	0	3
21	27 7 7	27 7 5	27 7 9	52	56	53	0,2	0,2	0,8
22	27 7 6	27 6 5	27 5 6	51	56	53	0	0	0
23	27 5 5	27 6 2	27 7 3	52	53	52	1,2	2,4	0
24	27 7 8	27 8 6	27 8 7	49	55	52	0	0	0
25	27 8 9	27 8 4	27 7 6	50	57	53	0	0	0
26	27 7 0	27 6 6	27 6 5	50	58	54	0	0	0
27	27 6 7	27 6 6	27 6 7	50	58	54	0	0	0
28	27 7 0	27 6 7	27 6 0	49	58	52	0	0	0
29	27 5 4	27 4 8	27 3 2	46	56	51	0	0	0
30	27 2 8	27 2 6	27 1 0	44	50	48	0	3,6	4,8
31	27 2 0	27 3 3	27 4 0	50	55	50	0,4	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva		
Maior elevação	27 8 9	Meior calor - -	59°	P.	L.	D.
Menor elevação	26 9 2	Menor calor -	44	6	7	6
Elevação media	27 4 2	Calor medio -	53			

## MARÇO.

Ventos, e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. e S. E. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.
2	S. E. nuv. enter.	S. O. nuv. enter.	E. e S. O. nuv. enter.
3	S. O. Ceo cub. nuv. car.	O. br. nuv. enter.	O. br. Ceo cl.
4	O. br. Ceo cl. dep. S. E. cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. dep. S. muito rij. C. cub.
5	S. O. muito rij. de temp. Ceo cub.	S. muito rij. de temp. Ceo cub. hum.	S. e O. muito rij. de temp. trov.
6	S. O. rij. de temp. C. cub.	O. rij. de temp. Ceo cub.	O. Ceo cub.
7	O. Ceo cub.	O. dep. S. O. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.
8	S. E. br. Ceo cub.	S. E. br. Ceo cub.	S. e S. O. br. Ceo cub.
9	S. O. br. Ceo cub. nev. esp. hum.	S. O. e S. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.
10	N. E. nev. esp.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. E. e E. nuv. enter.	N. E. e E. Ceo cl.	S. E. nev. alt.
12	S. E. e S. C. cub nev. alt.	O. Ceo cub. nev. alt.	O. nev. alt.
13	S. O. nev. alt.	S. O. nev. esp. hum.	S. O. Ceo cub. hum.
14	S. O. nev. alt. hum.	S. O. nev. alt. hum.	S. O. dep. O. Ceo cub.
15	S. O. Ceo cub. dep. O.	S. O. e O. Ceo cub.	S. O. nev. esp. hum.
16	S. O. Ceo cub. hum.	S. O. Ceo cub. hum.	S. O. muito rij. de temp. hum.
17	S. O. rij. de temp. hum.	S. O. rij. Ceo cub. hum.	O. rij. nuv. enter.
18	O. rij. nuv. enter.	O. nuv. enter.	S. O. e N. O. C. cub. trov.
19	S. O. rij. Ceo cub. trov.	S. O. e N. O. trov. e raios na Ig. $2\frac{1}{4}$	S. O. e O. Ceo Cub.
20	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
21	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
22	O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
23	S. O. e O. Ceo cub.	O. nuv. enter.	O. nuv. enter.
24	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	N. O. e N. Ceo. cl.
25	N. dep. O. nuv. enter.	O. nuv. enter.	O. muito br. Ceo cl.
26	O. br. nuv. enter.	O. br. nuv. enter.	O. br. d. p. N. nuv. enter.
27	N. nuv. enter.	N. nuv. enter.	N. nev. alt.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cub. nev. alt.	E. Ceo cub.
30	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.
31	N. Ceo cub.	N. e O. Ceo cub.	E. Ceo cub.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
5	17	1	5	2	3

ABRIL

ABRIL DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 4 0	27 3 6	27 1 3	49	54	50	0,6	0	3,8
2	27 0 0	26 11 3	26 10 2	50	53	52	1,7	4,5	3,4
3	26 8 4	26 7 5	26 7 0	49	54	49	1,8	9,9	0,7
4	26 7 2	26 11 0	27 1 5	50	53	52	4,8	0,9	2,2
5	27 3 3	27 3 9	27 5 6	52	56	54	1,3	0	0,8
6	27 6 1	27 6 4	27 6 9	50	54	52	0,2	0	0
7	27 7 0	27 6 4	27 5 6	50	55	54	0	0	4,9
8	27 5 4	27 5 1	27 5 1	55	56	54	1,9	0,4	3
9	27 5 7	27 5 6	27 6 0	51	55	52	0	0	0
10	27 5 9	27 4 5	27 3 3	51	56	54	0	0	1,8
11	27 3 7	27 5 6	27 6 8	52	57	54	1,7	0	0
12	27 7 2	27 7 8	27 8 2	50	58	50	0	0	0
13	27 8 6	27 8 8	27 8 6	49	62	55	0	0	0
14	27 8 3	27 7 8	27 7 6	52	62	58	0	0	0
15	27 7 3	27 7 0	27 6 3	52	61	57	0	0	0
16	27 6 2	27 6 1	27 5 4	52	67	61	0	0	0
17	27 5 0	27 4 5	27 3 2	60	71	64	0	0	0
18	27 7 2	27 1 2	27 0 1	60	72	65	0	0	0
19	27 0 8	27 1 5	27 2 4	59	66	58	0	0	0
20	27 3 6	27 4 9	27 6 0	53	58	54	0	0	0
21	27 6 0	27 6 4	27 6 6	51	58	53	0	0	0
22	27 6 9	27 7 0	27 7 2	52	60	54	0	0	0
23	27 7 4	27 7 2	27 6 3	52	61	55	0	0	0
24	27 5 5	27 4 5	27 4 6	55	64	60	0	0	0
25	27 3 5	27 4 4	27 5 3	56	59	56	2,3	4,2	0
26	27 5 7	27 5 7	27 5 3	53	62	57	0	0,8	0,3
27	27 5 0	27 4 3	27 1 8	56	60	54	0,5	0,5	0,4
28	27 0 4	26 11 3	26 11 2	56	60	55	2	0,8	3,2
29	26 11 6	26 11 1	26 10 7	53	58	52	0,6	0,7	6,8
30	26 11 1	27 1 0	27 2 3	52	60	55	0	1,2	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.	Maior calor - - 72°	Total da chuva.
Maior elevação -	27 8 8	Menor calor - 49	P. L. D.
Menor elevação	26 7 0	Calor medio - 55	6 2 6
Elevação media	27 4 5		

ABRIL

## A B R I L.

Ventos, e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	S. E. Ceo cub.	S. Ceo cub.	E. e S. O. trov. long.
2	E. dep. S. Ceo cub.	S. muito rij. de temp. C. cub.	S. rij. trov. muito ao long.
3	S. rij. Ceo cub.	S. muito rij. de temp. dep. S. O.	S. O. dep. S. muito rij. de temp.
4	S. O. muito rij. de temp.	S. O. dep. O. muito rij.	N. O. rij. Ceo cub.
5	N. O. rij. Ceo cub.	N. O. rij. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.
6	O. rij. nuv. folt. e car.	O. rij. nuv. folt. e car.	O. br. nuv. folt. e car.
7	O. nuv. car.	S. O. Ceo cub.	S. O. nev. esp. hum.
8	S. O. dep. O. nev. esp. hum.	O. nev. esp. hum.	O. Ceo cub.
9	O. rij. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.	O. Ceo cub.
10	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
11	O. Ceo cub.	O. Ceo cub. dep. N.	N. nuv. folt.
12	N. nuv. folt.	N. nuv. folt.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
14	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. O. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
15	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
17	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. e S. Ceo cub.
19	N. E. e S. Ceo cub.	S. S. O. e O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
20	N. Ceo cub.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. E. e N. Ceo cub.	N. e N. O. Ceo cub.	N. E. Ceo cl. e lind.
22	N. E. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cl.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. dep. S. E. Ceo cub.	O. Ceo cub.	S. E. br. Ceo cub.
25	S. E. dep. O. C. cub. e car.	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cl.
26	N. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. e S. Ceo cub.
27	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
28	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. Ceo cub. nuv. car. trov.	S. Ceo cub. nuv. car.
29	S. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
30	E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.	N. Ceo cl. dep. nev. alt.

## Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
8	14	2	2	2	3

M A I-

MAIO DE 1786.

Dia do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 3 7	27 3 9	27 4 1	54	57	54	0	0	0
2	27 5 6	27 6 2	27 6 8	51	58	53	0	0	0
3	27 6 6	27 6 5	27 6 5	50	56	54	0	0	0
4	27 6 6	27 6 8	27 7 2	50	61	53	0	0	0
5	27 7 3	27 7 2	27 6 6	50	58	55	0	0	0
6	27 5 9	27 5 3	27 4 8	54	58	55	0	2,7	3,3
7	27 4 8	27 4 7	27 2 5	54	63	59	0	0,2	3
8	27 2 2	27 1 9	27 0 9	54	60	57	2,9	4,4	13,5
9	27 1 8	27 3 8	27 4 7	55	58	56	4,1	0	0,2
10	27 5 7	27 5 9	27 4 8	54	60	57	0	0	0
11	27 3 6	27 3 0	27 5 7	55	60	52	0	4,8	0,5
12	27 6 8	27 8 6	27 8 9	51	58	54	0,5	0	0
13	27 9 3	27 8 0	27 7 4	51	62	58	0	0	0
14	27 7 6	27 7 7	27 7 7	57	69	62	0	0	0
15	27 7 9	27 7 7	27 7 4	56	68	59	0	0	0
16	27 7 5	27 7 4	27 7 3	56	64	58	0	0	0
17	27 7 3	27 7 2	27 6 6	54	62	56	0	0	0
18	27 6 5	27 6 4	27 6 4	56	60	56	0	0	0
19	27 6 4	27 6 8	27 7 0	53	61	55	0	0	0
20	27 7 6	27 7 4	27 7 5	52	64	58	0	0	0
21	27 7 8	27 7 6	27 8 0	56	69	61	0	0	0
22	27 7 3	27 7 9	27 7 4	62	70	64	0	0	0
23	27 7 4	27 7 0	27 7 0	64	74	67	0	0	0
24	27 6 9	27 6 4	27 6 4	63	73	66	0	0	0,3
25	27 6 4	27 6 3	27 6 2	62	68	60	0	6,7	0
26	27 6 5	27 6 6	27 6 8	59	70	66	0	0	0
27	27 6 8	27 6 9	27 7 4	60	73	69	0	0	0
28	27 7 5	27 7 0	27 6 8	67	77	60	0	0	0
29	27 7 5	27 7 1	27 6 8	67	78	67	0	2,3	0
30	27 7 5	27 7 2	27 7 0	66	76	68	0	0	0
31	27 7 2	27 7 0	27 6 8	67	77	70	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevação	27 9 3	Maior calor	- - 78°	Total da chuva.
Menor elevação	27 0 9	Menor calor	- 50	P. L. D.
Elevação media	27 6 4	Calor medio	- 60	4 1 4

## M A I O.

Ventos , e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noire.
1	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.
2	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. O. e O. nev. alt.	N. O. e O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
5	N. O. nev. alt.	O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.
6	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nev. csp.	S. O. Ceo cub. nev. csp.
7	N. dep. O. Ceo cub.	O. nev. alt.	O. Ceo cub.
8	O. dep. S. O. rij. de temp. hum.	S. O. rij. nev. csp. hum.	S. O. nuv. car. hum.
9	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub. trov. ao long.
10	S. O. muito rij. nuv. folr.	S. O. muito rij. nuv. folr.	S. O. dep. S. nuv. enter.
11	S. muito rij. de temp. C. cub.	S. e S. O. muito rij. de temp.	S. O. Ceo cub.
12	S. O. rij. Ceo cub.	O. nuv. enter.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
13	N. E. br. Ceo emp.	N. E. br. Ceo emp.	N. E. e S. O. br. Ceo emp.
14	N. E. junt. a ter. e S. O. alt.	N. E. junt. a ter. e S. O. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. nev. esp.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.
17	N. E. dep. N. nev. esp.	muito var. nev. esp.	Var. ent. N. E. N. e N. O.
18	N. rij. Ceo cub.	N. rij. Ceo cub.	N. rij. Ceo cl.
19	N. rij. Ceo cl.	N. rij. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. E. e N. Ceo cl. e lind.	N. E. e E. Ceo cl. e lind.
22	E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
24	E. dep. O. Ceo cl.	E. e N. O. trov. tod. a tar.	E. br. trov. até ás 10 hor.
25	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. e N. trov. Ceo cub	N. O. Ceo cub.
26	N. e N. E. Ceo cub.	N. e N. E. C. cub. ar. de trov.	N. e N. E. Ceo cub.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. ar. de trov.	N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. dep. trov.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	O. br. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humid.	de temp.	de trov.
13	8	2	1	2	4

JUNHO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 6 8	27 6 7	27 7 0	64	76	68	0	0	0
2	27 7 2	27 7 1	27 7 4	64	75	69	0	0	0
3	27 7 6	27 7 3	27 7 4	66	76	67	0	0	0
4	27 7 5	27 7 2	27 7 2	62	74	64	0	0	0
5	27 7 1	27 7 0	27 7 2	59	73	66	0	0	0
6	27 6 8	27 6 6	27 6 5	67	76	70	0	0	0,4
7	27 6 6	27 6 5	27 6 3	68	72	66	0	1,3	0
8	27 6 0	27 5 8	27 5 4	64	70	65	0	0	0
9	27 5 2	27 5 1	27 4 6	62	69	62	0	0	0
10	27 4 4	27 3 7	27 2 7	60	68	63	0	0	2,5
11	27 3 7	27 4 9	27 5 7	62	64	60	2,2	0	0
12	27 5 6	27 5 4	27 5 5	59	66	62	0	0,5	1,1
13	27 5 7	27 5 5	27 5 6	58	66	61	0	0,4	0,7
14	27 5 7	27 5 3	27 4 5	59	65	60	2,7	0	2,9
15	27 4 7	27 4 7	27 4 8	57	64	60	4,3	0,6	3,7
16	27 5 0	27 5 4	27 4 2	57	66	60	0	0	5,8
17	27 4 2	27 4 3	27 4 4	59	67	61	0,6	0	0
18	27 5 1	27 5 1	27 5 3	60	65	60	0	0	0
19	27 6 2	27 5 7	27 6 2	59	66	59	0	0	6,5
20	27 6 8	27 7 3	27 7 2	57	66	62	0,5	0	1,5
21	27 7 9	27 8 0	27 7 5	58	67	62	0,6	0	0
22	27 7 4	27 7 6	27 8 5	58	66	63	1,9	0	0
23	27 8 6	27 8 4	27 8 9	60	69	65	0	0	0
24	27 9 3	27 8 7	27 8 7	58	72	64	0	0	0
25	27 8 3	27 8 4	27 7 4	64	78	64	0	0	0
26	27 7 1	27 7 8	27 7 3	66	77	66	0	0	0
27	27 8 2	27 8 0	27 8 1	62	70	64	0	0	0
28	27 8 0	27 7 6	27 7 5	60	70	64	0	0	0
29	27 7 9	27 7 7	27 7 4	60	76	69	0	0	0
30	27 7 6	27 7 3	27 7 4	63	75	66	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.	Maior calor - - 78°	Total da chuva.		
Maior elevação -	27 9 3	Menor calor - 57	P.	L.	D.
Menor elevação	27 2 7	Calor medio - 65	3	4	7
Elevação media	27 6 5				

## JUNHO.

Ventos, e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N.E. e N. O. C. cl. e lind.	N.O. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	N. E. dep. O. C. cl. e lind.	N. O. e N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. trov. fort. e prox.	N. E. trov. fort. e prox.
7	N. E. trov. ao long.	N. E. e S. O. trov. ao long.	N. E. Ceo cl.
8	N. e N. O. Ceo cl.	O. e N. O. nev. alt.	N. O. dep. N. nev. alt.
9	N. O. nev. alt.	N. O. e O. nev. alt.	N. O. nev. alt.
10	N. O. Ceo cub. nev. alt.	S. O. nev. alt. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.
11	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. e O. Ceo cub.	S. O. e O. nuv. enter.
12	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. e S. rij. nuv. car.	S. O. e S. rij. Ceo cub.
13	S. e S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.
14	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
15	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
16	S. O. Ceo cub.	S. O. nuv. enter.	S. O. e S. Ceo cub. nuv. car.
17	S. e S. O. Ceo cub.	S. O. e O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
18	S. O. e O. nuv. enter.	O. nuv. enter.	O. e S. O. nuv. enter.
19	S. O. nuv. enter.	O. Ceo cl.	S. O. e O. nuv. car.
20	S. O. nuv. car.	O. br. Ceo cl.	S. O. nuv. car.
21	S. O. nuv. car.	O. nuv. enter.	O. br. Ceo cl.
22	S. O. nuv. car.	N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.
23	N. e N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
24	N. e N. E. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
25	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
26	N. e N. O. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.
27	N. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cl.	N. Ceo cl.
28	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. br. nev. esp. dep. C. cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
16	10	1	0	0	2

JULHO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 7 5	27 7 4	27 7 6	62	71	66	0	0	0
2	27 8 0	27 7 9	27 7 4	62	68	66	0	0	0
3	27 7 5	27 7 1	27 7 0	62	74	70	0	0	0
4	27 7 0	27 6 8	27 6 9	74	82	72	0	0	0
5	27 7 5	27 7 5	27 7 7	74	84	76	0	0	0
6	27 7 9	27 7 8	27 8 0	72	79	71	0	0	0
7	27 8 5	27 8 4	27 7 7	66	72	66	0	0	0
8	27 7 8	27 7 3	27 6 2	64	70	62	0	0	0
9	27 6 0	27 5 6	27 5 8	62	67	64	0	0	0
10	27 6 0	27 6 2	27 7 9	62	79	62	0	0	0
11	27 7 9	27 7 9	27 8 2	59	68	63	0	0	0
12	27 8 2	27 8 1	27 8 1	59	71	65	0	0	0
13	27 8 1	27 8 0	27 7 6	62	82	75	0	0	0
14	27 7 1	27 6 8	27 6 7	72	83	73	0	0	0
15	27 6 6	27 6 4	27 6 2	73	83	73	0	0	0
16	27 6 0	27 6 2	27 7 4	74	89	78	0	0	0
17	27 7 6	27 7 7	27 7 9	75	84	74	0	0	0
18	27 8 0	27 8 1	27 7 7	67	73	68	0	0	0
19	27 7 5	27 7 0	27 6 5	65	71	66	0	0	0
20	27 6 2	27 6 0	27 5 8	63	72	68	0	0	0
21	27 5 7	27 5 8	27 6 5	64	74	70	0	0	0
22	27 6 7	27 6 6	27 6 5	64	72	68	0	0	0
23	27 6 4	27 6 3	27 6 5	63	71	66	0	0,8	0
24	27 6 7	27 6 6	27 6 5	64	70	66	0	0	0
25	27 7 0	27 7 0	27 7 5	64	72	67	0	0	0
26	27 7 5	27 7 4	27 7 6	64	74	66	0	0	0
27	27 7 3	27 7 0	27 6 5	64	72	67	0	0	0
28	27 6 9	27 6 8	27 6 7	63	71	67	0	0	0
29	27 6 8	27 7 5	27 7 1	59	72	63	0	0	0
30	27 6 7	27 6 5	27 6 1	58	73	66	0	0	0
31	27 6 6	7 9 9	27 6 4	80	78	70	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.	Maior calor - -	83	Total da chuva. P. L. D.
Maior elevação	27 8 5	Menor calor - -	59	
Menor elevação	27 5 6	Calor medio - -	45	
Elevação media	27 7 0			0 0 8

## JULHO.

Ventos, e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. nev. alt.
3	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. e O. muito br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	O. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. nev. alt.
7	N. e N. E. nev. alt.	N. e N. E. nev. alt.	N. e O. nev. alt.
8	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. Ceo cl. e lind.
9	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	N. O. nev. alt.
10	N. O. nev. alt.	N. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. e E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
17	E. e S. E. Ceo cl.	O. muito br. Ceo cl.	O. br. Ceo cl.
18	O. br. Ceo cl.	O. N. E. br. Ceo cub.	N. E. e N. Ceo cub.
19	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
20	N. e N. O. Ceo cub.	N. e N. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
21	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.
22	S. O. br. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.	S. O. br. relamp. e trov. ao long.
23	S. O. e N. E. Ceo cub.	N. E. e S. O. trov. ao long.	N. O. Ceo cub.
24	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
25	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
26	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub. nev. esp.
27	N. Ceo cub. nev. esp.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub.
28	N. Ceo cl.	N. O. alg. nuv.	N. br. Ceo cub.
29	N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
30	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
31	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. Ceo cl.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
19	1	1	0	0	2

AGOS-

AGOSTO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 6 7	27 6 7	27 6 8	58	79	70	0	0	0
2	27 6 9	27 7 2	27 6 6	63	76	65	0	0	0
3	27 6 3	27 6 1	27 6 4	61	70	64	0	0	0
4	27 5 8	27 5 3	27 5 7	61	69	63	0	0	0
5	27 6 7	27 7 1	27 6 8	64	70	66	0	0	0
6	27 7 8	27 7 5	27 7 5	62	68	64	0	0	0
7	27 7 0	27 7 1	27 7 5	60	68	65	0	0	0
8	27 7 4	27 7 2	27 7 3	60	69	64	0	0	0
9	27 7 3	27 6 7	27 6 6	62	70	65	0	0	0
10	27 6 4	27 6 3	27 6 3	63	70	66	0	0	0
11	27 6 9	27 7 0	27 6 8	64	70	66	0	0	0
12	27 7 0	27 7 5	27 7 2	62	71	66	0	0	0
13	27 7 2	27 7 5	27 7 3	62	72	67	0	0	0
14	27 7 2	27 6 8	27 6 8	64	73	68	0	0	0
15	27 6 5	27 6 6	27 6 7	60	69	66	0	0	0
16	27 6 3	27 6 5	27 6 3	59	68	64	0	0	0
17	27 6 6	27 7 1	27 6 4	57	72	64	0	0	0
18	27 6 2	27 6 5	27 6 9	68	80	70	0	0	0
19	27 7 0	27 6 8	27 6 3	60	68	64	0	0	0
20	27 6 2	27 6 0	27 6 8	61	69	64	0	0	0
21	27 6 7	27 6 8	27 6 8	61	66	61	0	0	0
22	27 6 9	27 6 9	27 7 7	59	66	63	0	0	0
23	27 8 1	27 8 2	27 8 3	56	69	62	0	0	0
24	27 8 4	27 8 2	27 8 0	57	70	61	0	0	0
25	27 8 0	27 7 9	27 7 9	64	79	70	0	0	0
26	27 7 7	27 7 5	27 7 6	67	80	70	0	0	0
27	27 7 2	27 7 0	27 7 5	68	80	73	0	0	0
28	27 7 8	27 7 6	27 7 7	60	70	64	0	0	0
29	27 7 4	27 7 9	27 8 0	60	65	62	0	0	0
30	27 8 3	27 8 0	27 7 8	61	78	72	0	0	0
31	27 7 8	27 7 3	27 7 2	73	82	73	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevação	27 8 4	Maior calor - -	80°	Total da chuva
Menor elevação	27 5 3	Menor calor -	57	P. L. D.
Elevação media	27 7 1	Calor medio -	66	0 0 0

AGOS-

## AGOSTO.

Ventos, e estado do Cco.

<i>Dias</i> do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.
2	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.
3	N. Cco cl.	N. Cco cl.	N. O. Cco cl.
4	N. O. Cco cl.	N. O. Cco cl.	N. Cco cl.
5	N. E. Cco cl. e lind.	N. Cco cl.	N. Cco cl. e lind.
6	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.
7	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.
8	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.
9	N. E. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.	N. E. Cco cl. e lind.
10	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl.	N. Cco cl. e lind.
11	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.
12	N. Cco cl.	N. Cco cl.	N. Cco cl. e lind.
13	N. nev. alt.	N. Cco cl. dep. nev. alt.	N. O. nev. alt.
14	N. nev. alt.	N. Cco cl.	N. Cco cl.
15	N. nev. alt. dep. Cco cl.	N. Cco cl.	N. Cco cl.
16	N. Cco cl.	N. rij. Cco cl.	N. Cco cl.
17	N. E. br. Cco cl. e lind.	N. rij. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.
18	N. E. e E. br. Cco cl.	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. e lind.
19	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl.	N. Cco cl. e lind.
20	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl.	N. Cco cl.
21	N. nev. alt. dep. Cco cl.	N. rij. Cco cl.	N. Cco cl.
22	N. nev. alt. dep. Cco cl.	N. rij. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. Cco cl. e lind.
23	N. E. rij. Cco cl. e lind.	N. E. rij. Cco cl. e lind.	N. E. Cco cl. e lind.
24	N. E. Cco cl. e lind.	N. E. Cco cl. e lind.	N. E. Cco cl. e lind.
25	N. E. e E. Cco cl. e lind.	N. E. e E. Cco cl. e lind.	N. E. e E. Cco cl. e lind.
26	E. br. Cco cl. e lind.	E. e N. E. Cco cl. e lind.	N. E. Cco cl. e lind.
27	N. E. Cco cl. e lind.	N. E. Cco cl. e lind.	N. E. e N. nev. alt.
28	N. Cco cl. e lind.	N. Cco cl. dep. nev. alt.	N. Cco cub. nev. alt.
29	N. Cco cub. nev. alt.	N. e N. E. Cco cl. e lind.	N. E. Cco cl. e lind.
30	N. E. Cco cl. e lind.	N. E. Cco cl.	N. E. Cco cl. e lind.
31	N. E. Cco cl.	N. E. Cco cl.	N. E. e E. Cco emp.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	21	4	1	3	1

SETEMBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 7 1	27 7 0	27 7 6	68	76	72	0	0	0
2	27 7 8	27 8 0	27 8 1	63	68	62	0	0	0
3	27 8 4	27 8 4	27 7 8	60	66	63	0	0	0
4	27 7 5	27 7 7	27 7 7	63	67	61	0	0	0
5	27 7 6	27 7 5	27 7 4	56	66	61	0	0	0
6	27 7 4	27 7 2	27 7 0	63	72	64	0	0	0
7	27 7 2	27 7 0	27 7 4	58	68	62	0	0	0
8	27 7 5	27 7 5	27 7 6	59	67	60	0	0	0
9	27 7 7	27 7 6	27 7 7	58	69	65	0	0	0
10	27 7 8	27 7 6	27 7 9	60	75	66	0	0	0
11	27 7 6	27 7 8	27 8 2	60	70	63	0	0	0
12	27 8 3	27 8 0	27 7 8	60	66	64	0	0	0
13	27 7 6	27 7 4	27 7 7	60	68	60	0	0	1, 1
14	27 7 6	27 7 2	27 4 7	58	67	63	3, 4	0	0
15	27 5 0	27 6 0	27 7 2	64	64	59	0	0	0
16	27 7 6	27 7 8	27 8 6	54	62	58	0	0	0
17	27 8 7	27 8 6	27 8 9	56	72	67	0	0	0
18	27 8 3	27 8 3	27 7 8	64	80	73	0	0	0
19	27 7 8	27 7 4	27 6 5	74	82	76	3, 8	0	0
20	27 6 4	27 6 2	27 6 1	71	77	69	0	0	0
21	27 6 2	27 6 2	27 6 1	66	72	67	0	0	0
22	27 6 2	27 6 2	27 6 5	62	69	64	0	0	0
23	27 6 4	27 6 1	27 6 1	60	71	65	0	0	0
24	27 6 3	27 6 2	27 6 2	64	72	66	0	0	0
25	27 6 3	27 6 4	27 7 7	62	71	64	0	0	0
26	27 7 6	27 7 7	27 8 0	57	70	61	0	0	0
27	27 8 0	27 7 6	27 7 2	55	70	62	0	0	0
28	27 7 6	27 8 2	27 8 1	58	68	62	0	0	0
29	27 8 2	27 7 4	27 7 8	59	64	60	0	0	0
30	27 7 4	27 7 7	27 7 8	60	66	62	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevação	27 8 9	Maior calor	- 77	Total da chuva. P. L. D. 0 8 3
Menor elevação	27 4 7	Menor calor	- 54	
Elevação media	27 6 0	Calor medio	- 65	

## S E T E M B R O .

Ventos , e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	E. rij. Ceo cl.	E. e S.E. muito rij. C.cub.	S. E. e N.O. trov. ao long.
2	N. e N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.
3	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cub. nev. esp.
4	N. nev. esp. e hum.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. nev. esp. dep. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. dep. nev. alt.	N. E. nev. esp.
8	N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. e N. E. rij. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. nev. alt. dep. nev. esp.
10	N. E. nev. esp.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. nev. alt.
11	N. e N. E. nev. esp.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. nev. alt.
12	N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cub. nev. alt.
13	N. e N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. Ceo cl.	N. nev. alt.
14	N. E. nev. alt.	N. Ceo cl.	N. dep. S. O. Ceo cub.
15	S. O. dep. N. O. e N. C. cub.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
17	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	E. rij. Ceo cub.
19	E. rij. C. cub. trov. ao long.	N. E. Ceo cl.	E. br. Ceo emp.
20	E. Ceo cl.	S. nev. alt.	S. Ceo cub.
21	S. Ceo cub.	O. dep. S. O. e N. C. cub.	S. E. Ceo cub.
22	S. e S. E. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
23	N. Ceo cub. nev. esp.	N. Ceo cub.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
25	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
26	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	N. nev. esp.
29	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
30	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humid.	de temp.	de trov.
25	3	4	1	0	1

O U T U .

OUTUBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 7 6	27 7 1	27 7 0	58	66	62	0	0	0
2	27 6 1	27 6 0	27 6 0	63	72	67	0	0	0
3	27 5 7	27 5 6	27 5 6	67	68	66	0	0	0
4	27 6 5	27 6 4	27 7 2	62	64	61	0	0	0
5	27 7 4	27 7 3	27 7 0	58	62	58	0	0	0
6	27 7 3	27 7 2	27 6 6	55	64	59	0	0	0
7	27 5 9	27 5 3	27 4 6	62	64	63	0,2	2	9
8	27 3 6	27 3 0	27 3 0	62	63	56	4	1	0
9	27 3 8	27 4 2	27 5 5	55	61	58	0,2	0	0
10	27 5 4	27 5 4	27 7 3	56	63	60	0	0	1,6
11	27 7 3	27 7 3	27 8 4	58	63	60	0	0	0
12	27 8 4	27 8 4	27 8 2	56	61	57	0	0	0
13	27 7 9	27 7 6	27 7 8	52	63	58	0	0	0
14	27 7 8	27 7 5	27 7 3	57	68	64	0	0	0
15	27 7 3	27 7 0	27 6 5	61	70	64	0	0	0
16	27 6 9	27 6 8	27 6 8	62	68	64	0	0	0
17	27 7 0	27 6 8	27 7 0	58	64	60	0	0	0
18	27 7 1	27 6 8	27 6 2	58	63	59	0	0	0
19	27 6 0	27 5 0	27 4 3	55	64	60	0	0	0
20	27 3 8	27 3 3	27 2 8	58	62	60	0	0	0
21	27 2 6	27 2 3	27 2 2	58	61	60	0	5	13,6
22	27 2 2	27 4 0	27 6 0	59	63	61	0	13	2,8
23	27 7 0	27 7 2	27 6 8	58	64	60	3,4	4	0
24	27 6 8	27 6 6	27 6 6	59	67	63	0	0	0
25	27 6 9	27 6 8	27 7 4	60	67	64	0	0	0
26	27 7 5	27 7 4	27 7 1	58	65	63	0	0	0
27	27 6 9	27 6 8	27 7 0	60	66	64	0	0	3,3
28	27 7 7	27 7 6	27 7 7	59	63	61	0	0	0
29	27 7 8	27 7 7	27 7 1	57	62	60	0	0	0
30	27 7 2	27 7 0	27 6 6	58	58	56	2,1	1	0
31	27 6 4	27 6 0	27 7 4	56	58	67	0	2	4,2

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.	Maior calor - - 72°	Total da chuva.	
Maior elevação	27 8 4	Menor calor - 52	P.	L. D.
Menor elevação	27 2 2	Calor medio - 64	6	0 4
Elevação media	27 6 5			

## O U T U B R O .

Ventos, e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
2	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.
3	N. Ceo cub. nev. esp.	O. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
4	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. Ceo cl. e lind.	O. Ceo cl.	O. dep. S. O. Ceo cub.
7	S. O. Ceo cub.	S. O. rij. C. cub. nev. esp. hum.	S. O. de temp. Ceo cub.
8	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
9	S. O. e O. nuv. enter.	S. O. e O. nuv. enter. trov. ao long.	S. O. Ceo cl.
10	S. O. nuv. folt.	S. O. nuv. folt.	S. O. nuv. enter.
11	S. O. e O. Ceo cl.	S. O. e O. Ceo cl.	O. dep. N. O. C. cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	E. Ceo cl.	S. E. e S. Ceo ennev.	S. E. Ceo cub.
15	E. e N. E. nev. alt.	N. E. nev. alt.	N. E. Ceo empoado
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.
17	N. Ceo cub. nev. alt.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
19	N. Ceo cl.	S. Ceo cub.	S. e S. E. Ceo cub.
20	S. E. muito rij. Ceo cub.	S. E. muito rij. Ceo cub.	S. E. muito rij. trov. ao long.
21	S. E. muito rij. Ceo cub.	S. E. e S. muito rij. C. cub.	S. E. rij. Ceo cub.
22	S. E. e S. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. e O. br. Ceo cl.
23	S. O. br. Ceo cub.	O. e N. Ceo cub.	N. e N. E. Ceo cl.
24	E. e S. br. Ceo cub.	E. e S. Ceo cub.	E. Ceo cub.
25	E. Ceo cub. nev. alt.	E. Ceo cub. nev. alt.	N. E. e E. Ceo cl.
26	N. E. e E. Ceo cl.	E. Ceo cub. nev. alt.	E. Ceo cl.
27	E. Ceo cub.	S. E. e S. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cl.
28	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
29	O. Ceo cub.	O. S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
30	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
31	O. e S. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. Ceo cl.

*Dias*

Ciar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
13	10	1	0	2	1

NOVEMBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 7 3	27 7 0	27 4 7	58	63	60	0	8,4	8,6
2	27 4 7	27 4 4	27 2 0	57	58	58	0,3	0	6,7
3	27 2 7	27 3 7	27 5 6	51	58	56	0	0	0
4	27 6 2	27 6 8	27 6 8	44	52	49	0	0	0
5	27 6 6	27 6 2	27 5 4	49	54	52	0	0	0
6	27 5 3	27 4 9	27 5 6	48	54	51	0	0	0
7	27 5 9	27 6 1	27 6 3	48	55	52	0	0	0
8	27 6 3	27 6 2	27 6 1	49	55	51	0	0	0
9	27 6 2	27 6 0	27 3 5	48	55	52	0	0	0
10	27 3 4	27 4 0	27 4 8	51	53	51	0,3	0,2	2,5
11	27 5 0	27 5 8	27 5 7	49	55	53	0	0	0
12	27 4 5	27 4 0	27 3 5	51	55	52	0	1,5	0,5
13	27 3 5	27 3 2	27 3 0	47	54	51	0	0	0
14	27 2 3	27 1 8	27 2 7	50	54	53	0	16,5	1
15	27 0 8	26 11 8	27 1 0	52	55	54	0,4	2	1,1
16	27 1 9	26 11 7	26 10 7	53	57	56	0,3	0,9	4,1
17	27 1 9	27 2 7	27 4 7	52	57	56	0,2	1	1,4
18	27 5 0	27 4 9	27 2 9	56	59	58	0,2	0,2	2,8
19	27 4 8	27 6 2	27 7 5	58	60	58	0,7	0	0
20	27 8 4	27 8 3	27 8 3	58	61	58	0	0	0
21	27 8 1	27 7 6	27 5 7	54	60	58	0	0	0
22	27 5 1	27 4 7	27 5 7	51	58	54	4,2	0	0
23	27 5 3	27 5 0	27 2 8	53	59	58	0	0	9,9
24	27 3 0	27 4 0	27 5 9	54	52	51	3,6	0,8	0
25	27 5 8	27 5 0	27 4 3	52	56	54	0	1	2,4
26	27 4 8	27 4 9	27 5 4	56	57	56	0	0	4,6
27	27 6 8	27 7 8	27 9 4	55	56	52	0	0	0
28	27 10 4	27 10 2	27 9 0	50	56	53	1,6	0	0
29	27 9 0	27 8 8	27 8 7	51	54	53	0	1,8	0,2
30	27 8 4	27 8 3	27 8 4	54	56	52	0	1,1	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.	Maior calor - - - 63	Total da chuva.
Maior elevação	27 10 4	Menor calor - - - 44	P. L. D.
Menor elevação	26 10 7	Calor medio - - - 54	7 9 0
Elevação media	27 5 4		

## NOVEMBRO.

Ventos, e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
2	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
3	E. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. Ceo cl. e lind.	N. nev. altr.	N. e N. E. Ceo cl.
6	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
8	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
9	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. dep. S. E. Ceo cub.
10	S. E. Ceo cub.	E. e S. E. Ceo cub.	S. E. e E. Ceo cub.
11	E. Ceo cub.	N. E. e N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
12	N. d p. S. Ceo cub.	S. e F. Ceo cub.	E. Ceo cub.
13	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.
14	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.	N. Ceo cub.
15	S. O. Ceo cub.	S. O. mu ro rij. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
16	O. rij. Ceo cub.	S. O. muito rij. Ceo cub.	S. O. muito rij. dep. O. br. Ceo cub.
17	O. rij. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.
18	S. O. Ceo cub.	S. O. C. cub. nev. esp. hum.	S. O. rij. nev. esp. hum.
19	S. O. e O. Ceo cub. hum.	O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cl.
20	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cl.
21	O. Ceo cl.	S. br. dep. E. Ceo cl.	E. br. Ceo cl. e lind.
22	E. dep. S. Ceo cub.	S. dep. S. O. Ceo cub.	S. br. Ceo cub.
23	S. br. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.
24	S. e O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cl.
25	O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
26	S. O. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
27	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. br. Ceo cl.	N. e N. E. br. Ceo cl.	N. dep. S. O. br. Ceo cl.
29	S. O. br. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.	S. e S. O. br. Ceo cl.
30	S. e S. O. br. nev. esp.	S. e S. O. C. cub. nev. esp.	S. e S. O. br. nev. esp.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	18	2	2	0	0

DEZEMBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 8 5	27 8 3	27 8 4	54	56	54	0	0	0,8
2	27 8 6	27 8 5	27 8 0	57	59	56	0,2	0	0,5
3	27 7 9	27 7 4	27 7 0	55	57	53	0	0	3,1
4	27 5 8	27 4 7	27 6 4	50	59	54	0,8	3,7	1,9
5	27 6 2	27 5 0	27 1 1	52	57	54	0	0	9,5
6	27 0 1	27 0 2	27 2 3	52	57	53	2,5	0,6	0
7	27 3 8	27 4 8	27 6 3	50	56	52	0	1,3	0
8	27 6 9	27 6 5	27 7 1	50	55	53	0	0	4,8
9	27 7 9	27 8 4	27 9 5	52	56	52	0	0	0
10	27 9 0	27 8 0	27 5 0	49	55	53	0	0	9,6
11	27 6 5	27 7 5	27 9 0	48	53	49	1,3	0	0
12	27 9 6	27 10 0	27 11 2	49	56	54	0	0	1,6
13	27 11 8	27 11 4	27 11 1	52	57	54	0	0	0,7
14	27 10 9	27 10 8	27 10 5	54	56	54	0,6	0,3	0,9
15	27 10 0	27 9 8	27 9 5	53	56	53	0	0	0
16	27 10 0	27 9 1	27 8 0	48	52	49	0	0	0
17	27 7 1	27 6 2	27 4 9	50	53	52	0	0,5	1,6
18	27 3 9	27 3 2	27 2 5	54	58	57	0,6	0,8	9,7
19	27 2 4	27 2 8	27 3 7	50	53	50	0,2	0,2	0,5
20	27 3 9	27 4 0	27 4 5	45	48	45	0	0,9	2,6
21	27 4 7	27 4 9	27 3 5	40	46	44	0	0,3	0
22	27 1 9	26 11 0	26 7 4	41	43	41	0	0,5	1,9
23	27 6 6	27 7 6	27 0 0	48	49	47	2,8	3	0,5
24	27 1 9	27 3 2	27 2 4	44	48	45	0	0	0
25	27 0 4	27 0 0	27 1 8	43	47	46	0	0	4
26	27 2 3	27 2 4	27 6 5	44	46	44	0	0	0
27	27 7 4	27 7 6	27 8 8	46	50	49	0	0	0
28	27 9 5	27 9 4	27 9 3	48	52	48	0	0	0
29	27 10 0	27 9 5	27 9 2	46	52	48	0	0	0
30	27 9 3	27 9 7	27 9 8	44	51	50	0	0	0
31	27 9 8	27 10 0	27 9 9	44	53	50	0	0	0

Resultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevação	27 11 8	Maior calor - -	59°	Total da chuva
Menor elevação	26 7 4	Menor calor -	40	P. L. D.
Elevação media	27 6 4	Calor medio -	51	6 3 3

## DEZEMBRO.

Ventos, e estado do Ceo.

<i>Dias do mez.</i>	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	S. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cl.	O. br. Ceo cub. nev. esp
2	O. br. nev. esp.	O. br. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
3	S. O. Ceo cub. nev. esp.	S. O. Ceo cub.	S. O. dep. N. E. br.
4	N. E. dep. S. O. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. dep. N. O. Ceo cub.
5	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. O. rij. dep N. O. C. cub.
6	S. O. e N. O. rij. trov. de paf.	N. O. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
7	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.
8	N. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. dep. N. O. Ceo cub.
9	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. br. Ceo cl.
10	N. O. dep. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. e S. O. muito rij. de temp.
11	N. Ceo cl. e lind.	N. O. Ceo cl.	N. O. e N. Ceo cl.
12	N. O. br. Ceo cl. e lind.	O. Ceo cub. nev. esp.	N. O. dep. N. C. cl. e lind.
13	N. br. Ceo cl. dep. enev.	N. O. e N. Ceo enev.	N. br. nev. esp.
14	N. br. nev. alr.	N. e N. O. nev. alr.	N. br. nev. esp.
15	N. Ceo cub.	N. e N. O. Ceo cub.	N. Ceo cub.
16	N. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
17	O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
18	O. S. O. nev. esp. hum.	O. e S. O. nev. esp. hum.	S. O. dep. N. O. Ceo cub.
19	O. e N. O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
20	N. e O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.
21	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. dep. N. E. Ceo emp.
22	O. E. rij. Ceo cub.	N. E. rij. Ceo cub.	N. E. e S. E. muito rij. de temp.
23	N. E. e S. E. muito rij. de temp.	N. E. rij. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
24	N. E. Ceo cub.	N. e N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
25	N. E. e E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
26	N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
27	N. e N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	21	4	1	3	1

*Resultado de todo o Anno*

BAROMETRO.			THERMOMETRO	PLUVIMETRO.		
	P. L. D.					
Maior elevação	27	11	9	Maior calor - - -	89	Total da chuva
Menor elevação	26	6	5	Menor calor - -	36	P. L. D.
Elevação media	27	5	5	Calor medio - -	58	54 5 2

*Dias*

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
164	125	23	18	16	23

**A** Esterilidade d'este anno foi muito geral: toda a natureza foi escassa nas suas produções: só em fructos de espinho foi abundante. O pão, vinho, e azeite faltou inteiramente, e no gado houve grande mortandade.

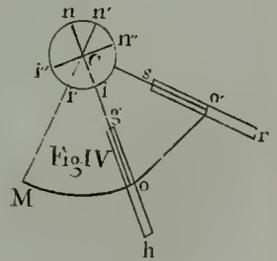
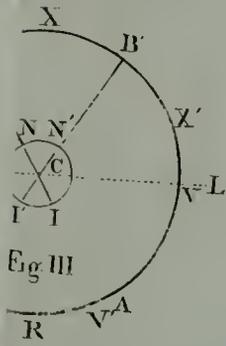
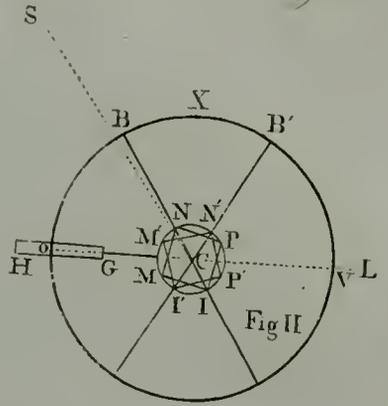
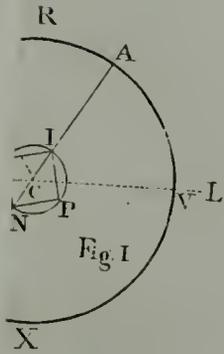
Este anno foi muito doentio: as febres intermitentes, e esquinencias reinárao com mais ou menos força por todo o Verao e Outono: a molestia da esquinencia pareceu epidemica: nas crianças e pessoas de menos idade vinha acompanhada frequentemente de febre escarlatina: as Pessoas, que fôrao foccorridas a tempo com sangrias, diluentes, e na declinação com catharticos, escapárao felizmente: nos Cafaes e Aldeias, aonde estes foccoros naõ fôrao promptos, nem administrados a tempo, morrêrao muitas pessoas.

ANNO DE 1786.

A Freguezia de Santo André d'esta Villa de Mafra, no districto de pouco mais de huma legoa em quadro, consta de 653 fogos, nestes houve este anno

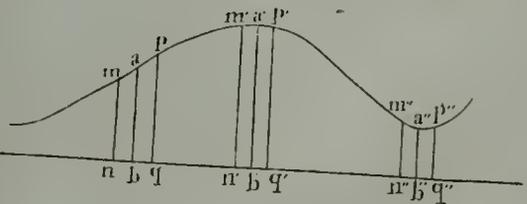
Pessoas de Communhaõ	- - - -	28277
Menores	- - - -	148
	Total	28425
Baptizáraõ-se	- - - -	88
<i>Morrêraõ</i>		
Homens	- - - -	31
Mulheres	- - - -	25
Meninos	- - - -	20
Meninas	- - - -	10
	Total	86
Casamentos em todo o anno	- - -	22

Mem. pag. 15.



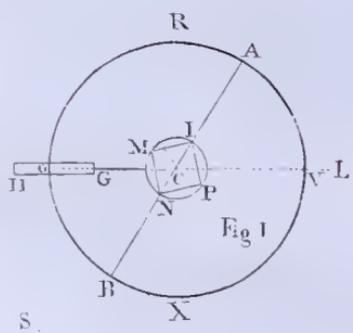
pag. 15

Mem. pag. 16. 8.

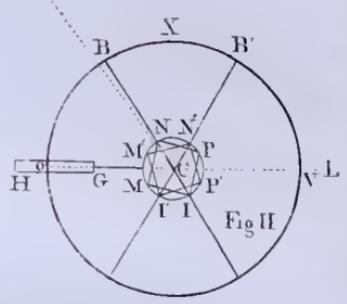


*Mem. pag 15.*

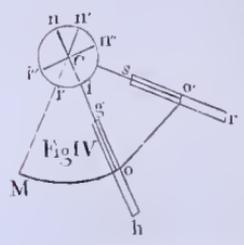
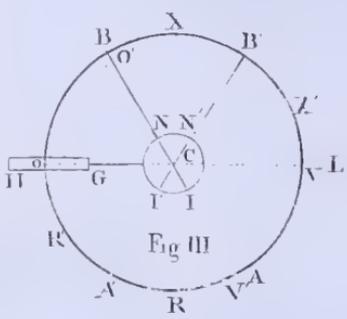
S.



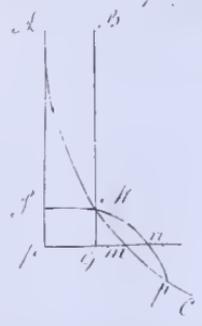
S.



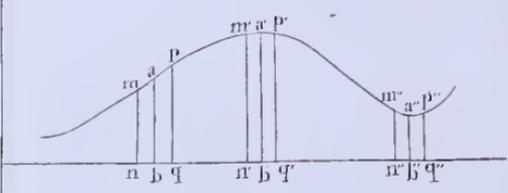
S.



*Mem. rest. pag 15.*



*Mem. pag 16.*



## M E M O R I A

*Sobre os instrumentos de Reflexão.*

POR JOSÉ MARIA DANTAS PEREIRA.

*L'esprit va toujours de proche en proche.*

La Lande.

**N**INGUEM duvida, que os instrumentos de reflexão são Lida em 18  
 os mais proprios para as observações maritimas: he de Abril de  
 tambem claro, que a maior exacção d'estas depende da maior 1792.  
 precisação, e simplicidade dos instrumentos, com os quaes  
 se praticação: taes fôraõ os motivos, que me determináraõ a  
 reflectir sobre os que até ao presente se tem inventado.

Vê, que entre os de Hadley, Smith, Fouchy, Mayer,  
 e o do celebre Newton, seu primeiro inventor, merecia  
 ser preferido o circular de Mayer; especialmente depois  
 que aperfeiçoado pelo Cavalheiro de Bordá ficou tanto, e  
 taõ evidentemente superior aos outros do mesmo genero:  
 assim analysei-o com particularidade; e d'esta analyse resultou  
 o novo instrumento, que passo a descrever com aquella con-  
 fiança, que em pontos taes póde subministrar a theoria  
 combinada com a prática pessoal dos referidos instrumentos.

*Descripção do novo Circular.*

He hum circulo de metal OXVR (Fig. I.) dividido  
 em 720°: o seu corpo construido por hum modo semelhante  
 ao do Cavalheiro de Bordá, e elle em si dirigido ao mesmo  
 fim de observar as distancias da Lua aos outros Astros nas  
 determinações das Longitudes.

No centro tem hum espelho NI, parte estanhado, e  
 parte transparente, que se faz girar por meio de huma ali-  
 dade

dade AB, na qual anda fixo pela direcção da linha de fé CA perpendicularmente ao plano OXVR.

A alidade CO gira tambem á roda do centro C: nella deve estar montado o óculo da mesma forte que o Cavalheiro de Bordá engenhosa e perfeitamente o ensinou a collocar no seu circular, com a differença de fazer passar o seu eixo pelo centro do instrumento; coisa de facil prática, e de facil verificação a bordo; por quanto póde marcar-se no espelho huma recta perpendicular ao plano OXVR, e que passe, ou pelo centro C, ou pela linha de fé da alidade do oculo; e logo quando a quella recta cortar os extremos oppostos dos fios paralelos, ou os angulos oppostos do reticulo, se este for romboide, julgaremos exacta a posição do oculo; tal he hum dos meios, que se poderá empregar para obter a dita verificação.

Na parte circular da alidade haverão quatro fendas, IM, MN, NP, PI, que se cortem em angulo recto formando hum quadrado inscripto no circulo IMNP; nestas entrarão os vidros córados á maneira de corrediças, quando forem necessarios para as observações. Em fim a principal differença entre o novo instrumento e o de M. de Bordá, consiste em ter hum só espelho; e como as mais alterações são consequencias d'esta, deixando de continuar com ellas, vou mostrar o modo de usar do novo circular.

*Modo de observar as distancias angulares.*

Todo este paragrafo deve reduzir-se a mostrar como com hum dos novos instrumentos se póde medir qualquer angulo SCL, formado em hum ponto C pelos raios visuaes tirados d'este ponto a dois objectos S, e L: supponhamos pois, que se queira effectivamente medir o angulo SCL: fixaremos a alidade do oculo em qualquer ponto O, e olhando para o objecto menos luminoso L pela parte transparente do espelho, moveremos este por meio da sua alidade até vêr o outro objecto S em contacto com L, por meio de huma re-

fl. xaõ

flexão simples feita na parte estanhada do mesmo espelho ; então o angulo  $BCO$ , dado pelas alidades, será metade do que se pertendia conhecer ; e como o circulo está dividido em  $720^\circ$ , o numero de grãos de  $BO$  será o valor do angulo  $LCS$ ; isto he claro, pois para que  $S$  pareça estar na linha  $LO$ , como o angulo de incidencia  $SCL$  deve ser igual ao de reflexão  $BCO$ , e  $BCO=ACL$ , será  $SCA=ACL$ , e por consequencia  $ACL$ , ou  $BCO=\frac{1}{2} LCS$ .

Imaginando agora, que o plano do instrumento gire á roda de  $LCO$  como eixo até completar huma semi-revolução, a alidade  $AB$  ficará na posição  $AB$  (Fig. II.) e todas as mais partes d'elle ficarão tambem na posição, em que as representa a mesma Fig. II : logo andando com  $AB$  até chegar á posição  $A'B'$  directamente opposta á da Fig. I. tornaremos a vêr em contacto os objectos  $L$ , e  $S$ ; e o angulo  $A'CO$  igual ao primeiro  $BCO$  marcará de novo a distancia angular dos mesmos objectos.

He manifesto, que isto deve succeder assim, não havendo defeito na posição do espelho, por cuja causa o primeiro angulo  $BCO$  faia maior ou menor do que deve ser ; mas neste caso o segundo  $A'CO$  será outro tanto menor ou maior; logo ametade da somma de ambos mostrará sempre a distancia angular  $LCS$ , e a semi-differença d'elles será quanto o espelho se aparta da sua posição verdadeira; quantidade a quem por este motivo chamaremos: *Erro de posição*.

A' combinação das duas observações referidas daremos o nome de *observações cruzadas*, por suppirem as d'esta mesma denominação feitas com o circular de Mayer.

### *Reflexões.*

I. Póde acontecer não serem parallelas as faces do espelho ; sendo assim deveremos recorrer ás maneiras actualmente praticadas para corrigir os defeitos d'este genero; advertindo com tudo, que nas observações cruzadas quasi nada influirá, como he facil mostrar, e que em taes cir-

cunfancias a femi-differença dos dois angulos BCO, A'CO, não representará fómte o erro de poíção, mas fim este mefmo erro augmentado, ou diminuido do effeito produzido pela falta de parallelifmo nas fuas faces.

II. Fazendo as alidades de modo que as diftancias entre os o dos feus nonios cheguem até  $10^\circ$ , ambas poderão girar no plano superior e graduado do Circular, aliàs ferá preciso que huma d'ellas gire no plano, ou face inferior: a razaõ dos  $10^\circ$  facilmente ferá defcouverte entre o que formos dizendo.

III. Em lugar do diametro AB póde fubftituir-fe o raio BC, pois entãõ teremos o valor do angulo A'CO =  $360^\circ - \text{BCO}$ : ora fe nefta hypothefe confervamos o raio BC fixo durante a segunda obfervaçãõ, e fazemos girar o oculo á roda do centro C, fem que o afiro L faia do feu campo, e ifto até S tocar L, como fe vê na Fig.III, o femi-fuppemento a  $360^\circ$  do arco OCO', ou o fuppemento da fua metade representará o valor do angulo obfervado, e  $\frac{\text{BCO} - \text{A'CO}}{2}$  o erro de poíção. Logo fe continuarmos a obfervar d'efte modo, fixando o oculo nas obfervações impares, e fazendo-o mover nas pares, o fuppemento do quociente, que refultar dividindo o arco defcripto pelo oculo pelo numero das obfervações, deve fer igual á grandeza da diftancia angular dos dois objectos S, e L, correfpondente ao tempo medio das mefmas obfervações: e efte fuppemento ferá  $<$  ou  $>$   $180^\circ$ , conforme o oculo tiver girado da direita para a efquerda, ou pelo contrario.

*Vantajens do novo Instrumento de Reflexãõ.*

Os Circulares ordinarios comparados com os outros inftrumentos de Reflexãõ faõ-lhes superiores, por eftarem menos fogueitos aos erros da gradação; pela maior commodidade que a fua figura offerece ao obfervador; e por não precifarem da verificação do parallelifmo dos efpeelhos: o novo  
Cir-

Circular participa da primeira superioridade em gráo igual, pois em ambos se podem repetir as observações, usando de qualquer parte do limbo; da segunda com preferencia por ser mais simples; e da terceira com a maior vantagem por ter hum só espelho.

Demais vê-se nelle por meio de huma reflexão simples o mesmo que os outros mostraõ por huma reflexão dupla, donde se segue augmento de luz, e diminuição de meios, cujos defeitos pelo menos são possíveis: visto compôr-se de hum só espelho central, as correções proprias do horizontal, e da concurrencia de ambos ficam aniquiladas; o que simplifica, e faz mais exactas as observações: Os raios de luz nunca atravessão duas vezes os vidros córados, como acontece nos de Bordá, quando a distancia observada he  $>5^\circ$  e  $<34^\circ$ ; e nunca os atravessão formando com elles angulos  $<45^\circ$ ; assim diminue-se a probabilidade de erro produzido pela falta de parallelismo nas faces dos ditos vidros: além d'isto, como os raios de luz vindos de L penetraõ IP, formando com elle o mesmo angulo formado com IM pelos emanados de S, e IM tem a respeito do espelho posição igual á de IP, a mencionada falta de parallelismo nas faces respectivas dos dois vidros deve por esta causa ser tambem de menor influencia, suppondo-a no mesmo sentido: não devo esquecer a facilidade de fazer as observações com o presente Circular, pois que o observador leva já sabido, que o raio BC deve ser dirigido ao meio do Ceo comprehendido entre S, e L. M. de Fouchy queixava-se da multiplicidade de imagens, que se notaõ nos instrumentos de reflexão, ora he evidente, que metade d'ellas deve desaparecer neste Circular: em fim a exactidão das observações não depende da distancia dos objectos observados, antes póde mesmo ser bem limitada.

A falta que lhe acho, consiste em não poder servir para angulos menores que  $10^\circ$ , visto não poder ser  $SCA > 5^\circ$  por causa da grande obliquidade dos raios de luz relativamente ao espelho; porém como as distancias, que se observaõ  
para

para as longitudes, são quasi sempre  $> 30^\circ$ , e nunca  $< 20^\circ$ , a dita falta reduz-se a nada.

*O novo Circular pôde tambem ser empregado em medir as alturas dos Astros sobre o horizonte.*

He evidente, que este Circular pôde igualmente servir para observarmos as alturas dos Astros sobre o horizonte, como acontece ao do Cavalheiro de Bordá; com tanto que, em lugar da observação preparatoria do parallelismo dos espelhos, se determine o Erro de posição, assim de attendermos a elle: e ainda que neste cazo não seja possível observar directamente as alturas  $< 10^\circ$ , fica o recurso da observação de revez; observação sim menos commoda, por ser preciso pôr a cabeça de maneira, que não corte os raios da luz vindos do Astro, mas que não admitte impossibilidade.

Conseguir-se-ha não ser necessario attender ao erro de posição, observando alturas cruzadas do mesmo modo, que as distancias; e se as alturas fôrem, ora do limbo superior, ora do inferior, escusaremos tambem a correcção do semi-diametro do astro observado.

#### *Reflexões.*

Os novos instrumentos devem custar menos que os ordinarios, por serem mais simples: por esta mesma causa dependem menos das luzes do Artista, que os construir; pois basta, que o seu limbo seja bem contornado, e forme um plano perfeito; que as alidades girem parallelamente ao dito plano; e que o espelho, e eixo do oculo passem pelo centro: ora as tres primeiras condições são commuas a todos os instrumentos de reflexão; a quarta, que substitue as outras precisas aos mais instrumentos, he assaz facil de alcançar; por tanto combinando este instrumento com os actuaes do mesmo genero, parece-me que posso affirmar ter unido  
nelle

nelle o simples ao util; ao menos elle he o primeiro de quantos conheço, que mostra os objectos do modo mais singelo, a saber, hum directamente, e o outro por huma simples reflexão.

*Os principios expostos podem ser applicados a todos os instrumentos de Reflexão.*

Agora que tenho concluido a descripção geral do novo Circular, vou fazer vêr, que os outros instrumentos de Reflexão são tambem susceptiveis de mudanças semelhantes, mostrando, que mesmo com o Oitante se podem medir quaesquer distancias, havendo neste hum só espelho estanhado-transparente posto no seu centro.

Seja MEO (Fig. IV) hum oitavo de circulo, cujo arco MO esteja dividido em  $90^\circ$ , e NI hum espelho, meio estanhado e meio transparente, posto no centro C, na direcção CO, e fixo segundo o costume sobre huma alidade perpendicularmente ao plano MEO; sejaõ em fim HEO dois oculos fixos, cujos eixos concorraõ em C fazendo hum angulo de  $45^\circ$ , digo, que com hum instrumento d'estes podemos observar todas as distancias da Lua aos mais Astros desde  $10^\circ$  até  $180^\circ$ , e todas as alturas dos Astros sobre o horizonte. NI póde fazer com o eixo de GH todos angulos possiveis desde  $0^\circ$  até  $15^\circ$ , e com o eixo de SR todos os angulos desde  $45^\circ$  até  $90^\circ$ , pois que póde occupar todas as posições diversas comprehendidas entre NI e N'I; logo podemos observar por GH todos os angulos desde  $10^\circ$  até  $90^\circ$ , e por SR todos os comprehendidos entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$ ; ora se estes forem alturas, e  $< 10^\circ$ , conhecellos-hemos observando o seu supplemento pelo ocular RS: a razão dos  $10^\circ$  he evidente; logo tenho demonstrado.

*Notas.*

I. Quando as alturas forem  $> 10^\circ$ , e  $< 90^\circ$ , ao mesmo tempo que são observadas directamente por GH, podemos

Tom. II.

Tt

obser-

observar por SR os seus supplementos, e assim faremos, que os dois oculos verifiquem a mesma observação.

II. Sendo as observações bem feitas, e o instrumento sem erro, se pela segunda não tivermos o supplemento da primeira, a semi-diferença entre estas duas quantidades será igual a  $45^\circ$   $\infty$   $OCO'$ , e  $OCO' >$  ou  $< 45^\circ$ , conforme a segunda observação der menos, ou mais do que o supplemento da primeira: he pois facil conhecer o valor preciso de  $OCO'$ ; para se ajuntar o seu dobro aos arcos dados pelo instrumento, quando se observa pelo oculo RS, a fim de ter o numero de grãos, e partes de grão das distancias observadas.

III Em lugar dos dois oculos pode-se empregar hum, pondo-o nos lugares O, e O', conforme for necessario.

IV. Póde-se evitar a mudança do oculo, usando de duas alidades, que girem independentes, huma na face superior, e outra na inferior do instrumento; porque supponhamos ser OC a superior, ME a inferior, e que o oculo esteja em O; movendo NI com OC até M poderemos observar por GH os angulos  $> 10^\circ$ , e  $< 90^\circ$ ; chegado pois CO a ME traga-se CM só para OC, separe-se o espelho de OC, e una-se a ME, agora andando com ME até á sua primeira posição, o espelho girará desde NI' até NI'' formando com o eixo de GH todos os angulos  $> 45^\circ$ , e  $< 90^\circ$ ; logo poderemos assim medir as distancias angulares comprehendidas entre  $90^\circ$ , e  $180^\circ$ , que he quanto nos faltava. D'esta forte não sómente se evita a mudança do oculo, mas tambem toda a porção  $OCO'$  do Oitante.

V. Se o apparelho central for susceptivel de movimentos semelhantes aos que tenho visto em alguns instrumentos de Reflexão enviados por Magalhaens á Real Academia dos Guardas da Marinha, poderemos tambem dispensar-nos de os fazer construir com duas alidades; porque, apenas OC estiver sobre ME, tira-se-lhe o apparelho, e deixando-o immovel na posição NI', faz-se voltar OC a O, onde se lhe reune o mesmo apparelho, com o qual póde OC tornar a CM, e logo NI de NI' para NI'', que he quanto se pertende.

Isto deve ser extremamente facil, construindo a parte circu-

circular da alidade de tal modo, que se possa fixar-lhe o espelho em direcções, que formem entre si angulos de  $45^\circ$ , e nunca em outras.

VI. sendo  $OCO' = 45^\circ$ , a femi-differença indicada em o n.º II deve representar o erro de posição, additivo no 1.º caso, e subtractivo no 2.º

VII. Quando o instrumento tem erro, e  $OCO' > \text{ou} < 45^\circ$ , a dita correcção deve corrigir o effeito simultaneo d'estas duas faltas: assim para as conhecer separadamente, determinaremos primeiro o erro, ou observando ao mesmo tempo angulos  $< 90^\circ$  com outro instrumento ja correcto, ou medindo os mesmos angulos por algum outro meio a fim de os conhecer exactamente, ou medindo angulos conhecidos &c. depois do que nenhuma duvida nos restará sobre este assumpto.

Sendo o arco do instrumento  $> 90^\circ$ , determinaremos o seu erro, observando por diante, e de revez hum angulo, cujo supplemento não exceda o mesmo arco.

VIII. Quando as faces do espelho não forem parallelas, calcular-se-hão os effeitos d'esta falta segundo se costuma.

Podria continuar a reflectir sobre estes objectos, mas temo ser longo, e muito mais cahir no defeito de pertender generalizar demaziadamente as minhas idéas.

## REFLEXÕES

*Sobre certas sommações successivas dos termos das Series arithmeticas , applicadas ás soluções de diversas questões algebricas.*

P O R

JOSÉ MARIA DANTAS PEREIRA.

*Nec ulli nato post mille sæcula præcludetur occasio aliquid ad-  
huc adjiciendi.*

Seneca.

Lida em 8  
de Jan. de  
1794.

**N**A solução de varios Problemas da analyse indetermi-  
nada , fomos muitas vezes conduzidos a expressões  
da forma  $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$  da qual se require-  
rem as differentes soluções em numeros , ou simplesmente  
inteiros , ou inteiros e positivos , na hypothese de ser tam-  
bem  $x$  hum numero inteiro e positivo : he clarissimo o  
grande incommodo , que deve causar a satisfacção do que se  
requer , quando esta depende de calcular os numeros a que  
a dita fórmula se reduz nas hypotheses successivas de  
 $x = 1, = 2, = 3, \&c.$  ; e que este incommodo augmenta-  
rá tanto mais quanto maior for o expoente  $m$  , e mais  
composto o valor de  $x$  : por esta razão sempre nos diri-  
gimos primeiro a conhecer a lei das series formadas pe-  
las differentes soluções pedidas , a qual , depois de conhe-  
cida , nos offerece meios de as continuar com muito me-  
nos trabalho : até agora consistia de ordinario a maneira  
da dita indagação ( ao menos a que me consta ) em achar  
suc-

successivamente as differenças primeiras, segundas, terceiras, e assim por diante até ás differenças do gráo  $m$  das primeiras  $m + 1$  soluções da fórmula proposta, precedendo o cuidado de determinar os valores correspondentes de  $x$ , taes que formem huma progressão arithmetica, e isto na certeza de que as ditas differenças da ordem  $m$  devem fahir constantes; pelo que retrogradando calculariamos todas as outras soluções pertendidas por meio de simples sommas: este methodo carece de se calcularem primeiro  $m + 1$  soluções, para se conhecer a sua lei, e poder depois achar facilmente as soluções restantes, e assim lévamos por hum caminho indirecto ao fim que procuramos; pois he mais proprio conhecer a lei á vista da fórmula, e com esta ir calcular depois as mesmas  $m + 1$  soluções primeiras: tal foi o motivo que me conduzio á composiçãõ da presente Memoria, onde tudo he consequencia da soluçãõ do seguinte

*Problema fundamental.*

Calcular por meio de simples sommas de progressões arithmeticas as quantidades,  $a$  que se reduz a fórmula  $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$  nas hypotheses successivas de  $x = 1, = 2, = 3, \&c.$ ; sendo  $a, b, c, \&c.$  ou cifra, ou quantidades reaes; positivas, ou negativas; inteiras, ou fraccionarias.

*Soluçãõ.*

Represente  $p$  o primeiro termo,  $r$  a razaõ, e  $x$  o numero de termos de qualquer progressão arithmetica; suppondo que  $T, e f$  sejaõ respectivamente os termos geral, e sommatorio da mesma progressão será  $T = p + r(x-1), e f = \frac{r(x-1)x}{2} + px = r\left(\frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2}\right) + px$ : se a cada termo  $f$  ajuntarmos qualquer quantidade  $b$ , resul-

Tom. II. Uu ful-

fultará huma nova serie onde teremos o termo geral . .

$$T' = r \left( \frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2} \right) + px + b ; \text{ e chamando } f' \text{ o}$$

termo sommatorio desta nova serie será

$$f' = r \left( \frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2} + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3} \right) + p \left( \frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} \right)$$

+  $bx$  : considerando agora  $f' + i$  como termo geral de outra serie, e  $f''$  como seu termo sommatorio, será

$$f'' = r \left( \frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2} + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3} + \frac{(x-2)(x-1)x(x+1)}{1.2.3.4} \right)$$

$$+ p \left( \frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} \right) + b \left( \frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} \right) + ix, \text{ e}$$

assim por diante; donde se conclue, que se, sommados os termos de huma progressão arithmetica dos quaes o primeiro for  $p$  e a razão  $r$ , augmentarmos a cada termo da somma a quantidade  $b$ ; e feita huma nova somma, se ajunta a cada termo della a quantidade  $i$ ; e sommado depois outra vez, se augmenta a cada termo desta outra somma a quantidade  $k$ , e assim por diante até completar hum certo numero  $m-1$  de sommas, cada termo da serie resultante será representado em geral pela fórmula

$$\begin{aligned} & \text{seguinte, } (A), r \left( \frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2} + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3} \right. \\ & \left. + \frac{(x-2)(x-1)x(x+1)}{1.2.3.4} + \dots + \frac{(x-2)(x-1)x(x+1) \dots (x+m-3)}{1.2.3.4 \dots m} \right) + \\ & p \left( \frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \dots + \frac{(x-1)x \dots (x+m-3)}{1.2 \dots m-1} \right) + \\ & b \left( \frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \dots + \frac{(x-1)x \dots (x+m-4)}{1.2 \dots m-2} \right) + \\ & i \left( \frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \dots + \frac{(x-1)x \dots (x+m-5)}{1.2 \dots m-3} \right) + \\ & k \left( \frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \dots + \frac{(x-1)x \dots (x+m-6)}{1.2 \dots m-4} \right) + \end{aligned}$$

&c.

He

He evidente que esta fórmula desenvolvida, e ordenada a respeito de  $x$  dará sempre huma equação do gráo  $m$ , onde os coefficients de  $x$  serão funcções das indeterminadas  $r, p, b, i$  &c., e que destas indeterminadas conterá a equação desenvolvida tantas, quantas forem as unidades de  $m$ , as quaes por consequencia serão sempre determinaveis pela igualação successiva dos coefficients de huma mesma potencia de  $x$  nas duas fórmulas a proposta, e a desenvolvida; logo segue-se, que a expressão  $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c. + nx$  he sempre resoluvel pela dita addicção successiva das series arithmeticas; que para assim a resolver são precisas  $m - 1$  de sommas; e que para determinar logo a primeira progressão arithmetica, a que chamaremos *base*, e as outras quantidades  $b, i, k$ , &c. que successivamente se devem hir ajuntando, deveremos desenvolver da fórmula superior a parte que fôr correspondente, conforme as unidades de que  $m$  constar, igualando depois entre si os coefficients de huma mesma potencia da variavel, o que dará tantas equações como indeterminadas, das quaes será sempre facillimo tirar o valor destas indeterminadas. Q. E. D. et F.

Para maior clareza ajuntarei o seguinte

*Exemplo.*

Supponhamos que se pedem todas as soluções da fórmula  $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x$  nas hypotheses successivas de ser  $x = 1, = 2, = 3$  &c.

A parte da expressão geral sommatoria, que neste caso deverá desenvolver-se, he  $r \left( x - 1 + \frac{1}{2}(x-2)(x-1) + \frac{1}{6}(x-2)(x-1)x + \frac{1}{24}(x-2)(x-1)x(x+1) + \frac{1}{120}(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) \right) + p \left( x + \frac{1}{2}(x-1)x + \right.$

$$\frac{1}{6}(x-1)x(x+1) + \frac{1}{24}(x-1)x(x+1)(x+2) +$$

$$b\left(x + \frac{1}{2}(x-1)x + \frac{1}{6}(x-1)x(x+1)\right) + i\left(x + \frac{1}{2}(x-1)x\right) + kx;$$

a qual reduzida, e ordenada a respeito de  $x$ , dá a seguinte expressão

$$x^5 \frac{r}{120} + x^4 \left(\frac{5r}{120} + \frac{p}{24}\right) + x^3 \left(\frac{5r}{120} + \frac{6p}{24} + \frac{b}{6}\right) + x^2 \left(\frac{-5r}{120} + \frac{11p}{24} + \frac{3b}{6} + \frac{i}{2}\right) + x \left(\frac{-6r}{120} + \frac{6p}{24} + \frac{2b}{6} + \frac{i}{2} + k\right);$$

igualando termo a termo com a fórmula proposta temos,

$$r = 120; p = -144; b = 180; i = -36; k = -1;$$

com estes dados passaremos a formar as series seguintes, e a ultima dellas mostrará o que se quer

$$-144, -24, 96, 216, 336, \&c.$$

$$-144, -168, -72, 144, 480, \&c., \text{ primeira somma}$$

$$36, 12, 108, 324, 660, \&c.$$

$$36, 48, 156, 480, 1140, \&c., \text{ segunda somma}$$

$$0, 12, 120, 444, 1104, \&c.$$

$$0, 12, 132, 576, 1680, \&c., \text{ terceira somma}$$

$$-1, 11, 131, 575, 1679, \&c.$$

$$-1, 10, 141, 716, 2395, \&c., \text{ quarta somma,}$$

que resolve a questão: com effeito se, ex. gr., supposmos  $x = 4$ , vêse que a fórmula se reduz a  $1024 - 256 - 64 + 16 - 4 = 716 =$  ao quarto termo da ultima serie.

*Nota.*

Se a fórmula dada fosse  $ax^m + bx^{m-1} + \dots + H$ , achada como affirma a serie, que resolvesse  $ax^m + bx^{m-1} + \dots + mx$ , ajuntando a cada hum dos seus termos a quantidade  $H$ , teriamos a serie competente á fórmula proposta.

Por exemplo, se em lugar da expressão que fica

men-

mencionada se desse esta  $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 8$ , augmentando 8 a cada termo da ultima serie superior, teriamos esta

$$7, 18, 149, 724, 2403, \&c.$$

que satisfaz a questãõ.

Está pois resolvido plenamente o problema proposto; por tanto vamos tratar de algumas das suas applicações.

O que fica dito antes da soluçãõ precedente affás manifesta o grande uso della na analyse indeterminada, para conhecer as leis das series, que resolvem muitos dos seus problemas, e por isso he inutil a demora, que podia fazer sobre este assumpto; porém algumas vezes faz-se preciso usar antes de certas preparações a fim de evitar quebrados, as quies sãõ semelhantes ás de que necessita o problema immediato, que por esta causa resolveremos.

#### *Exposiçãõ.*

Achar tres numeros inteiros taes, que, se do triplo do quadrado do primeiro se tirar o segundo, o resto seja igual a oito vezes o terceiro; e que, se do cubo do primeiro se tirar o seu dobro, o resto seja igual ao segundo.

#### *Soluçãõ.*

Faça-se o primeiro =  $x$ , o segundo =  $y$ , o terceiro =  $z$ , e teremos  $3x^2 - y = 8z$ ,  $x^3 - 2x = y$ , donde se tira

$$z = \frac{x(-x^2 + 3x + 2)}{8} : \text{ora } x, y, z \text{ devem ser inteiros, mas}$$

sendo  $x$  inteiro,  $y$  tambem o he, pois que temos  $y = x^3 - 2x$ ; logo resta vêr quaes numeros inteiros pode ser

$x$ , para que  $z$ , ou  $\frac{x(-x^2 + 3x + 2)}{8}$ , seja numero inteiro:

ora  $x$ , relativamente ao divisor 8, ha-de ser hum numero comprehendido em alguma das fórmas seguintes,

$$8n; 8n + 1; 8n + 2; 8n + 3; 8n + 4; 8n + 5; 8n + 6; 8n + 7;$$

sendo  $x$  da fórma  $8n$ ,  $z$  será evidentemente hum numero inteiro, pois que entãõ he  $z = n(24n - 64n^2 + 2)$ ; se  $x$  for da fórma  $8n + 1$ , será  $z = \frac{(8n+1)(-64n^2+8n+4)}{8}$ , e logo não será inteiro; mas se  $x$  fôr da fórma  $8n + 2$ ,  $z$  será igual a  $(4n+1)(-16n^2-2n+1)$ , e por consequencia inteiro: discorrendo por diante da mesma maneira veremos, que, para  $z$  fer numero inteiro, he necessario que  $x$  seja hum numero inteiro pertencente a alguma das fórmas,  $8n$ ,  $8n+2$ ,  $8n+4$ ,  $8n+5$ ,  $8n+6$ ; expressões que, substituidas por  $x$  no valôr de  $z$ , daõ 1.º  $z = 24n^2 - 64n^3 + 2n$ , 2.º  $z = -64n^3 - 24n^2 + 2n + 1$ , 3.º  $z = -64n^3 - 72n^2 - 22n - 1$ , 4.º  $z = -64n^3 - 96n^2 - 43n - 5$ , 5.º  $z = -64n^3 - 120n^2 - 70n - 12$ : cada hum destes ultimos valores de  $z$  será o que se deva calcular pelo nosso methodo, suppondo successivamente

$n = 0, = 1, = 2, = 3, = \&c.$ , o que dará  
 nos primeiros  $x = 0, = 8, = 16, = 24, = \&c.$   
 nos segundos  $x = 2, = 10, = 18, = 26, = \&c.$   
 nos terceiros  $x = 4, = 12, = 20, = 28, = \&c.$   
 nos quartos  $x = 5, = 13, = 21, = 29, = \&c.$ , e ultimamente  
 nos quintos  $x = 6, = 14, = 22, = 30, = \&c.$   
 calculados  $x$  e  $z$ ,  $y$  fica facil.

#### Notas.

1.ª Se, além de fer  $z$  igual á expressãõ fraccionaria  $\frac{1}{8}(3x^2 - x^3 + 2x)$ , tambem  $y$  fosse igual a outra expressãõ fraccionaria, fariamos primeiro que o valor de  $y$  contivesse sómente  $x$  de incognito, depois indagaríamos, que fórmas devia ter  $x$  relativamente ao divisor do valor de  $y$ , da mesma sorte que operamos para  $z$ ; em fim as fórmas que se achassem para  $y$  multiplicadas duas a duas com as que tivessemos determinado para  $z$ , dariaõ as novas fórmas, que  $x$  devia ter, para satisfazer ambas as condições

ções ao mesmo tempo, tendo o cuidado de fazer entrar neste numero as fórmãs primeiras, que se achassem commuas aos dous valores: assim teriamos as expressões, que deverião ser substituidas nos valores de  $x$ , e  $z$ , para depois os calcular pelo nosso methodo.

2.<sup>a</sup> A nota precedente faz ao mesmo tempo conhecer o que se deve praticar quando as expressões fraccionarias forem mais de duas, por isso não continuaremos com estes casos.

3.<sup>a</sup> Se no enunciado do problema dissessem que  $z$ ,  $y$ , e  $x$  devião ser inteiros, e positivos; então, sobre as reflexões já feitas, deveriamos ver tambem, que fosse  $x^2 < 3x + 2$ , e  $x^3 > 2x$ , o que dá  $x < 3,6$ ; e  $x > 1,4$ ; ora estas condições combinadas com ser  $x$  de alguma das fórmãs  $8n$ ,  $8n + 2$ , &c., fazem ver, que o problema tem huma solução só em numeros inteiros, e positivos, que vem a ser  $x = 2$ ,  $y = 4$ ,  $z = 1$ .

4.<sup>a</sup> Todas as preparações, e considerações feitas na solução do problema, e nas precedentes notas, são precisas a fim de não calcular hum só numero, que deixe de servir, pois aliás pode-se hir directamente achar todas as soluções

da fórmula  $\frac{-x^3 + 3x^2 + 2x}{8}$  assim como se fez para ter as de  $x^3 - x^4 - x^3 + x^2 - x$ ; para cujo fim desenvolvendo a parte competente da expressão geral sommatoria, e continuando as mais operações, achariamos  $r = -\frac{6}{8}$ ;  $p = \frac{6}{8}$ ;  $b = -\frac{2}{8}$ ; com o que se formariaõ as seguintes series:

$$\div + \frac{6}{8}, 0, -\frac{6}{8}, -\frac{12}{8}, -\frac{18}{8}, \&c.$$

$$\frac{6}{8}, \frac{6}{8}, 0, -\frac{12}{8}, -\frac{30}{8}, \&c.$$

$$\frac{4}{8}, \frac{4}{8}, -\frac{2}{8}, -\frac{14}{8}, -\frac{32}{8}, \&c.$$

$$\frac{4}{8}, 1, \frac{6}{8}, -1, -5, \&c.$$

a ultima claramente mostra, que só quando  $x = 2$ , sahe  $z = 1$ , numero inteiro e positivo: se se continuasse mostrar tambem, que  $z$  era inteiro, quando  $x$  fosse hum dos numeros, 8, 16, 24 &c., 2, 10, 18 &c., 4, 12, 20 &c., 5, 13, 21 &c., 6, 14, 22 &c., que são justamente os numeros das fórmulas affima expostas.

5.<sup>a</sup> Não devo ommittir a seguinte vantagem do presente methodo, vem a ser poder-se calcular com facilidade huma solução independentemente das outras todas, e poder-se depois achar estas outras, já retrogradando, já continuando a respeito della. Supponhamos que se tenha resolvido hum problema indeterminado, o qual nos conduz á seguinte equação  $y = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x$ , e que pretendamos partir da terceira solução; tendo achado como affima os valores de  $r, p, b, i$  &c., substituindo-os na parte desenvolvida da expressão geral sommatoria, teremos que esta se reduzirá a

$$120 \left( x - 1 + \frac{1}{2} (x - 2) (x - 1) + \frac{1}{6} (x - 2) (x - 1) x + \frac{1}{24} (x - 2) (x - 1) x (x + 1) + \frac{1}{120} (x - 2) (x - 1) x (x + 1) (x + 2) \right) - 144 \left( x + \frac{1}{2} (x - 1) x + \frac{1}{6} (x - 1) x (x + 1) + \frac{1}{24} (x - 1) (x) (x + 1) (x + 2) \right) + 180 \left( x + \frac{1}{2} (x - 1) x + \frac{1}{6} (x - 1) x (x + 1) \right) - 36 \left( x + \frac{1}{2} (x - 1) x \right) - x;$$

onde fazendo  $x = 3$ ; virá

$$120 \times 6 - 144 \times 15 + 180 \times 10 - 36 \times 6 - 3 = 141 \quad \text{solução procurada.}$$

Querendo agora por meio desta achar todas as outras, hiriamos calcular os terceiros termos successivos da base, e das outras series; para o que notariamos, que a fórmula precedente em consequencia da substituição reduz-se a

$$120(2+1+1+1+1) - 144(3+3+4+5) + 180(3+3+4) - 36(3+3) - 1.3$$

e logo teremos

$$120 \cdot 2 - 144 = 96 = \text{ao terceiro termo da base.}$$

$$120(2+1) - 144 \cdot 3 = 96 + 120 - 144 \cdot 2 = -72 = 3.^{\circ} \text{ termo da } 2.^{\text{a}} \text{ serie.}$$

$$120(2+1) - 144 \cdot 3 + 180 = -72 + 180 = 108 = 3.^{\circ} \text{ termo da } 3.^{\text{a}} \text{ serie.}$$

$$120(2+1+1) - 144(3+3) + 180 \cdot 3 = 108 + 120 - 3 \cdot 144 + 2 \cdot 180 = 156 \\ = 3.^{\circ} \text{ termo da } 4.^{\text{a}} \text{ serie.}$$

$$120(2+1+1) - 144(3+3) + 180 \cdot 3 - 36 = 156 - 36 = 120 = 3.^{\circ} \text{ termo} \\ \text{da } 5.^{\text{a}} \text{ serie.}$$

$$120(2+1+1+1) - 144(3+3+4) + 180(3+3) - 36 \cdot 3 = 132 = 3.^{\circ} \\ \text{termo da } 6.^{\text{a}} \text{ serie.}$$

$$120(2+1+1+1) - 144(3+3+4) + 180(3+3) - 36 \cdot 3 - 1 = 131 = \\ 3.^{\circ} \text{ termo da } 7.^{\text{a}} \text{ serie.}$$

ordenados agora estes terceiros termos verticalmente, visto serem já conhecidas as quantidades  $r, p, b, i, k$ , e conhecer-se tambem o como se deve usar dellas, fica facil continuar em qualquer sentido a base, e cada huma das outras series até á ultima. Q. E. F.

A razão do modo empregado em achar os terceiros termos todos ficará evidente, a-penas se pondére, que a expressão geral sommatoria, logo que  $r, p$ , &c. são determinados, deve representar as differentes sommas da progressão arithmetica, a quem  $r$ , e  $p$  competem, com as mais onde entraõ as quantidades  $b, i$ , &c., pela simples supposição de  $m = 2, = 3, = 4, = 5$ , &c.

Passemos agora a mostrar como a solução do problema fundamental pode ser applicada á resolução das equações numericas de todos os grãos.

As raizes das equações numericas podem-se dividir em reaes, e imaginarias; as primeiras subdividem-se em racionais, e irracionais, positivas, ou negativas; e ultimamente, as raizes racionais podem ser ou numeros inteiros, ou fraccionarios: ora resolver huma equação tal como por exemplo  $ax^m + bx^{m-1} + \dots + b = 0$ , he achar para  $x$  valores que fação  $ax^m + bx^{m-1} + \dots = -b$ ; pelo nosso me-

thodo podem calcular-se com facilidade os valores de  $ax^m + bx^{m-1} + \&c.$ , quando se suppoem  $x$  successivamente  $= 1, 2, 3, \&c.$ , logo

1.º Se as raizes da equação proposta forem numeros inteiros, e positivos, na serie dos ditos valores deve forçosamente achar-se  $-b$ ,  $m$  de vezes.

2.º Se as mesmas raizes fôrem numeros positivos, e fraccionarios, deverá apparecer não  $-b$ , mas sim numeros entre os quaes  $-b$  se contenha, e então ficará conhecida a parte inteira da raiz; em quanto á fracção, que a deve acompanhar, abaixo diremos hum modo de a calcular, o qual servirá tambem para a approximação das raizes irracionaes.

3.º Sendo porém as raizes da equação proposta, numeros negativos, inteiros, ou fraccionarios, racionaes, ou irracionaes, a serie mencionada nem conterà  $-b$ , nem mostrará limites que o contenhaõ; convertidas porém na mesma equação as raizes positivas em negativas, e reciprocamente, teremos então huma nova equação, cujas raizes serão numeros positivos, que determinaremos pelo modo affima dito.

4.º Se as raizes fôrem reaes, mas humas negativas, e outras positivas, calcularemos estas primeiro, e mudando depois os signaes ás potencias impares de  $x$ , passaremos a calcular as raizes positivas da nova equação, que serão as negativas da primeira.

5.º Quando a equação proposta contiver raizes iguaes, inteiras, ou fraccionarias, he claro que nas series sim se achará  $-b$ , ou limites, que o contenhaõ, mas não tantas vezes quantas são as unidades de  $m$ ; por quanto, suppondo  $c$  huma das raizes iguaes, as series deverão mostrar, que  $ax^m + bx^{m-1} + \&c.$  se reduz a  $-b$  quando  $x=c$ , mas de nenhuma forte podem fazer conhecer quantos factores  $x-c$  se envolvem na dita equação, de maneira que, suppondo haver  $n$  de raizes  $c$ , as series só mostrarão  $m - n + 1$  de raizes; e se a equação contivesse  $n$  de rai-

zes  $c$ ,  $q$  de raizes  $d$ ,  $r$  de raizes  $e$ , &c., as series só nos fariaõ conhecer  $m - n - q - r + 3$ , &c. de raizes, o que he evidente; esta falta tem o prompto remedio de se dividir a equação proposta pelos factores correspondentes ás raizes achadas, pois assim obteremos huma equação de menor gráo, que resolvida como a precedente, nos dará o mesmo numero, e grandeza de raizes, se estas eraõ iguaes duas a duas; ou menos se entre ellas houverem algumas iguaes tres a tres, quatro a quatro, &c.: no primeiro caso teremos achado todas as raizes pedidas, no segundo dividiremos a nova equação pelos factores simples, que ella nos der, e teremos outra, que tambem resolveremos, continuando assim até achar as  $m$  raizes.

6.º Quando, formadas as series para as raizes positivas, e negativas, não encontrarmos  $-b$ , nem limites que o comprehendaõ; ou quando o não encontrarmos tantas vezes quantas forem as unidades de  $m$ , e dividindo depois a equação proposta pelos factores correspondentes ás raizes achadas, a nova equação for tal que o seu ultimo termo, ou não se contenha nas series que se fizerem para a resolver, ou se contenha menos vezes do que são nella as unidades do maior expoente da incognita; e assim successivamente, de maneira que por fim chegemos a huma equação, cujo ultimo termo não entre nas series; he manifesto que se deve concluir, no primeiro caso, que todas as raizes da equação proposta são imaginarias; e no segundo, que são imaginarias as que restaõ a conhecer; porque visto não entrarem nas series não podem ser numero algum, racional, ou irracional, positivo, ou negativo, e por consequencia não podem ser numero algum real.

#### Notas.

1.ª He necessario advertir, que de tres modos póde  $-b$  ter limites que o comprehendaõ; ou sendo hum dos termos das series menor que  $-b$ , e o seu immediato maior

maior; ou sendo ambos menores, ou maiores que  $-b$ ; da mesma sorte que  $ab$  póde existir entre  $mn$ , e  $pq$ , ou sendo  $ab > mn$ , e  $< pq$ , ou sendo  $a'b' > m'n'$ , e  $> p'q'$ , ou sendo  $a''b'' < m''n''$ , e  $< p''q''$ ; por isso deve haver cuidado em decidir se  $-b$  tem ou não limites que o comprehendão, e por tanto vamos a notar o como se deve proceder em semelhantes casos: conhecer que  $-b$  tem limites, quando he como  $ab > mn$ , e  $< pq$  he cousa clarissima;  $-b$  terá limites, sendo maior que os termos da serie, quando fôr como  $a'b' > m'n'$ , e  $> p'q'$ , isto he, quando a serie decrescer de cada hum dos termos immediatamente menores do que  $-b$  para os lados; em fim  $-b$  terá limites sendo menor do que dois termos consecutivos da serie, quando destes para os lados a serie fôr augmentando.

2.<sup>a</sup> A nota 5.<sup>a</sup> do exemplo precedente faz observar, que este methodo tem a grande vantagem de principiãr a serie dos valores no termo que se quizer, e por este motivo pode poupar muito trabalho principiando o calculo em hum termo, que pouco mais ou menos represente  $x$  na equação proposta: para isto poderemos servir-nos com toda a vantagem, ou das idéas relativas aos termos dominantes das equações, expostas por M. de Lagny nas Memorias de Pariz para o anno de 1706; ou das de M. de la Grange escritas nas Memorias de Berlin para o anno de 1767: onde, e nas de 1768, se acharão tambem couzas affás interessantes sobre a resolução geral das equações numericas de todos os grãos.

3.<sup>a</sup> No uso do methodo se conhecerá tambem ser elle tal, que a mesma formação da ultima serie vai mostrando se ha, ou não mais que esperar della, circumstancia que tambem poupa o trabalho inutil, a que muitas vezes obrigaõ aquelles methodos, que de longe não mostraõ os limites onde se deve parar.

4.<sup>a</sup> Note-se mais que a substituição Newtoniana de introduzir por  $x$  os numeros 1, 2, 3, &c. — 1, — 2, — 3, &c. até

até se alcançar hum resultado positivo, e outro negativo, tem o defeito notado por M. Bezout, de não satisfazer quando as raizes da equação são iguaes, defeito que se não encontra em o presente; pois que as raizes da equação, ou devem ser imaginarias, ou infallivelmente são dadas por elle; de forte que, não achar por este methodo algumas raizes, he signal certissimo de ellas serem imaginarias, e que por consequencia deve a equação, que as contém, ser decomposta do modo competente.

5.<sup>a</sup> Só póde objectar-se ao meu methodo trabalho inutil, quando as raizes fôrem todas imaginarias; mas he elle tal, que neste caso formadas as series, logo desde os primeiros termos se conhece serem as raizes imaginarias, como deve ser, e como se pode vêr resolvendo, por exemplo, a equação  $x^4 + 6x^3 + 26x^2 + 46x + 65 = 0$ , cujas raizes são todas imaginarias; para o que deve primeiro notar-se, que, vista a disposição dos signaes, se as raizes fossem reaes, não podião ser senão negativas.

Resta agora dar o modo de calcular as raizes fraccionarias, e approximar as irracionais; o que vou executar na solução do seguinte problema, que servirá de exemplo aos mais do mesmo genero.

*Problema.*

*Achar as raizes da equação*  $x^3 - x^2 - 41x - 100 = 0$ .

*Solução.*

A equação proposta deve conter duas raizes positivas, e huma negativa; para determinar as primeiras formaremos as seguintes series:

$$\begin{aligned} & \div - 2. \quad 4. \quad 10. \quad 16. \quad 22. \quad 28, \&c. \\ & - 2, \quad 2, \quad 12, \quad 28, \quad 50, \quad 78, \&c. \\ & -41, -37, -27, -11, + 11, + 39, \&c. \\ & -41, -78, -105, -116, -105, -66, \&c. \end{aligned}$$

a ultima bem patenteia, que as duas raizes positivas são fraccionarias, e que devem estar, a primeira entre 2, e 3, e a segunda entre 5, e 6; porque  $-100$  cahe entre  $-78$ , e  $-105$ , e entre  $-105$ , e  $-66$ : tratêmos pois de hir approximar a raiz menor, e para isto suppremos que ella seja

$2 + 0, 1. y$ , ou  $2 + 0, 01. y$ , ou  $2 + 0, 001. y$  &c. conforme a quizermos approximada até ás décimas, centessimas, millesimas, &c.; por agora faça-se  $x = 2 + 0, 1. y$ , este valor de  $x$  substituido na equação proposta a transformará nesta  $y^3 + 50y^2 - 3300y + 22000 = 0$ , onde indagaremos o valor de  $y$ , assim como em a proposta se examinou o de  $x$ , o que nos dará  $y > 7, < 8$ , e logo a raiz até ás décimas será 2, 7. Querendo-a agora até ás centessimas, ou transformariamos a equação precedente nesta  $y^3 + 500y^2 - 330000y + 22000000 = 0$ , a qual resolvida satisfaria a nossa pertençaõ, advertindo, que para evitar trabalho deveriamos calcular do termo 70 por diante, visto sabermos já que as décimas são 7; ou fariamos  $y = 7 + 0, 1. z$ , valor que substituido por  $y$  daria

$z^3 + 710z^2 - 245300z + 1693000 = 0$ , equação onde facilmente determinaríamos as centessimas da raiz: e continuando assim chegaríamos em fim ao pertendido gráo de approximação. Q. E. F.

#### Notas.

1.<sup>a</sup> He manifesto, que desta maneira approximariamos a raiz até onde quizessemos, se ella fosse irracional, mas que a ser racional acharíamos huma dizima, ou finita, ou periodica, que seria sempre facil converter em quebrado.

2.<sup>a</sup> A equação em  $y$  deve ter tres raizes, cada huma das quaes junta a 2 formará huma das raizes da proposta; e logo conhecidas aquellas, estarão conhecidas estas.

3.<sup>a</sup> Quando muitas raizes fôrem iguaes em quanto, ás unidades; ás unidades, e décimas; ás unidades, décimas, e centessimas; &c. o seu primeiro aspecto (por assim dizer) será ou de imaginarias, ou de absolutamente iguaes; porém á medida que formos resolvendo as equações em  $y$ , em  $z$ , &c. iremos formando o verdadeiro conceito das raizes, e determinando o seu exacto valor.

4.<sup>a</sup> Este methodo de approximar he certo, e não obstante parecer algum tanto longo, com tudo não o he quanto parece: todavia sempre satisfaz ao seu fim, que he mostrar o uso, que pode ter a solução do Problema fundamental na approximação das raizes das equações: dos methodos, que para isto mesmo tenho visto até agora, o mais breve foi exposto em 1774 á Real Academia das Sciencias de Pariz pelo Marquez de Courtyron, em huma elegante Memoria, no fim da qual mostra a identidade da sua ultima formula com a de *Euler*, que neste tempo appareceu sem a respectiva demonstração; por isto, em quanto diz respeito ao presente assumpto, reporto-me absolutamente á dita Memoria, posto que ella necessita de algumas observações, as quaes deixo agora de fazer por não ser muito extenso.

Igual motivo me determina a omittir a applicação do meu methodo, aliás evidente, ás sommações successivas dos termos, e potencias dos termos das progressões arithmeticas; assim como tambem á determinação immediata das ballas contidas em pilhas de qualquer figura, contentandonos com dar fim a esta Memoria mostrando, como o mesmo methodo nos conduz a determinar os coefficients do binomio Newtoniano.

1	1	1	1	1	1	1	1	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
1	3	6	10	15	21	28	36	&c.
1	4	10	20	35	56	84	120	&c.
1	5	15	35	70	126	210	360	&c.
1	6	21	56	126	252	462	822	&c.
1	7	28	84	210	462	924	1746	&c.

Se, ordenando a serie de unidades representada pela figura superior, formos sommando estas successivamente consigo mesmas, e achando por consequencia os diversos numeros naturaes, e figurados; e se depois considerarmos os numeros, que ficão distribuidos diagonalmente, a saber,

- 1.<sup>o</sup> 1, 1  
 2.<sup>o</sup> 1, 2, 1  
 3.<sup>o</sup> 1, 3, 3, 1  
 4.<sup>o</sup> 1, 4, 6, 4, 1  
 5.<sup>o</sup> 1, 5, 10, 10, 5, 1  
 &c.

conheceremos facilmente, que elles representaõ os coefficients das potencias successivas de qualquer binomio simples; vê-se pois, que as expressões geraes dos mesmos coefficients podem ser achadas como corollarios do nosso Problema fundamental, bastando para isto fazer as reflexões seguintes:

1.<sup>a</sup> Que a base tem o primeiro termo igual a 1, e a razão igual a 0.

2.<sup>a</sup> Que as quantidades  $b, i, &c.$  faõ tambem iguaes a cifra.

3.<sup>a</sup> Que sendo  $\mu$  o expoente da potencia á qual o binomio proposto deva ser elevado, o primeiro coeſſiciente he sempre o primeiro termo da ſomma  $\mu$ , ou o termo  $\mu + 1$  da primeira ſerie, ou da baſe, o qual vem a ſer 1.

4.<sup>a</sup> Que o ſegundo coeſſiciente, he o ſegundo termo da ſomma  $\mu - 1$ , ou o termo  $\mu$  da ſerie ſegunda, que forma a primeira ſomma da baſe.

5.<sup>a</sup> Que o terceiro coeſſiciente, he o terceiro termo da ſomma  $\mu - 2$ , ou o termo  $\mu - 1$  da ſerie terceira, ſomma ſegunda da baſe.

6.<sup>a</sup> Que o quarto coeſſiciente, he ſempre o quarto termo da ſomma  $\mu - 3$ , ou o termo  $\mu - 2$  da ſerie quarta, ſomma terceira da baſe; e aſſim por diante: donde ſe conclue, que em geral o  $\sigma$  coeſſiciente he igual ao termo  $\mu - \sigma + 2$  da ſomma  $\sigma - 1$  da baſe dita.

Das precedentes obſervações resulta

1.<sup>o</sup> Que da ſerie achada na ſolução do Problema fundamental, a parte que deve ſatisfazer eſtas queſtões, he,

$$x + \frac{1}{2}(x-1)x + \dots + \frac{(x-1)x \dots (x+m-3)}{2 \dots m-1}$$

2.<sup>o</sup> Que neſta parte deve fazer-ſe  $m = \sigma$ , e  $x = \mu - \sigma + 2$ , o que a faz transformar em a ſeguinte  $\mu - \sigma + 2 +$

$$\frac{1}{2}(\mu - \sigma + 1)(\mu - \sigma + 2) + \frac{1}{6}(\mu - \sigma + 1)(\mu - \sigma + 2)(\mu - \sigma + 3) + \dots$$

$$\frac{(\mu - \sigma + 1)(\mu - \sigma + 2) \dots (\mu - 1)}{1 \cdot 2 \dots (\sigma - 1)}$$

Agora bafará fazer ſucceſſivamente  $\sigma = 2, 3, 4, \&c.$  para obter as expreſões geraes pertendidas, como ſe vê nos ſeguintes exemplos:

$$\sigma = 2.$$

$$2.<sup>o</sup> Coeſſiciente =  $\mu - 2 + 2 = \mu$$$

$$\sigma = 3.$$

$$3.^{\circ} \text{ Coef.} = \mu - 1 + \frac{1}{2}(\mu - 2)(\mu - 1) = \mu \cdot \frac{\mu - 1}{2}$$

$$\sigma = 4.$$

$$4.^{\circ} \text{ Coef.} = \mu - 2 + \frac{1}{2}(\mu - 3)(\mu - 2) + \frac{1}{6}(\mu - 3)(\mu - 2)(\mu - 1) \\ = \mu \cdot \frac{\mu - 1}{2} \cdot \frac{\mu - 2}{3}.$$

&c.

Q. E. F. et D.

DES-

## DESCRIPÇÃO

*De hum Monstro de especie Humana , existente na Cidade de S. Paulo na America Meridional.*

POR BENTO SANCHES DORTA.

**T**odos os dias admiramos a Natureza pela variedade das suas produções ; e muitas vezes não he menos attendivel aos nossos olhos , quando ella se aparta das suas mais constantes leis , e parece commetter alguns erros. O espirito do homem he bastantemente agitado quando per-tende descubrir o mysterio das suas operações. Feliz aquelle , a quem a mesma Natureza franquea o seu sanctuario , e deixa ver as causas finaes de seus trabalhos.

A geração dos Monstros na especie Humana não he Fenomeno totalmente raro ; pois lêmos nas Collecções de Memorias das mais célebres Academias da Europa noticias d'esta classe , que de tempos a tempos apparecem. Seguindo eu este exemplo , he que me animo a pôr na presença da Academia a Descripção do Monstro , que actualmente existe nesta Cidade. Eu me lisongêo , que nella se achará alguma cousa de raro , e extraordinario , que em outra parte se não encontra.

Tem-se tomado por systema até agora dividir os Monstros , que pertencem á especie Humana , em tres classes. Primeira classe : *Monstros por excesso , ou augmento de membros.* Segunda classe : *Monstros por falta , ou diminuição de membros.* Terceira classe : *Monstros por mudança de membros.* Da segunda classe he o Monstro , de que vou tratar.

Nesta Cidade existe huma rapariga de idade de quatorze annos , pouco mais , ou menos , chamada Anna Maria , que nasceu sem nenhum dos braços , nem final , ou crecscença donde pareceffe quererem fahir , e só tem em si-

ma

ma do hombro direito huma pequena prominencia, tendo de ambos os lados bem collocados, e conformes os offos da espadua, ou a que chamamos escapula: o mais corpo he bem proporcionado, exceptuando a perna, e pé direito; pois a perna, começando do tronco, está torcida para a parte de fóra, e algum tanto mais grossa do que a esquerda, e muito mais curta, o que faz que manqueje quando anda: no mesmo torcimento continúa até ao metatarso: o pé fica quasi todo virado para fóra, tendo o dedo pollegar com alguma deformidade, e principalmente por estar muito separado dos outros dedos, e não poder unir-se-lhe.

Esta rapariga he filha de pais incognitos, porém sabe-se, que he filha de Indía já domestica; pois nascendo em huma das Aldêas de Indios, que aqui temos na distancia de cinco leguas, foi achada exposta n'hum campo por huma India, que a levou a baptizar, e a creou; sendo talvez abandonada por seus pais pela verem falta de membros, praticando ainda os seus antigos, crueis; e barbaros costumes de matarem, ou abandonarem seus filhos quando nascem com defeitos em seus membros.

O que a Natureza negou a esta creatura, não lhe dando braços, lhe avantajou na intelligencia, e habilidade, para usar de pés, e dentes para supprir todas as funções, em que os braços lhe erão precisos. Com o dedo pollegar do pé direito pega na colher, e garfo, quando come; com os dous pés pega na vasilha d'agua, quando quer beber; com o pé direito penteia o seu cabello da cabeça; com o mesmo pé faz sua costura, e enfia a agulha, &c. Faz renda de linhas, pegando com ambos os pés nos bilros, e mudando os alfinetes com o dedo pollegar do direito: da qual renda, que eu lhe vi trabalhar, ajunto aqui a amostra (\*) de sete pollegadas de comprimento, parecendo-

---

(\*) Esta amostra existe no Archivo da Academia juntamente com hum desenho, que figura o Monstro, de que se trata, e com o Instrumento de Justificação, que comprova a verdade do facto.

do-me, que he quanto basta para se admirar. Ella muitas vezes anda a cavallo, quando vai fóra da Cidade, o que faz com bastante desembaraço, pegando na redea, e guiando o cavallo com o pé direito, tendo o esquerdo no estribo. Em fim he muito digno de admiração este individuo, e muito mais sendo filha de pais selvagens.

Juntamente com esta breve Descripção remetto o Instrumento de Justificação authentica, que aqui fiz tirar perante o Juiz Ordinario d'esta Cidade, em que fiz jurar as pessoas, que observão, e vivem com a dita Anna Maria, para comprovar a verdade de quanto tenho exposto.

## OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS

Feitas na Cidade de S. Paulo na America Meridional

POR BENTO SANCHES D'ORTA.

*Distancias verdadeiras do centro do Sol ao Zenith, ao tempo da sua passagem pelo Meridiano; para a determinação da altura do Polo da Cidade de S. Paulo, sendo observadas as suas alturas com hum Quadrante de hum pé de raio: feito em Londres por Sinillon.*

Anno de 1788.	Distancias verdadeiras do centro do Sol ao Zenith.	Declinação do Sol Austral.	Altura do Pólo Austral.	Anno de 1789.	Distancias verdadeiras do centro do Sol ao Zenith.	Declinação do Sol Austral.	Altura do Pólo Austral.
Novemb. 4	7° 49' 11''	15° 43' 57''	23° 33' 8''	Janeiro 3	0° 48' 17''	22° 44' 58''	23° 33' 15''
5	7 31 1	16 2 5	23 33 6	8	1 25 23	22 7 52	23 33 15
7	6 55 31	16 37 32	23 33 3	10	1 44 22	21 48 41	23 33 3
8	6 38 29	16 54 49	23 33 18	12	2 2 37	21 30 24	23 33 1
10	6 4 30	17 28 34	23 33 4	19	3 23 44	20 9 23	23 33 7
11	5 48 10	17 44 57	23 33 7	Fever. 10	9 29 46	14 3 16	23 33 2
12	5 32 3	18 1 4	23 33 7	13	10 29 58	13 3 7	23 33 5
13	5 16 4	18 16 52	23 32 56	14	10 50 17	12 42 48	23 33 5
19	3 48 31	19 44 38	23 33 9	17	11 53 14	11 40 0	23 33 14
22	3 9 19	20 23 46	23 33 5	18	12 14 24	11 18 44	23 33 8
28	2 1 31	21 31 42	23 33 2	19	12 35 49	10 57 18	23 33 7
29	1 51 19	21 41 37	23 32 56	20	12 57 27	10 35 40	23 33 7
Dezemb. 3	1 16 11	22 17 4	23 33 15	Resultado 23° 33' 6'' 17''			
5	1 0 51	22 32 13	23 33 4	<i>Advertencia.</i>			
6	0 54 2	22 39 6	23 33 8	<p>(As Declinações do Sol foram tiradas do Conhecimento dos Tempos dos annos respectivos, e calculadas para este Meridiano, na supposição de ser a differença do Meridiano de Paris 3<sup>h</sup> 16' 16''</p>			
7	0 47 32	22 45 36	23 33 8				
9	0 35 52	22 57 11	23 33 3				
18	0 6 32	23 26 33	23 33 5				
19	0 5 33	23 27 29	23 33 2				

*Observações dos Eclipses dos Satellites de Jupiter feitas na Cidade de S. Paulo, com hum Oculo achromatico de Dollon de 17 pollegadas de foco.*

Dias das observações. Anno 1788.	Satel- li- tes.	Calculadas pa- ra Pariz, ex- trahidas do Conhecimento dos tempos.	Observa- ções na Cidade de S. Paulo.	Differen- ça.	Advertencias
Dezembro 19 Anno 1789	1.º	10 <sup>h</sup> 8' 36" Im.	12 <sup>h</sup> 52' 24"	-3 <sup>h</sup> 16' 12"	O Ceo ao tempo da Ob- servação estava bem cla- ro, as faxas do Planeta bem terminadas: o Oculo alguma couza tremia por causa do vento, que affo- prava.
Fevereiro 28	3.º	12 54 30 Im.	9 35 32	-3 18 58	Ceo claro; Jupiter bem terminado, e as faxas bem visiveis.
..... 28	1.º	13 10 48 Em.	9 54 34	-3 16 14	O mesmo.
Março .. 9	1.º	9 36 21 Em.	6 20 8	-3 16 13	Ceo claro, porém muito crepusculo.
..... 16	2.º	14 21 51 Em.	11 5 26	-3 16 25	Ceo muito claro, o Pla- neta bem terminado, as faxas muito patentes.
..... 22	4.º	14 0 33 Im.	10 44 23	-3 16 10	Ceo claro.
..... 23	1.º	13 30 7 Em.	10 13 42	-3 16 25	Ceo muito claro, as fa- xas e Jupiter bem termi- nados.
Abril .... 1	1.º	9 56 27 Em.	6 40 20	-3 16 7	Ceo ennuvoado, e ven- to forte, que fazia tremer o Oculo.
..... 24	1.º	10 15 48 Em.	6 59 28	-3 16 20	Ceo muito claro, o Pla- neta bem terminado, as faxas bem parentes.
Maió .... 1	1.º	12 11 49 Em.	8 55 31	-3 16 18	Ceo bem sereno, porém a Lua muito clara, e bem proxima de Jupiter: as faxas bem visiveis.
..... 17	1.º	10 31 5 Em.	7 14 56	-3 16 9	Ceo muito claro, Jupiter e as suas faxas bem ter- minadas.
Junho ... 9	1.º	10 41 35 Em.	7 25 28	-3 16 7	Ceo pouco claro, o Pla- neta mal terminado, as faxas mal se percebiaõ.

*Distancias de algumas Estrellas ao Zenith, ao tempo da passagem d'estes Astros pelo Meridiano, para a determinação da altura do Polo na Cidade de S. Paulo, sendo observadas as suas alturas com o mesmo Quadrante, com que observei as do Sol.*

Annos de 1788, e 1789.	Distancias verdadeiras ao Zenith.	Declinação das Estrellas.	Altura do Pólo Austral.	Advertencias.
Rigel.	15° 5' 51"	8° 27' 25" Aust.	23° 33' 16"	<p>As Declinações das Estrellas são tiradas do <i>Cobhecimento dos Tempos</i>, e corrigidas para o mez de Março, em que tomei as suas alturas meridianas. As Estrellas Rigel, <math>\delta</math> Orion, e Aldebaran tomei as suas alturas meridianas em Dezembro de 1788.</p> <p>Eu verifiquei novamente o erro do meu Quadrante pelo meio de duas alturas meridianas de Estrellas; huma com declinação boreal, e outra austral, e quasi da mesma altura, as quaes fôrão <math>\theta</math> Navio, e Aldebaran; <math>\beta</math> Navio <math>\delta</math> Leão; e com effeito achei augmentado o erro subtractivo do Instrumento: augmento que me parece proceder de ser desarmado de todo para se limpar nas vespéras da minha sabida do Rio de Janeiro.</p> <p>Como as alturas meridianas do Sol fôrão tomadas antes da verificação do Quadrante, fôrão novamente corrigidas d'este augmento.</p> <p>Não verifiquei o Quadrante antes das alturas do Sol, por não haver noite clara, que me deixasse tomar alturas de Estrellas com exactidão, pois sempre fôrão naquelle tempo cubertas de todo, ou por intervallos.</p>
$\delta$ Orion.	23 25 15	ó 8 4 A.	23 33 19	
$\beta$ Navio.	45 17 53	68 51 7 A.	23 33 14	
$\theta$ Navio.	39 44 19	63 17 36 A.	23 33 17	
$\alpha$ Cruzeiro.	38 22 41	61 55 51 A.	23 33 10	
Aldebaran.	39 37 36	16 4 28 Bor.	23 33 8	
$\epsilon$ Leão.	48 17 20	24 44 10 B.	23 33 10	
$\mu$ Leão.	50 32 53	26 59 31 B.	23 33 22	
Regulus.	36 32 46	12 59 37 B.	23 33 9	
$\zeta$ Leão.	48 0 57	24 27 40 B.	23 33 17	
$\delta$ Leão.	45 13 57	21 40 42 B.	23 33 15	
$\beta$ Leão.	39 18 26	15 45 7 B.	23 33 19	

Resultado 23° 33' 14" 40"

*Eclipse da Lua de 28 de Abril 1790. observado com hum Oculo Achromatico de Dollond de 17 pollegadas de foco.*

Immersões.	Tempo Verdadeiro. Hor.Min.Seg.	Emmersões.	Tempo Verdadeiro. Hor.Min.Seg.
Principio do Eclipse . .	7 3 46	Principio da Emersão da Lua . . . . .	9 38 2
Grimaldus . . . . .	7 24	Grimaldus . . . . .	40 23
Aristarcus . . . . .	9 47	Aristarcus . . . . .	46 27
Keplerus . . . . .	11 20	Keplerus . . . . .	49 51
Mare Humororum começa.	16 16	Mare Humororum . . . . .	51 31
Copernicus . . . . .	20 20	Bullialdus . . . . .	55 27
Mare Humororum acaba .	21 6	Copernicus . . . . .	56 21
Mare Nubium principia.	22 42	Tycho . . . . .	10 0 47
Plato . . . . .	25 33	Plato . . . . .	1 52
Mare Nubium finda . .	30 50	Mare Nubium. Duvidosa.	3 25
Bullialdus . . . . .	31 12	Mare Serenitatis começa.	
		Duvidosa . . . . .	12 27
Mare Serenitatis principia.	31 32	Mare Serenitatis finda .	20 49
Tycho principia . . . . .	34 9	Mare Tranquilitatis . . .	23 54
Tycho finda . . . . .	35 27	Proclus . . . . .	29 14
Mare Serenitatis finda .	40 1	Mare Crisium começa .	29 52
Proclus . . . . .	49 20	Mare Crisium finda . . .	32 4
Mare Crisium principia .	50 2	Fim do Eclipse . . . . .	34 52
Mare Crisium acaba . . .	54 54	Fim da Penumbra. . . . .	37 23
Immersão total da Lua .	8 0 59		

ADVERTENCIAS

A Pendula foi regulada pelas alturas correspondentes nos dias 26, 27, 28, e 29, corrigidas pela correcção do meio dia.

O Ceo esteve todo o tempo, que durou o Eclipse, clarissimo e sereno sem haver o menor vento, que fizesse irrem o oculo.

A Lua todo o tempo, que esteve immergida, parecia-se bem a hum ferro em braza; porém muito diminua a sua cor para o limbo Occidental.

Em todo o tempo, que durou o Eclipse, sustentou-se o Barometro n' altura de 25'' 10'' , 7: e o Thermometro de Farenneith em 60°.

*Eclipses dos Satellites de Jupiter.*

Mezes.	Satellites.	Tempo Verdadeiro.	Estado do Ceo.
Janeiro ..	7	1. <sup>o</sup> 14 <sup>h</sup> 1' 55" Im.	Pouco claro.
.....	19	2. <sup>o</sup> 12 27 50 Im.	Muito claro, as faxas de Jupiter muito visiveis.
.....	23	1. <sup>o</sup> 12 12 15 Im.	Muito sereno, Jupiter, e as suas faxas bem terminadas.
.....	26	2. <sup>o</sup> 15 1 16 Im.	Idem.
.....	30	1. <sup>o</sup> 14 4 40 Im.	Pouco claro.
Fevereiro.	1	1. <sup>o</sup> 8 32 16 Im.	Muito claro, o Planeta, e suas faxas bem terminados; muito luar.
.....	7	3. <sup>o</sup> 8 39 10 Im.	Claro.
.....	8	1. <sup>o</sup> 10 25 45 Im.	pouco claro.
.....	17	1. <sup>o</sup> 9 5 10 Em.	Muito claro na parte onde estava o Planeta, as faxas bem visiveis; o Satellite sahio muito junto de Jupiter.
Março ...	10	2. <sup>o</sup> 9 30 40 Em.	Muito sereno, Jupiter e suas faxas bem terminados.
.....	10	1. <sup>o</sup> 14 51 18 Em.	Claro.
.....	17	2. <sup>o</sup> 12 9 33 Em.	Idem.
.....	19	1. <sup>o</sup> 11 16 52 Em.	Idem.
.....	26	1. <sup>o</sup> 13 13 23 Em.	Idem.
Abril ...	4	1. <sup>o</sup> 9 39 20 Em.	Idem.
.....	11	2. <sup>o</sup> 9 27 37 Em.	Idem.
.....	11	1. <sup>o</sup> 11 35 46 Em.	Muito claro.
.....	27	1. <sup>o</sup> 9 56 57 Em.	Idem.
Maió ...	6	1. <sup>o</sup> 6 21 20 Em.	Idem.
.....	6	2. <sup>o</sup> 6 43 39 Em.	Idem.
.....	13	1. <sup>o</sup> 8 16 11 Em.	Idem.
.....	29	1. <sup>o</sup> 6 33 2 Em.	Idem.
Junho ...	7	2. <sup>o</sup> 6 30 10 Em.	Claro, o Planeta bem terminado.
.....	9	3. <sup>o</sup> 7 57 45 Em.	Idem.
.....	14	2. <sup>o</sup> 9 6 22 Em.	Idem.
.....	21	1. <sup>o</sup> 6 41 48 Em.	Idem.
Julho ...	9	2. <sup>o</sup> 6 10 50 Em.	Claro, as faxas de Jupiter bem terminadas.

NOTA

DE CUSTODIO GOMES DE VILAS BOAS

Resultado das Observações Comparadas com as minhas

Pelo principio do Eclipse da $\odot$ . . . . .	2 <sup>h</sup>	32' 41''
Pela macula Keplero . . . . .	2	27 58
Por Mare humorum . . . . .	2	32 23
Por Plaráo . . . . .	2	29 2
Pelo começo da Im. de Tycho . . . . .	2	30 17
Pelo fim da mesma . . . . .	2	30 52
Pelo começo de Mare Crisium . . . . .	2	29 39
Pelo fim da mesma . . . . .	2	29 44
Pela Immerção total . . . . .	2	30 31
Pelo principio da Emerção . . . . .	2	29 48
Pela Emerção de Tycho . . . . .	2	28 5
Pelo principio de Emerf. de M. Crisium . . . . .	2	27 49
Pelo fim da Emerf. da mesma . . . . .	2	29 36
Pelo fim do Eclipse . . . . .	2	28 23

Resultado medio . . . . . 2 29 46

As 6 observações mais concludentes, que são as duas de Tycho, as duas de Mare crisium, e as 2 da Immerção total e do começo da Emerção dão 2<sup>h</sup> 30' 9'', resultado que me parece mais certo.

Entre as 27 observações dos Satelites não achei senão huma correspondente ás minhas, he a Emerção do 2.<sup>o</sup> Satellite de 7 de Junho, a qual dá a differença dos meridianos . . . . . 2<sup>h</sup> 19' 51''

cujo meio entre este, e o resultado do Eclipse da Lua he . . . . . 2 30 0

e por tanto a diff. de Long. entre Lisboa, e S. Paulo he de . . . . . 37° 30'

Donde se deduz a Long. de São Paulo contada do primeiro meridiano 331. 31'.

## MEMORIA

*Sobre as Equações de condição das Funções Fluxionaes.*

POR FRANCISCO DE BÓRJA GARÇÃO STOCKLER.

## SECÇÃO I.

*Das Equações de Condição das Funções Fluxionaes, que são Fluxões exactas.*

## §. I.

Lida em 22  
de Junho de  
1791.

**D**Epois que M. de Condorcet deo ao público a sua excellente Obra sobre a Theorica Geral do Calculo Integral, ou Methodo invertido das Fluxões todos os Geometras sabem, que sendo  $V$  huma Função Fluxional de qualquer ordem  $n$ , e de qualquer numero de variaveis  $x; y$ , &c. para que seja Fluxão exacta de huma Função da ordem  $n$  o será preciso que cada huma das series de coefficients, que multiplicação as differentes fluxões de cada variavel primitiva na expressão.

$$dV = \frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{ddx} ddx + \frac{dV}{d^3x} d^3x + \dots + \frac{dV}{d^{n+1}x} d^{n+1}x$$

$$+ \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{ddy} ddy + \frac{dV}{d^3y} d^3y + \dots + \frac{dV}{d^{n+1}y} d^{n+1}y$$

$$+ \&c.$$

que por maior simplicidade escrevo assim

$$dV = N^1 dx + N^2 dp + N^3 dp' + \dots + N^{(n+1)} dp^{(n-1)}$$

$$+ P^1 dy + P^2 dq + P^3 dq' + \dots + P^{(n+1)} dq^{(n-1)}$$

$$+ \&c.$$

fa-

fatisfação (naõ suppondo Fluxão alguma constante) a hum numero  $n$  de Equações de condição, que saõ para os coeficientes das Fluxões da variavel  $x$

$$N^1 - dN^2 + ddN^3 - d^3N^4 + d^4N^5 - d^5N^6 + \&c. = 0$$

$$N^2 - 2dN^3 + 3ddN^4 - 4d^3N^5 + 5d^4N^6 - \&c. = 0$$

$$N^3 - 3dN^4 + 6ddN^5 - 10d^3N^6 + \&c. = 0$$

$$N^4 - 4dN^5 + 10ddN^6 - \&c. = 0$$

-----  
 -----

$$N^n - ndN^{(n+1)} = 0$$

Para os coefficients das Fluxões da variavel  $y$

$$P^1 - dP^2 + ddP^3 - d^3P^4 + d^4P^5 - d^5P^6 + \&c. = 0$$

$$P^2 - 2dP^3 + 3ddP^4 - 4d^3P^5 + 5d^4P^6 - \&c. = 0$$

$$P^3 - 3dP^4 + 6ddP^5 - 10d^3P^6 + \&c. = 0$$

$$P^4 - 4dP^5 + 10ddP^6 - \&c. = 0$$

-----  
 -----

$$P^n - ndP^{(n+1)} = 0$$

e assim successivamente a respeito de todas as outras variaveis primitivas, que entrarem na Função proposta.

§. II.

Igualmente se sabe, que para  $V$  ser Fluxão exacta de huma Função Fluxional da primeira ordem, basta que os coefficients de  $dV$  satisfação a todas as Equações antecedentes menos a ultima de cada serie. Que para ser Fluxão exacta de huma Função Fluxional da segunda ordem, bas-

ta que os coefficients de  $dV$  satisfazão a todas as Equações antecedentes menos as duas ultimas de cada serie. E finalmente que para ser Fluxão exacta de huma Função Fluxional da ordem immediatamente inferior, basta que os coefficients de  $dV$  satisfazão a primeira Equação de cada serie: condição esta que já se conhecia antes da publicação da Obra de M. de Condorcet, mas cuja demonstração se ignorava; pois que o Celebre Leonardo Euler, a quem este Theorema he devido, o publicou sem ella em os Commentarios da Academia Imperial de Petresburgo, exaltando-o porém como huma d'aquellas verdades, que deviaõ ter, e com effeito tem hum ufo admiravel no Calculo Integral.

### § III.

Ninguem porém até ao presente (ao menos que eu saiba) tem simplificado estas condições deduzindo dos principios, de que ellas se derivaõ, ou de outros quaesquer, condições mais simples em si, ou dependentes de menor numero de operações, e por consequencia mais facéis de applicar á pratica; e por isso fiz d'esta investigação o objecto da presente Memoria.

### §. IV.

Reflectindo em os coefficients numericos dos termos de cada Equação, das que compoem a serie de condições relativãs a qualquer variavel, facilmente se vê, que os coefficients da primeira formaõ a serie dos numeros constantes: os coefficients da segunda a serie dos numeros naturaes: os coefficients da terceira a serie dos numeros triangulares: os coefficients da quarta a serie dos numeros piramidæes, e assim successivamente os coefficients de todas as outras as series de todos os outros numeros figurados; de forte que em geral podemos dizer, que os coefficients de qualquer das sobreditas Equações, exceptuando a primeira, consti-

constituem huma serie formada pela addição successiva dos coefficients da' precedente.

## §. V.

Naõ he menos facil de ver, que o numero dos termos da serie formada pelos coefficients da primeira Equação he  $n + 1$ : o numero dos termos da serie formada pelos coefficients da segunda he  $n$ : o numero dos termos da serie formada pelos coefficients da terceira he  $n - 1$ : o numero dos termos da serie formada pelos coefficients da quarta he  $n - 2$ : e que finalmente o numero dos termos da serie formada pelos coefficients da ultima he  $2$ : donde se segue pela natureza das mesmas series, que o ultimo termo da segunda he  $n$ : o ultimo termo da terceira he

$$\frac{n(n-1)}{1.2} : \text{o ultimo termo da quarta he } \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} :$$

$$\text{o ultimo termo da quinta he } \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} : \text{ e}$$

assim successivamente até a ultima, cujo ultimo termo deve ser  $n$ ; pois que o ultimo termo de cada huma he igual á somma dos termos da precedente menos o ultimo. Discorrendo semelhantemente se verá, que o penultimo termo da segunda he  $n - 1$ : o penultimo termo da ter-

$$\text{ceira he } \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} : \text{o penultimo termo da quarta he}$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} : \text{e assim progressivamente até a pe-}$$

nultima, cujo penultimo termo deve por consequencia ser  $n - 1$ ; por ser o penultimo termo de cada huma igual á somma dos termos da antecedente menos os dois ultimos. Do mesmo modo se acharão todos os termos intermedios de cada huma representados por expressões geraes; e por tanto escrevendo as mesmas series por ordem inverla, isto he, começando pela ultima, serão como se segue.

$$\begin{aligned}
 & 1; \quad n \\
 & 1; n-1; \quad \frac{n(n-1)}{1.2}. \\
 & 1; n-2; \quad \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}; \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}. \\
 & 1; n-3; \quad \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}; \quad \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}; \\
 & \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}. \\
 & 1; n-4; \quad \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}; \quad \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}; \\
 & \quad \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4}; \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}. \\
 & \&c.
 \end{aligned}$$

## §. VI.

D'aqui se conclue, que invertendo tambem a ordem das Equações de condiçãõ dadas por M. de Condorcet, estas serãõ para a variavel  $x$

$$\begin{aligned}
 & N^{n'} - n d N^{(n+1)'} = 0 \\
 & N^{(n-1)'} - (n-1) d N^{n'} + \frac{n(n-1)}{1.2} d d N^{(n+1)'} = 0 \\
 & N^{(n-2)'} - (n-2) d N^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} d d N^{n'} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} d^3 N^{(n+1)'} = 0 \\
 & N^{(n-3)'} - (n-3) d N^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} d d N^{(n-1)'} - \\
 & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} d^3 N^{n'} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} d^4 N^{(n+1)'} = 0 \\
 & \&c.
 \end{aligned}$$

Para a variavel  $y$

$P^{n'}$

$$P^{n'} - n dP^{(n+1)'} = 0$$

$$P^{(n-1)'} - (n-1) dP^{n'} + \frac{n(n-1)}{1.2.} d dP^{(n+1)'} = 0$$

$$P^{(n-2)'} - (n-2) dP^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.} d dP^{n'} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.} d^3 P^{(n+1)'} = 0$$

$$P^{(n-3)'} - (n-3) dP^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2.} d dP^{(n-1)'} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.} d^3 P^{n'}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.} d^4 P^{(n+1)'} = 0$$

&c.

e semelhantemente para todas as outras variaveis.

§. VII.

Determinando as Fluxões successivas da primeira Equação da serie relativa á variavel  $x$  teremos em geral

$$d^m N^{(n+1)'} = \frac{1}{n} d^{m-1} N^{n'}$$

primeira Equação Fluxional ; e substituindo na segunda o valor de  $d dN^{(n+1)'}$  tirado d'esta Equação Fluxional teremos

$$N^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dN^{n'} = 0$$

Equação de condição mais simples, e equivalente á segunda, todas as vezes que a primeira tiver lugar.

§. VIII.

Determinando as Fluxões successivas d'esta nova Equação acharemos em geral

$$d^m N^{n'} = \frac{2}{n-1} d^{m-1} N^{(n-1)'}$$

Segunda Equação Fluxional: e substituindo na terceira o valor de  $d^3 N^{(n+1)}$ , tirado da primeira Equação Fluxional; e o valor de  $ddN^n$  tirado d'esta segunda teremos a Equação de condição

$$N^{(n-2)} - \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)} = 0$$

equivalente á mesma terceira todas as vezes que as duas primeiras tiverem lugar.

### §. IX.

Se determinarmos as Fluxões successivas d'esta teremos em geral por terceira Equação Fluxional.

$$d^m N^{(n-1)} = \frac{3}{n-2} d^{m-1} N^{(n-2)}$$

e substituindo na quarta Equação de condição o valor de  $d^4 N^{(n+1)}$  tirado da primeira Fluxional: o valor de  $d^3 N^n$  tirado da segunda; e o valor de  $dddN^{(n-1)}$  tirado d'esta terceira, teremos huma nova Equação de condição.

$$N^{(n-3)} - \frac{n-3}{4} dN^{(n-2)} = 0$$

equivalente á mesma quarta todas as vezes que as tres primeiras se verificarem.

### §. X.

Continuando a praticar operações e substituições semelhantes em todas as outras, haremos achando novas Equações de condição igualmente simples, e equivalentes ás do §. VI; e este processo nos mostrará por huma indução affaz clara, que sendo  $V$ , como supozemos, huma Função Fluxional da ordem  $n$ , para se conhecer se he Flu-  
xaõ

taõ exacta de huma Funçaõ da ordem 0, naõ he preciso examinar se os coefficients de  $dV$  satisfazem a aquellas series de Equações taõ complicadas e trabalhozas, mas taõ sómente se os mesmos coefficients satisfazem á serie de Equações.

$$N^{1'} - \frac{1}{n} dN^{2'} = 0$$

$$N^{2'} - \frac{2}{n-1} dN^{3'} = 0$$

$$N^{3'} - \frac{3}{n-2} dN^{4'} = 0$$

$$\dots$$

$$N^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)'} = 0$$

$$N^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dN^{n'} = 0$$

$$N^{n'} - \frac{n}{1} dN^{(n+1)'} = 0$$

relativa á variavel  $x$ ; e a serie de Equações

$$P^{1'} - \frac{1}{n} dP^{2'} = 0$$

$$P^{2'} - \frac{2}{n-1} dP^{3'} = 0$$

$$P^{3'} - \frac{3}{n-2} dP^{4'} = 0$$

$$\dots$$

$$P^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3} dP^{(n-1)'} = 0$$

$$P^{(n-1)'}$$

$$P^{(n-1)} - \frac{n-1}{2} dP^{n'} = 0$$

$$P^{n'} - \frac{n}{1} dP^{(n+1)} = 0$$

relativa á variavel  $y$ , e a huma serie semelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas, que entram em  $\mathcal{V}$ .

### §. XI.

He bem vizivel quanto estas series de Equações de condição faõ mais simples que as do illustre Geometra citado, cujos trabalhos me derão occasiaõ a estas reflexões; com tudo não devo deffimular, que ainda mesmo a verificação de todas ellas não só seria demastadamente trabalhosa em muitos e muitos cazos, mas que he absolutamente desnecessaria em todas as Funcções Fluxionaes superiores á primeira ordem, ainda sem suppor Fluxaõ alguma constante: o que, segundo o mesmo Geometra adverte, nos dispensaria de verificar a serie de condições relativa á variavel primitiva, cuja primeira Fluxaõ se tivesse supposto constante; mas o methodo que me propuz seguir pede, que deixemos para ao diante a verificação da presente asserção.

### §. XII.

Se a Funcção Fluxional proposta  $\mathcal{V}$  não for Fluxaõ exacta de nenhuma Funcção da ordem 0; mas ao mesmo tempo for Fluxaõ exacta de outra Funcção Fluxional da primeira ordem; os coefficients de  $d\mathcal{V}$  deveraõ satisfazer a todas as Equações do §. VI. menos a primeira de cada serie; pelo que, se prescindindo d'esta determinarmos as Fluxões successivas da segunda, acharemos em geral.

$$d^m N^{(n+1)} = \frac{2}{n} d^{m-1} N^{n'} - \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} d^{m-2} N^{(n-1)}$$

pri-

primeira Equação Fluxional: e substituindo na terceira o valor de  $d^3 N^{(n+1)}$  tirado d'esta primeira Fluxional ella se converterá em

$$N^{(n-2)} - 2 \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} d dN = 0$$

Equação de condição equivalente á mesma terceira, todas as vezes que a segunda tiver lugar.

§. XIII.

Se determinarmos as suas Fluxões successivas teremos em geral

$$d^m N^n = \frac{4}{n-1} d^{m-1} N^{(n-1)} - \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} d^{m-2} N^{(n-2)}$$

Segunda Equação Fluxional: e se na quarta Equação de condição substituirmos o valor de  $d^4 N^{(n+1)}$  tirado da primeira Fluxional, e o valor de  $d^3 N^n$  tirado d'esta segunda, ella se converterá em

$$N^{(n-3)} - 2 \frac{n-3}{4} dN^{(n-2)} + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} d dN^{(n-1)} = 0$$

Equação de condição que lhe ferá equivalente, todas as vezes que a segunda e terceira forem verdadeiras.

§. XIV.

Determinando as Fluxões successivas d'esta; substituindo na seguinte os valores de todas as Fluxões superiores á segunda ordem tirados das Equações Fluxionaes precedentes; e continuando a proceder semelhantemente a respeito de todas as seguintes, se achará, que para  $V$  ser Fluxão exacta de huma Função Fluxional da primeira ordem

os coefficients de  $dV$  deverão satisfazer á serie de Equações de condiçãõ

$$N^{1'} - 2 \frac{1}{n} dN^{2'} + \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} ddN^{3'} = 0$$

$$N^{2'} - 2 \frac{2}{n-1} dN^{3'} + \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} ddN^{4'} = 0$$

$$N^{3'} - 2 \frac{3}{n-2} dN^{4'} + \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} ddN^{5'} = 0$$

-----

$$N^{(n-3)'} - 2 \frac{n-3}{4} dN^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} ddN^{(n-1)'} = 0$$

$$N^{(n-2)'} - 2 \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} ddN^{n'} = 0$$

$$N^{(n-1)'} - 2 \frac{n-1}{2} dN^{n'} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} ddN^{(n+1)'} = 0$$

relativa á variavel  $x$ , e á serie de Equações de condiçãõ

$$P^{1'} - 2 \frac{1}{n} dP^{2'} + \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} ddP^{3'} = 0$$

$$P^{2'} - 2 \frac{2}{n-1} dP^{3'} + \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} ddP^{4'} = 0$$

$$P^{3'} - 2 \frac{3}{n-2} dP^{4'} + \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} ddP^{5'} = 0$$

-----

$$P^{(n-3)'} - 2 \frac{n-3}{4} dP^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} ddP^{(n-1)'} = 0$$

$$P^{(n-2)'} - 2 \frac{n-2}{3} dP^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} ddP^{n'} = 0$$

$$P^{(n-1)'} - 2 \frac{n-1}{2} dP^{n'} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} ddP^{(n+1)'} = 0$$

re-

relativa á variavel  $y$ , e a huma serie semelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas, que entrarem na Função  $V$

§. XV.

Sendo  $V$  Fluxão exacta de huma Função Fluxional da segunda ordem, então os coefficients de  $dV$  deveráõ satisfazer a todas as Equações do §. VI. menos as duas primeiras de cada serie; e por tanto determinando as Fluxões successivas da terceira acharemos em geral

$$d^m N^{(n+1)'} = 3 \frac{1}{n} d^{m-1} N^{n'} - 3 \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} d^{m-2} N^{(n-1)'} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} d^{m-3} N^{(n-2)'}$$

primeira Equação Fluxional: e substituindo na quarta, o valor  $d^4 N^{(n+1)'}$  tirado d'esta, ella se converterá em

$$N^{(n-3)'} - 3 \frac{n-3}{4} dN^{(n-2)'} + 3 \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} ddN^{(n-1)'} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} d^3 N^{n'} = 0$$

Equação de condiçãõ equivalente á mesma quarta todas as vezes que a terceira se verificar.

§. XVI.

Continuando a proceder por hum modo analogo ao que até agora temos praticado se achará, que para  $V$  ser Fluxão exacta de huma Função Fluxional da segunda ordem, os coefficients de  $dV$  deverãõ satisfazer á serie de Equações de condiçãõ

$N^{n'}$

$$N^{1'} - 3 \frac{1}{n} dN^{2'} + 3 \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} ddN^{3'} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} d^3 N^{4'} = 0$$

$$N^{2'} - 3 \frac{2}{n-1} dN^{3'} + 3 \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} ddN^{4'} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(n-1)(n-2)(n-3)} d^3 N^{5'} = 0$$

$$N^{3'} - 3 \frac{3}{n-2} dN^{4'} + 3 \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} ddN^{5'} - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{(n-2)(n-3)(n-4)} d^3 N^{6'} = 0$$

-----  
 -----

$$N^{(n-4)'} - 3 \frac{n-4}{5} dN^{(n-3)'} + 3 \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5} ddN^{(n-2)'} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3 \cdot 4 \cdot 5} d^3 N^{(n-1)'} = 0$$

$$N^{(n-3)'} - 3 \frac{n-3}{4} dN^{(n-2)'} + 3 \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} ddN^{(n-1)'} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} d^3 N^{n'} = 0$$

$$N^{(n-2)'} - 3 \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)'} + 3 \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} ddN^{n'} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 N^{(n+1)'} = 0$$

relativa á variavel  $x$ ; e a serie de Equações de condiçãõ

$$P^{1'} - 3 \frac{1}{n} dP^{2'} + 3 \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} ddP^{3'} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} d^3 P^{4'} = 0$$

$$P^{2'} - 3 \frac{2}{n-1} dP^{3'} + 3 \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} ddP^{4'} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(n-1)(n-2)(n-3)} d^3 P^{5'} = 0$$

$$P^{3'} - 3 \frac{3}{n-2} dP^{4'} + 3 \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} ddP^{5'} - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{(n-2)(n-3)(n-4)} d^3 P^{6'} = 0$$

-----  
 -----

$P^{(n-4)'}$

$$P^{(n-4)'} - 3 \frac{n-4}{5} dP^{(n-3)'} + 3 \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5} ddP^{(n-2)'} -$$

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3 \cdot 4 \cdot 5} d^3 P^{(n-1)'} = 0$$

$$P^{(n-3)'} - 3 \frac{n-3}{4} dP^{(n-2)'} + 3 \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} ddP^{(n-1)'} -$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} d^3 P''' = 0$$

$$P^{(n-2)'} - 3 \frac{n-2}{3} dP^{(n-1)'} + 3 \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} ddP'' -$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 P^{(n+1)'} = 0$$

relativa á variavel  $y$ ; e a huma serie semelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas.

§. XVII.

Do mesmo modo se achará, que para  $V$  ser Fluxão exacta de huma Função Fluxional da terceira ordem será preciso, que os coefficients de  $dV$  satisfação á serie de Equações de condição

$$N^{1'} - 4 \frac{1}{n} dN^{2'} + 6 \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} ddN^{3'} - 4 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} d^3 N^{4'}$$

$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n(n-1)(n-2)(n-3)} d^4 N^{5'} = 0$$

$$N^{2'} - 4 \frac{2}{n-1} dN^{3'} + 6 \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} ddN^{4'} - 4 \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(n-1)(n-2)(n-3)} d^3 N^{5'}$$

$$+ \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} d^4 N^{6'} = 0$$

$$N^{3'} - 4 \frac{3}{n-2} dN^{4'} + 6 \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} ddN^{5'} - 4 \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{(n-2)(n-3)(n-4)} d^3 N^{6'}$$

$$+ \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} d^4 N^{7'} = 0$$

$$N^{(n-5)'} - 4 \frac{n-5}{6} d N^{(n-4)'} + 6 \frac{(n-4)(n-5)}{5 \cdot 6} dd N^{(n-3)'} -$$

$$4 \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{4 \cdot 5 \cdot 6} d^3 N^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} d^4 N^{(n-1)'} = 0$$

$$N^{(n-4)'} - 4 \frac{n-4}{5} d N^{(n-3)'} + 6 \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5} dd N^{(n-2)'} -$$

$$4 \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3 \cdot 4 \cdot 5} d^3 N^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} d^4 N^{n'} = 0$$

$$N^{(n-3)'} - 4 \frac{n-3}{4} d N^{(n-2)'} + 6 \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} dd N^{(n-1)'} -$$

$$4 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} d^3 N^{n'} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 N^{(n+1)'} = 0$$

relativa á variavel  $x$ , e a huma serie semelhante a respeito de cada huma das outras variaveis primitivas, que entrarem em  $V$ : e que geralmente falando para que  $V$  seja Fluxão exacta de huma Função Fluxional da ordem  $m-1$ , não sendo  $m > n$  os coefficientes de  $dV$  satisfazão á serie de Equações de condição

$$N^{1'} - \frac{m}{n} dN^{2'} + \frac{m(m-1)}{n(n-1)} ddN^{3'} - \frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)} d^3 N^{4'} + \&c. = 0$$

$$N^{2'} - 2 \frac{m}{n-1} dN^{3'} + 3 \frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)} ddN^{4'} - 4 \frac{m(m-1)(m-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)} d^3 N^{5'} + \&c. = 0$$

$$N^{3'} - 3 \frac{m}{n-2} dN^{4'} + 6 \frac{m(m-1)}{(n-2)(n-3)} ddN^{5'} - 10 \frac{m(m-1)(m-2)}{(n-2)(n-3)(n-4)} d^3 N^{6'} + \&c. = 0$$

$$N^{(n-m-1)'} - \frac{(n-m-1)}{1} \cdot \frac{m}{m+2} d N^{(n-m)'} + \frac{(n-m-1)(n-m)}{1 \cdot 2} \cdot$$

$$\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)} ddN^{(n-m+1)'} - \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{1.2.3.}$$

$$\frac{(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+1)} d^3 N^{(n-m+2)'} + \&c. = 0$$

$$N^{(n-m)'} - \frac{(n-m)}{1} \cdot \frac{m}{m+1} dN^{(n-m+1)'} + \frac{(n-m)(n-m+1)}{1.2.}$$

$$\frac{m-1}{(m+1)} ddN^{(n-m+2)'} - \frac{(n-m)(n-m+1)(n-m+2)}{1.2.3.}$$

$$\frac{m-2}{m+1} d^3 N^{(n-m+3)'} + \&c. = 0$$

$$N^{(n-m+1)'} - \frac{n-m+1}{1} dN^{(n-m+2)'} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2.} ddN^{(n-m+3)'}$$

$$- \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{1.2.3.} d^3 N^{(n-m+4)'} + \&c. = 0$$

relativa á variavel  $x$ , e a outra serie semelhante pelo que pertence a cada huma das outras variaveis primitivas.

§. XVIII.

As leis de todas estas series de Equações de condiçãõ, as quaes saõ affaz facéis de notar, comparadas entre si nos mostraõ claramente, que todas as ditas series de Equações se podem contrahir em huma só expressãõ geral

$$N^{(n-k)'} - m \frac{(n-k)}{(k+1)} dN^{(n-k+1)'} + \frac{m(m-1)}{1.2.} \frac{(n-k)(n-k+1)}{(k+1)k} ddN^{(n-k+2)'}$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.} \frac{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}{(k+1)k(k-1)} d^3 N^{(n-k+3)'} +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.} \frac{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{(k+1)k(k-1)(k-2)} d^4 N^{(n-k+4)'}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{(n-k+3)(n-k+4)}{(k+1)k(k-1)} d^5 N^{(n-k+5)} + \&c.$$

da qual facilmente se derivaõ substituinto por  $m$  o expoente da ordem de que  $V$  deve ser Fluxaõ exacta augmentado de huma unidade, e por  $k$  todos os numeros inteiros desde  $n-1$  até  $m-1$ ; isto he, pelo que pertence á variavel  $x$ ; mas querendo-se as Equações de condiçaõ relativas á variavel  $y$  se escreverá  $P$  em lugar de  $N$ ; e semelhantemente se procederá querendo-se as Equações de condiçaõ relativas a outra qualquer variavel.

## S E C Ç A Õ II.

*Comparação das Equações de condiçaõ achadas pelo presente Methodo com as de Euler e Fontaine, e consequencias que d'aqui rezultaõ.*

### §. XIX.

**G**eralmente fallando pode dizerse, que á proporçaõ que hum methodo analyticõ he mais universal, crecem os incommodos da sua applicaçãõ aos cazos particulares; e que por consequencia semelhantes methodos sãõ mais proprios para d'elles se deduzirem outros mais particulares, do que para se praticarem com preferencia a estes. O que acabo de expor, para se reconhecer se as Funções Fluxionaes, de qualquer ordem que sejaõ, sãõ Fluxões exactas de outras Funções de alguma ordem inferior, he huma prova d'esta verdade. Elle conduz em todos os cazos particulares a Equações superabundantes, já porque se achem incluídas em algumas das outras das differentes series de condições, que elle mesmo nos dá; já porque sejaõ consequencias necessarias de algumas d'ellas. Com tudo como os Geometras, que tratáraõ este género de questões

tões por methodos particulares , não passaraõ de dar as condições relativas ás Funcções Fluxionaes da primeira ordem , qualquer que seja o numero das variaveis nellas incluidas , e as que pertencem ás da segunda , quando estas não involvem mais que duas variaveis , não he este hum d'aquelles methodos geraes , que facilmente se possaõ supprir por meio dos particulares , ao menos até ao presente ; e por tanto toda a simplificação , que se lhe poder dar , se deve julgar de bastante importancia na ordem dos trabalhos analyticos.

## §. XX.

A comparação d'este Methodo com os dos celebres Geometras *Leonardo Euler* , e *Fontaine* , ou por melhor dizer a applicação d'este methodo ás fórmulas geraes das Funcções das differentes ordens Fluxionaes , que elles consideráraõ , ou podiaõ considerar segundo os seus , nos pode conduzir a simplificalo bastantemente ; e por tanto , ainda que possa haver outros meios mais proprios para este fim , em quanto não são conhecidos , não devemos despendarnos de indicar este , mostrando aqui como as Equações de condição , que aquelles Geometras acharaõ por differentes caminhos , se deduzem das que acabamos de demonstrar , e como por meio d'esta comparação ou deducção se reconheffe a superabundancia de algumas d'estas.

## §. XXI.

Se a Funcção Fluxional proposta  $V$  for da primeira ordem , e não involver mais que duas variaveis primitivas  $x$  , e  $y$  : fazendo  $n = 1$  em as Equações do §. X , ou  $m = n = 1$  em á Equação generalissima do §. XVIII as nossas Equações de condição necessarias , para que  $V$  seja Fluxaõ exacta , seráo

$$N^{1'} - dN^{2'} = 0$$

$$P^{1'} - dP^{2'} = 0$$

Mas nesta supposição ferá

$$V = A dx + B dy$$

e segundo os mencionados Geometras para que  $V$  seja Fluxão exacta, deverá fer

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$$

Determinando a Fluxão de  $V$ , ou de  $Ap + Bq$  se tem

$$dV = A dp + B dq + \left( \frac{dA}{dx} p + \frac{dB}{dx} q \right) dx + \left( \frac{dA}{dy} p + \frac{dB}{dy} q \right) dy$$

e por consequencia tornando a substituir  $dx$  em lugar de  $p$ , e  $dy$  em lugar de  $q$

$$N^{1'} = \frac{dA}{dx} dx + \frac{dB}{dx} dy$$

$$N^{2'} = A$$

$$P^{1'} = \frac{dA}{dy} dx + \frac{dB}{dy} dy$$

$$P^{2'} = B$$

valores que substituidos em as nossas duas Equações de condição convertem a primeira em

$$\left( \frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy} \right) dy = 0$$

e a segunda em

$$\left( \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} \right) dx = 0$$

as quaes ambas nos mostraõ, que para  $V$  ser Fluxaõ exacta deve com effeito ser

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$$

## §. XXII.

Suppondo  $V = Adx + Bdy + Cdz$ , e procedendo pelo meſmo modo acharemos, que as nossas Equações de condiçãõ

$$N' - dN^{2'} = 0$$

$$P' - dP^{2'} = 0$$

$$Q' - dQ^{2'} = 0$$

ſe convertem em

$$\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right) dy + \left(\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz}\right) dz = 0$$

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right) dx + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}\right) dz = 0$$

$$\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right) dx + \left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right) dy = 0$$

Equações das quaes, por iſſo que devem ſer identicas, e as Fluxões  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  naõ entraõ em nenhuma das expreſões comprehendidas entre os parenthezes, ſe deduzem as ſeguintes Equações de condiçãõ

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx} ; \quad \frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx} ; \quad \frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy} .$$

que ſaõ as meſmas dos ſobreditos Geometras. N'uma palavra, ſuppondo que  $V$  contenha hum numero qualquer de variaveis, e procedendo pelo modo indicado, ſe concluirá

o

o Theorema Geral de *Fontaine*: a saber „ Que tomando ar-  
 ,, bitrariamente quaesquer dois termos de  $V$ , por exemplo  
 ,,  $K du$ , e  $M dx$  se terá sempre „

$$\frac{dK}{dx} = \frac{dM}{du}$$

donde se segue, que sendo  $\lambda$  o numero das variaveis, o nu-  
 mero das Equações de condição absolutamente necessarias,  
 para que  $V$  seja Fluxão exacta, será  $\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}$ .

### §. XXIII.

Se determinarmos as Fluxões successivas de  $A dx + B dy + C dz + \&c.$  sem suppor Fluxão alguma constante veremos, que em qualquer ordem  $n$ , a que chegarmos, os coefficients de  $d^n x; d^n y; d^n z; \&c.$  serão as mesmas quantidades  $A, B, C, \&c.$ , e que os coefficients de todos os outros termos serão Fluxões parciaes, ou multiplos de Fluxões parciaes das mesmas quantidades  $A, B, C \&c$ : donde concludo, que o numero das Equações de condição absolutamente necessarias, para que huma Funcção Fluxional de qualquer ordem  $n$  seja Fluxão exacta de outra Funcção da ordem 0, he, sendo  $k$  o numero dos seus termos,  $k + \frac{\lambda(\lambda-3)}{2}$ ; e que tirando as Equações de condição  $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$  relativas aos coefficients de  $d^n x; d^n y; d^n z; \&c.$  as outras  $k - \lambda$  equações relativas aos outros coefficients devem ser expressadas não simplesmente por Fluxões parciaes dos mesmos coefficients, como são aquellas, mas sim pelos mesmos coefficients, e por differentes Fluxões parciaes dos primeiros  $A; B; C; \&c.$

### §. XXIV.

Se reflectirmos porém, que determinando as quantida-  
 des

des  $N''$ ;  $P''$ ;  $Q''$  &c. devemos ter em os coefficients dos seus termos todas as Fluxões parciaes de  $A$ ;  $B$ ;  $C$ ; &c. Que determinando as quantidades  $N^{2'}$ ;  $P^{2'}$ ;  $Q^{2'}$ ; &c. os coefficients dos seus termos devem ser os mesmos que os coefficients de todos os termos de  $V$ , em que se achar  $dx$ ,  $dy$ ;  $dz$ ; &c. e que por consequencia estes mesmos coefficients se devem achar em  $dN^{2'}$ ;  $dP^{2'}$ ;  $dQ^{2'}$ ; &c. Que semelhantemente em  $dN^{3'}$ ;  $dP^{3'}$ ;  $dQ^{3'}$ ; &c. se devem achar todos os coefficients dos termos de  $V$ , em que entrar  $ddx$ ;  $ddy$ ;  $ddz$  &c. &c.; e se ao mesmo tempo attendermos a que, procedendo d'este modo, ou seja  $n = 2m - 2$ , ou  $n = 2m - 1$ , em chegando ás quantidades  $dN^{m'}$ ;  $dP^{m'}$ ;  $dQ^{m'}$  &c. não haverá em  $V$  mais coefficiente algum, além dos coefficients das fluxões da ordem  $n$ , que se não ache em as expressões de  $dN^{2'}$ ;  $dN^{1'}$ ;  $dN^{4'}$  . . . .  $dN^{m'}$ ;  $dP^{2'}$ ;  $dP^{1'}$ ;  $dP^{4'}$  . . . .  $dP^{m'}$ ;  $dQ^{2'}$ ;  $dQ^{1'}$ ;  $dQ^{4'}$  . . . .  $dQ^{m'}$ ; &c. facilmente se verá, que para  $V$  ser Fluxão exacta de huma Função da ordem  $o$ , basta que os seus coefficients satisfaça a metade das Equações de cada serie do §. X., sendo  $n$  numero par, e a metade de todas menos huma, sendo  $n$  numero impar  $> 1$ ; donde se segue, que todas as outras nos darão condições superabundantes ou repetidas: inconveniente de que, ainda depois d'esta simplificação, senão fica inteiramente izento.

§. XXV.

Para maior illustração de tudo quanto digo em o §. antecedente continuemos a comparar o nosso methodo com o de *Euler*, visto que *Fontaine* não passou de dar as Equações de condigão das Funções Fluxionaes da primeira ordem, que com muito artificio estendeo ás ordens superiores, e supponhamos que  $V$  seja huma Função Fluxional da segunda, a qual involva sómente duas variaveis primitivas  $x$ , e  $y$ . Neste cazo a fórmula geral de  $V$  he

$$A ddx + B ddy + C dx^2 + D dy^2 + E dx dy$$

Tom. II.

Iii

As

As nossas Equações de condição para que  $V$  seja Fluxão exacta de huma Função da ordem 0, são

$$N'' - \frac{1}{2} dN' = 0$$

$$P'' - \frac{1}{2} dP' = 0$$

e segundo Euler ( *Instit. Calc. Diff. Pars prior Cap. 8.* ) devem ser

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}; \quad C = \frac{dA}{dx}; \quad D = \frac{dB}{dy}; \quad E = 2 \frac{dA}{dy} = 2 \frac{dB}{dx}$$

Determinando a Fluxão de  $V$ , que representaremos d'esta forma

$$V = Ap' + Bq' + Cp^2 + Dq^2 + Epq$$

teremos

$$\begin{aligned} dV = & \left( \frac{dA}{dx} p' + \frac{dB}{dx} q' + \frac{dC}{dx} p^2 + \frac{dD}{dx} q^2 + \frac{dE}{dx} pq \right) dx + \\ & (2Cp + Eq) dx + Ad^3x \\ & + \left( \frac{dA}{dy} p' + \frac{dB}{dy} q' + \frac{dC}{dy} p^2 + \frac{dD}{dy} q^2 + \frac{dE}{dy} pq \right) dy + \\ & (2Dq + Ep) ddy + Bd^3y \end{aligned}$$

donde se tira

$$N'' = \frac{dA}{dx} ddx + \frac{dB}{dx} ddy + \frac{dC}{dx} dx^2 + \frac{dD}{dx} dy^2 + \frac{dE}{dx} dx dy$$

$$N' = 2C dx + E dy$$

$$P'' = \frac{dA}{dy} ddx + \frac{dB}{dy} ddy + \frac{dC}{dy} dx^2 + \frac{dD}{dy} dy^2 + \frac{dE}{dy} dx dy$$

$$P' = 2D dy + E dx$$

valores que substituidos em as nossas Equações reduzem a primeira a

$$\left( \frac{dA}{dx} \right)$$

$$\left(\frac{dA}{dx} - C\right) ddx + \left(\frac{dB}{dx} - \frac{1}{2}E\right) ddy + \left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right) dy^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{dE}{dx} - \frac{dC}{dy}\right) dx dy = 0$$

e a segunda a

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{1}{2}E\right) ddx + \left(\frac{dB}{dy} - D\right) ddy + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right) dy^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{dE}{dy} - \frac{dD}{dx}\right) dx dy = 0.$$

Ora cada huma d'estas Equações deve ser identica, e como não entra Fluxão alguma em as quantidades comprehendidas entre os parenthezes, a condição da identidade exige, que seja

$$C = \frac{dA}{dx}; \quad \frac{dB}{dx} = \frac{1}{2}E; \quad \frac{dA}{dy} = \frac{1}{2}E; \quad \frac{dB}{dy} = D$$

$$\frac{dD}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}; \quad \frac{dC}{dy} = \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}.$$

A primeira d'estas seis Equações de condição he a segunda de Euler. A segunda, e a terceira combinadas entre si mostraõ ser

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}; \quad e \quad E = 2\frac{dA}{dy} = 2\frac{dB}{dx}.$$

que faõ a primeira e quarta condições de Euler: e a quarta he justamente a terceira do mesmo Autor. A quinta, e a sexta faõ simplicis consequencias das outras quatro, como he facil de ver; e por tanto não se podem considerar como expressando condições distinctas das primeiras.

## §. XXVI.

Se quizermos, segundo os principios de Euler expostos em o Capitulo citado, determinar as Equações de condição, a que devem satisfazer os coefficients de  $dV$ , sendo  $V$  huma Função Fluxional da terceira ordem, que involva sómente duas variaveis  $x$ , e  $y$ , devemos determinar a Fluxão da Formula geral das Funções Fluxionaes da segunda ordem, que envolvem o mesmo numero de variaveis, ou a Fluxão de

$$M d d x + N d d y + P d x^2 + G d y^2 + R d x d y$$

substituir em lugar de  $P$ ,  $Q$ , e  $R$  os seus valores tirados das Equações de condição da mesma Formula geral, e comparar termo por termo a expressão da sua Fluxão com a Formula geral das Funções Fluxionaes da terceira ordem, quando contem sómente duas Fluents, a qual he

$$A d^3 x + B d^3 y + C d x d d x + D d y d d y + E d y d d x + F d x d d y + G d x^3 + H d y^3 + I d x^2 d y + L d x d y^2$$

e por meio d'esta comparação acharemos, que para  $V$  ser Fluxão exacta de huma Função Fluxional da ordem o deverá ser

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}; C = 3 \frac{dA}{dx}; D = 3 \frac{dB}{dy}; E = 3 \frac{dA}{dy}; F = 3 \frac{dB}{dx};$$

$$G = \frac{d d A}{d x d x}; H = \frac{d d B}{d y d y}; I = 3 \frac{d d A}{d x d y}; L = 3 \frac{d d B}{d x d y}.$$

## §. XXVII.

Segundo o nosso methodo as condições a que  $V$  deve satisfazer são

$$N'' =$$

$$N'' - \frac{1}{3} dN^{2'} = 0$$

$$P'' - \frac{1}{3} dP^{2'} = 0$$

nas quaes , para se reconhecer a sua conformidade com as nove achadas em o §. antecedente , se deve substituir por  $N''$  ;  $N^{2'}$  ;  $P''$  ;  $P^{2'}$  : os seus valores tirados da Formula geral das Funcções da ordem proposta. Para este effeito determinaremos a sua Fluxaõ , e não passando dos termos , em que se consideraõ como Flucentes as Fluxões  $dx$  , e  $dy$  , teremos

$$\begin{aligned} dV = & \left( \frac{dA}{dx} p'' + \frac{dB}{dx} q'' + \frac{dC}{dx} pp' + \frac{dD}{dx} qq' + \frac{dE}{dx} qp' + \frac{dF}{dx} pq' \right. \\ & + \frac{dG}{dx} p^3 + \frac{dH}{dx} q^3 + \frac{dI}{dx} p^2q + \frac{dL}{dx} pq^2 \left. \right) dx + \left( Cp' + Fq' \right. \\ & + 3Gp^2 + 2Ipq + Lq^2 \left. \right) ddx + \&c. \\ & + \left( \frac{dA}{dy} p'' + \frac{dB}{dy} q'' + \frac{dC}{dy} pp' + \frac{dD}{dy} qq' + \frac{dE}{dy} qp' + \frac{dF}{dy} pq' \right. \\ & + \frac{dG}{dy} p^3 + \frac{dH}{dy} q^3 + \frac{dI}{dy} p^2q + \frac{dL}{dy} pq^2 \left. \right) dy + \left( Dq' + Ep' \right. \\ & + 3Hq^2 + Ip^2 + 2Lpq \left. \right) ddy + \&c. \end{aligned}$$

donde se tira

$$\begin{aligned} N'' = & \frac{dA}{dx} d^3x + \frac{dB}{dx} d^3y + \frac{dC}{dx} dx ddx + \frac{dD}{dx} dy ddy \\ & + \frac{dE}{dx} dy ddx + \frac{dF}{dx} dx ddy + \frac{dG}{dx} dx^3 + \frac{dH}{dx} dy^3 \\ & + \frac{dI}{dx} dx^2 dy + \frac{dL}{dx} dx dy^2. \end{aligned}$$

$$N = C d d x + F d d y + 3 G d x^2 + 2 I d x d y + L d y^2.$$

$$P = \frac{dA}{dy} d^3 x + \frac{dB}{dy} d^3 y + \frac{dC}{dy} d x d d x + \frac{dD}{dy} d y d d y \\ + \frac{dE}{dy} d y d d x + \frac{dF}{dy} d x d d y + \frac{dG}{dy} d x^3 + \frac{dH}{dy} d y^3 \\ + \frac{dI}{dy} d x^2 d y + \frac{dL}{dy} d x d y^2.$$

$$P' = D d d y + E d d x + 3 H d y^2 + I d x^2 + 2 L d x d y.$$

valores que substituidos em as nossas Equações convertem a primeira em

$$\left(\frac{dA}{dx} - \frac{1}{3} C\right) d^3 x + \left(\frac{dB}{dx} - \frac{1}{3} F\right) d^3 y + \left(\frac{2}{3} \frac{dC}{dx} - 2 G\right) d x d d x \\ + \left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{3} \frac{dF}{dy} - \frac{2}{3} L\right) d y d d y + \left(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{3} \frac{dC}{dy} - \frac{2}{3} I\right) d y d d x \\ + \left(\frac{2}{3} \frac{dF}{dx} - \frac{2}{3} I\right) d x d d y + \left(\frac{dH}{dx} - \frac{1}{3} \frac{dL}{dy}\right) d y^3 + \\ \left(\frac{1}{3} \frac{dI}{dx} - \frac{dG}{dy}\right) d x^2 d y + \left(\frac{2}{3} \frac{dL}{dx} - \frac{2}{3} \frac{dI}{dy}\right) d x d y^2 = 0$$

e a segunda em

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{1}{3} E\right) d^3 x + \left(\frac{dB}{dy} - \frac{1}{3} D\right) d^3 y + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{3} \frac{dE}{dx} - \frac{2}{3} I\right) d x d d x \\ + \left(\frac{2}{3} \frac{dD}{dy} - 2 H\right) d y d d y + \left(\frac{2}{3} \frac{dE}{dy} - \frac{2}{3} L\right) d y d d x \\ + \left(\frac{dF}{dy} - \frac{1}{3} \frac{dD}{dx} - \frac{2}{3} L\right) d x d d y + \left(\frac{dG}{dy} - \frac{1}{3} \frac{dI}{dx}\right) d x^3 + \\ \left(\frac{2}{3} \frac{dI}{dy} - \frac{2}{3} \frac{dL}{dx}\right) d x^2 d y + \left(\frac{1}{3} \frac{dL}{dy} - \frac{dH}{dx}\right) d x d y^2 = 0$$

Donde se deduzem as seguintes Equações

$$C = 3$$

$$C = 3 \frac{dA}{dx}; \quad D = 3 \frac{dB}{dy}; \quad E = 3 \frac{dA}{dy}; \quad F = 3 \frac{dB}{dx};$$

$$G = \frac{1}{3} \frac{dC}{dx} = \frac{ddA}{dx^2}; \quad H = \frac{1}{3} \frac{dD}{dy} = \frac{ddB}{dy^2}; \quad I = \frac{dF}{dx} = 3 \frac{ddB}{dx^2};$$

$$I = \frac{3}{2} \frac{dE}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dC}{dy} = 3 \frac{ddA}{dx dy}; \quad I = \frac{3}{2} \frac{dC}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dE}{dx} = 3 \frac{ddA}{dx dy};$$

$$L = \frac{3}{2} \frac{dD}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dF}{dy} = 3 \frac{ddB}{dx dy}; \quad L = \frac{dE}{dy} = 3 \frac{ddA}{dy^2};$$

$$L = \frac{3}{2} \frac{dF}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dD}{dx} = 3 \frac{ddB}{dx dy}; \quad \frac{dI}{dx} = 3 \frac{dG}{dy}; \quad \frac{dL}{dx} = \frac{dI}{dy};$$

$$\frac{dL}{dy} = 3 \frac{dH}{dx}.$$

Das quaes as primeiras sete, e a decima faõ justamente a 2.<sup>a</sup>; 3.<sup>a</sup>; 4.<sup>a</sup>; 5.<sup>a</sup>; 6.<sup>a</sup>; 7.<sup>a</sup>; 8.<sup>a</sup>; e 9.<sup>a</sup> das do §. antecedente.

Resta mostrarmos como as Equações  $\frac{dC}{dy} = \frac{dE}{dx} = \frac{dF}{dx}$ , que resultaõ das tres expressões de  $I$ , e as Equações

$\frac{dD}{dx} = \frac{dE}{dy} = \frac{dF}{dy}$ , que resultaõ das tres expressões de  $L$

faõ equivalentes á Equação  $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$ , ou como esta se deduz d'ellas, e das outras antecedentes.

### §. XXVIII.

Se multiplicarmos a primeira d'ellas por  $dx$ , e a terceira por  $dy$  sommandoas teremos

$$dA = \frac{1}{3} C dx + \frac{1}{3} E dy$$

e se multiplicarmos a segunda por  $dy$ , e a quarta por  $dx$ , e as sommarmos, teremos tambem

$$dB =$$

$$dB = \frac{1}{3} D dy + \frac{1}{3} F dx.$$

Pelo Methodo inverfo das Fluxões ferá

$$A = \frac{1}{3} \int (C dx + E dy); \text{ e } B = \int (D dy + F dx);$$

porém se determinarmos a Fluxão parcial de  $A$  fuppondo fómte  $y$  fluente, e a dividirmos por  $dy$ ; e se determinarmos a Fluxão parcial de  $B$  fuppondo fómte  $x$  fluente, e a dividirmos por  $dx$ , teremos

$$\frac{dA}{dy} = \frac{1}{3} \int \left( \frac{dC}{dy} dx + \frac{dE}{dy} dy \right); \text{ e } \frac{dB}{dx} = \frac{1}{3} \int \left( \frac{dD}{dx} dy + \frac{dF}{dx} dx \right);$$

mas he  $\frac{dD}{dx} = \frac{dE}{dy}$ ; e  $\frac{dF}{dx} = \frac{dC}{dy}$ ; logo  $\frac{dB}{dx} = \frac{1}{3} \int \left( \frac{dC}{dy} dx + \frac{dE}{dy} dy \right)$ ;

e por confequencia

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}.$$

As ultimas tres expreffões achadas pelas noffas Formulas faõ confequencias neceffarias das precedentes; e por tanto naõ se podem considerar como condições deftinhas d'ellas.

### §. XXIX.

Segundo os veftigios de Euler, da mefma forte que em o §. XXVI, acharemos, que fendo  $V$  huma Função Fluxional da quarta ordem, e envolvendo fómte duas Fluente primitivas  $x$ , e  $y$ , ifto he, fendo

$$\begin{aligned} V = & A d^4 x + B d^4 y + C dx d^3 x + D dy d^3 y + E dy d^3 x \\ & + F dx d^3 y + G dd x^2 + H dd y^2 + I dx^2 dd x + L dy^2 dd y \\ & + M dx d y dd x + N dx d y dd y + O dd x dd y \end{aligned}$$

+

$$+ P dy^2 ddx + Q dx^2 ddy + R dx^4 + S dy^4 + T dy dx^3 \\ + U dx dy^3 + X dx^2 dy^2$$

para fer Fluxão exacta de outra Função da ordem o ferá percizo, que os seus coefficients satisfazão ás seguintes Equações

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}; \quad C = 4 \frac{dA}{dx}; \quad D = 4 \frac{dB}{dy}; \quad E = 4 \frac{dA}{dy}; \quad F = 4 \frac{dB}{dx};$$

$$G = 3 \frac{dA}{dx}; \quad H = 3 \frac{dB}{dy}; \quad I = 6 \frac{d^2 A}{dx dx}; \quad L = 6 \frac{d^2 B}{dy dy};$$

$$M = 12 \frac{d^2 A}{dx dy}; \quad N = 12 \frac{d^2 B}{dx dy}; \quad O = 6 \frac{dA}{dy}; \quad P = 6 \frac{d^2 A}{dy dy};$$

$$Q = 6 \frac{d^2 B}{dx dx}; \quad R = \frac{d^3 A}{dx^3}; \quad S = \frac{d^3 B}{dy^3}; \quad T = 4 \frac{d^3 A}{dx^2 dy};$$

$$U = 4 \frac{d^3 B}{dx dy^2}; \quad X = 6 \frac{d^3 A}{dx dy^2};$$

§. XXX.

Segundo porém o nosso methodo as Equações, a que os coefficients de  $dV$  devem satisfazer, são

$$N'' - \frac{1}{4} dN'' = 0$$

$$N^{2'} - \frac{2}{3} dN^{3'} = 0$$

$$P'' - \frac{1}{4} dP^{2'} = 0$$

$$P^{2'} - \frac{2}{3} dP^{3'} = 0$$

e substituindo por  $N''; N^{2'}; N^{3'}; P''; P^{2'}; P^{3'}$  os seus valores

tirados da Formula geral proposta, a primeira se converte-  
rá em

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{dA}{dx} - \frac{1}{4} C \right) d^4 x + \left( \frac{dB}{dx} - \frac{1}{4} F \right) d^4 y + \left( \frac{3}{4} \frac{dC}{dx} - \frac{1}{2} I \right) dx d^3 x \\
 & + \left( \frac{dD}{dx} - \frac{1}{4} \frac{dF}{dy} - \frac{1}{4} N \right) dy d^3 y + \left( \frac{dE}{dx} - \frac{1}{4} \frac{dC}{dy} - \frac{1}{4} M \right) dy d^3 x \\
 & + \left( \frac{3}{4} \frac{dF}{dx} - \frac{1}{2} Q \right) dx d^3 y + \left( \frac{dG}{dx} - \frac{1}{2} I \right) d d x^2 + \left( \frac{dH}{dx} - \frac{1}{4} N \right) d d y^2 \\
 & + \left( \frac{1}{2} \frac{dI}{dx} - 3 R \right) d x^2 d d x + \left( \frac{dL}{dx} - \frac{1}{4} \frac{dN}{dy} - \frac{3}{4} U \right) d y^2 d d y \\
 & + \left( \frac{3}{4} \frac{dM}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dy} - \frac{3}{2} T \right) dx dy d d x + \left( \frac{3}{4} \frac{dN}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} - X \right) dx dy d d y \\
 & + \left( \frac{dO}{dx} - \frac{1}{4} M - \frac{1}{2} Q \right) d d x d d y + \left( \frac{dP}{dx} - \frac{1}{4} \frac{dM}{dy} - \frac{1}{2} X \right) dy^2 d d x \\
 & + \left( \frac{1}{2} \frac{dQ}{dx} - \frac{3}{4} T \right) dx^2 d d y + \left( \frac{dS}{dx} - \frac{1}{4} \frac{dU}{dy} \right) dy^4 + \left( \frac{1}{4} \frac{dT}{dx} - \frac{dR}{dy} \right) dy d x^3 \\
 & + \left( \frac{3}{4} \frac{dU}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dX}{dy} \right) dx dy^3 + \left( \frac{1}{2} \frac{dX}{dx} - \frac{3}{4} \frac{dT}{dy} \right) dx^2 dy^2 = 0
 \end{aligned}$$

a segunda em

$$\begin{aligned}
 & \left( C - \frac{4}{3} G \right) d^4 x + \left( F - \frac{2}{3} O \right) d^4 y + \left( \frac{2}{3} I - \frac{4}{3} \frac{dG}{dx} \right) d x d d x \\
 & + \left( N - \frac{4}{3} P - \frac{2}{3} \frac{dO}{dy} \right) d y d d y + \left( 2 Q - \frac{2}{3} M - \frac{2}{3} \frac{dO}{dx} \right) d x d d y \\
 & + \left( \frac{1}{3} M - \frac{4}{3} \frac{dG}{dy} \right) dy d d x + \left( 4 R - \frac{2}{3} \frac{dI}{dx} \right) d x^3 + \left( U - \frac{2}{3} \frac{dP}{dy} \right) dy^3 \\
 & + \left( 3 T - \frac{2}{3} \frac{dI}{dy} - \frac{2}{3} \frac{dM}{dx} \right) dx^2 dy + \left( 2 X - \frac{2}{3} \frac{dP}{dx} - \frac{2}{3} \frac{dM}{dy} \right) dx dy^2 = 0
 \end{aligned}$$

a terceira em

$$\left( \frac{dA}{dy} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{dA}{dy} - \frac{1}{4} E \right) d^3x + \left( \frac{dB}{dy} - \frac{1}{4} D \right) d^3y + \left( \frac{3}{4} \frac{dD}{dy} - \frac{1}{2} L \right) dy d^3y \\
 & + \left( \frac{dC}{dy} - \frac{1}{4} \frac{dE}{dx} - \frac{1}{4} M \right) dx d^3x + \left( \frac{dF}{dy} - \frac{1}{4} \frac{dD}{dx} - \frac{1}{4} N \right) dx d^3y \\
 & + \left( \frac{3}{4} \frac{dE}{dy} - \frac{1}{2} P \right) dy d^3x + \left( \frac{dG}{dy} - \frac{1}{4} M \right) d dx^2 + \left( \frac{dH}{dy} - \frac{1}{2} L \right) ddy^2 \\
 & + \left( \frac{dI}{dy} - \frac{1}{4} \frac{dM}{dx} - \frac{3}{4} T \right) dx^2 d dx + \left( \frac{1}{2} \frac{dL}{dy} - 3 S \right) dy^2 d dy \\
 & + \left( \frac{3}{4} \frac{dM}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} - X \right) dx dy d dx + \left( \frac{3}{4} \frac{dN}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dL}{dx} - \frac{3}{2} U \right) dx dy ddy \\
 & + \left( \frac{dO}{dy} - \frac{1}{4} N - \frac{1}{2} P \right) d dx ddy + \left( \frac{dQ}{dy} - \frac{1}{4} \frac{dN}{dx} - \frac{1}{2} X \right) dx^2 d dy \\
 & + \left( \frac{1}{2} \frac{dP}{dy} - \frac{3}{4} U \right) dy^2 d dx + \left( \frac{dR}{dy} - \frac{1}{4} \frac{dT}{dx} \right) dx^3 + \left( \frac{3}{4} \frac{dT}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dX}{dx} \right) dy d dx^3 \\
 & + \left( \frac{1}{4} \frac{dU}{dy} - \frac{dS}{dx} \right) dx d y^3 + \left( \frac{1}{2} \frac{dX}{dy} - \frac{3}{4} \frac{dU}{dx} \right) dx dy^2 = 0
 \end{aligned}$$

E a quarta em

$$\begin{aligned}
 & \left( D - \frac{4}{3} H \right) d^3y + \left( E - \frac{2}{3} O \right) d^3x + \left( \frac{2}{3} L - \frac{4}{3} \frac{dH}{dy} \right) dy d d y \\
 & + \left( M - \frac{4}{3} Q - \frac{2}{3} \frac{dO}{dx} \right) dx d d x + \left( 2 P - \frac{2}{3} N - \frac{2}{3} \frac{dO}{dy} \right) dy d d x \\
 & + \left( \frac{1}{3} N - \frac{4}{3} \frac{dH}{dx} \right) dx d d y + \left( 4 S - \frac{2}{3} \frac{dL}{dy} \right) dy^3 + \left( T - \frac{2}{3} \frac{dO}{dx} \right) dx^3 \\
 & + \left( 3 U - \frac{2}{3} \frac{dL}{dx} - \frac{2}{3} \frac{dN}{dy} \right) dx dy^2 + \left( 2 X - \frac{2}{3} \frac{dN}{dx} - \frac{2}{3} \frac{dC}{dy} \right) dx^2 dy = 0
 \end{aligned}$$

Das quaes se deduzem com summa facilidade todas as do §. XXIX ; mas que ao mesmo tempo daõ muitas outras superabundantes.

§. XXXI.

## §. XXXI.

Se continuaffemos a confrontar as Equações de condição, a que o nosso methodo conduz, com as que o methodo de *Euler* dá para as Formulas das outras ordens, continuariamos a encontrar a mesma conformidade entre os resultados de hum e outro; mas tambem continuariamos a observar, que quanto maior for o expoente da ordem fluxional, tanto maior será o numero das Equações superabundantes, a que pelo nosso seremos conduzidos: o que de algum modo autoriza a suspeita, de que elle possa ainda admittir bastante simplificação.

## §. XXXII.

Se reflectirmos, que o numero das Equações particulares, em que se rezolvem as nossas

$$N'' - \frac{1}{n} dN' = 0$$

$$P'' - \frac{1}{n} dP' = 0$$

&c.

he sempre maior que  $k + \frac{\lambda(\lambda - 3)}{1.2}$ , e que nellas entraõ todas as Fluxões parciaes primeiras de todos os coefficients de  $V$ , e assim mesmo todos os coefficients dos termos da mesma Função, em que ha Fluxões primeiras de qualquer fonte primitiva, facilmente comprehendemos, que d'ellas se podem sempre deduzir, ou seja immediatamente, ou seja por meio de eliminações, e do Methodo inverso das Fluxões, todas as Equações de condição, a que seriamos conduzidos seguindo os principios de *Euler*, sem que seja necessario conhecer primeiro as Equações relativas aos grãos precedentes.

## §. XXXIII.

§. XXXIII.

Querendo por exemplo as Equações de condição relativas ás Fluxões da quarta ordem das Funcções que envolvem sómente duas fontes , substituindo em as Equações

$$N^{1'} - \frac{1}{n} dN^{2'} = 0$$

$$P^{1'} - \frac{1}{n} dP^{2'} = 0$$

os valores de  $N''$ ;  $N'''$ ;  $P''$ ; e  $P'''$ ; tirados da fórmula geral das Fluxões da dita ordem acharemos a primeira e terceira das quatro Equações do §. XXX , das quaes procedendo segundo a ordem alfabetica, e fazendo as substituições convenientes tiraremos immediatamente as seguintes Equações

$$C = 4 \frac{dA}{dx}; D = 4 \frac{dB}{dy}; E = 4 \frac{dA}{dy}; F = 4 \frac{dB}{dx}; I = 6 \frac{ddA}{dx^2};$$

$$I = 2 \frac{dG}{dy}; L = 6 \frac{ddB}{dy^2}; L = 2 \frac{dH}{dy}; M = 12 \frac{ddA}{dx dy}; M = 4 \frac{dG}{dy};$$

$$N = 12 \frac{ddB}{dx dy}; N = 4 \frac{dH}{dx}; P = 6 \frac{ddA}{dy^2}; P = 2 \frac{dO}{dy} - 6 \frac{ddB'}{dx dy};$$

$$Q = 6 \frac{ddB}{dx^2}; Q = 2 \frac{dO}{dx} - 6 \frac{ddA}{dx dy}; R = \frac{d^3A}{dx^3}; S = \frac{d^3B}{dy^3};$$

$$T = 4 \frac{d^3B}{dx^3}; T = 4 \frac{d^3A}{dx^2 dy}; U = 4 \frac{d^3B}{dx dy^2}; U = 4 \frac{d^3A}{dy^3}; X = 6 \frac{d^3B}{dx^2 dy};$$

$$X = 6 \frac{d^3A}{dx dy^2}.$$

Nas quaes se achão incluidas todas as do §. XXIX menos a 1ª, a 6ª, a 7ª, e a 12ª; porém igualando os dois valores de  $X$ , os dois de  $U$ , e os dois de  $T$ , teremos

Tom. II.

Mmm

$d^3A$

$$\frac{d^3 A}{dx dy^2} = \frac{d^3 B}{dx^2 dy}; \quad \frac{d^3 A}{dy^3} = \frac{d^3 B}{dx dy^2}; \quad \frac{d^3 A}{dx^2 dy} = \frac{d^3 B}{dx^3};$$

multiplicando a primeira d'estas Equações por  $dx$ , a segunda por  $dy$ , somando-as, e applicando-lhe o Methodo inverfo das Fluxões teremos

$$\frac{ddA}{dy^2} = \frac{ddB}{dx dy},$$

e multiplicando a primeira por  $dy$ , e a terceira por  $dx$  somando-as, e applicando-lhe o Methodo inverfo das Fluxões teremos

$$\frac{ddA}{dx dy} = \frac{ddB}{dx^2}.$$

Se multiplicarmos a primeira d'estas duas novas Equações por  $dy$ , e a segunda por  $dx$ , e as somarmos, e lhe applicarmos o Methodo Inverfo das Fluxões teremos por ultimo rezultado

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}.$$

Igualando os dois valores de  $Q$ , e os dois valores de  $P$ , teremos

$$\frac{dO}{dx} = 3 \frac{ddA}{dx dy} + 3 \frac{ddB}{dx^2} = 6 \frac{ddA}{dx dy}$$

$$\frac{dO}{dy} = 3 \frac{ddA}{dy^2} + 3 \frac{ddB}{dy dx} = 6 \frac{ddA}{dy^2}$$

Equações das quaes se deduz  $dO = 6d \frac{dA}{dy}$ ; e por consequencia uzando do Methodo inverfo das Fluxões

$$O = 6 \frac{dA}{dy} = 6 \frac{dB}{dx}$$

Da

Da mesma forte igualando os dois valores de  $N$ , e os dois valores de  $L$ , e procedendo por hum modo analogo se achará

$$H = 3 \frac{dB}{dy}.$$

Assim como tambem igualando os dois valores de  $M$ , e os dois valores de  $I$ , e procedendo da mesma maneira se achará

$$G = 3 \frac{dA}{dx},$$

que são justamente as Equações que faltavaõ para completar as do §. XXIX.

#### §. XXXIV.

D'aqui podemos concluir, que uzando sómente da primeira Equação de cada serie das do §. X podemos em todos os cazos verificar se a Função Fluxional proposta  $V$  he ou não Fluxão exacta de alguma Função da ordem 0: porém esta indagação por semelhante modo pede de ordinario na prática, sendo  $n > 3$ , tanta attenção, e tantas combinações, que a simplificação exposta em o §. XXIV, me parece preferivel, e por tanto julgo desnecessario entrar aqui em maior explicação a este respeito.

#### §. XXXV.

Até aqui não temos supposto, que na Função proposta  $V$  houvesse Fluxão alguma constante; mas havendo-a, neste cazo para reconhecer se a dita Função he ou não Fluxão exacta de alguma Função da ordem 0, basta, como adverte M. de Condorcet, que os coefficients de  $dV$  satisfazão ás series de Equações de condição do §. X relativas ás variaveis primitivas, cujas Fluxões forem tambem Fluents.

O

O sobredito Geometra deduz esta proposição como huma consequencia immediata da analyse dos quatro primeiros Problemas do seu *Calculo Integral*; mas basta por ventura seguir a dita analyse para se conhecer demonstrativamente a verdade da dita proposição? O fim a que por aquella analyse se caminha em o Problema quarto he, se não me engano, buscar as relações, que necessariamente devem ligar entre si as quantidades  $N''; N^{2''}; N^{3''}; \&c. P''; P^{2''}; P^{3''}; \&c. \&c.$  no caso de ser  $V$  Fluxão exacta de huma Função da ordem  $o$ ; mas a supposição de huma Fluxão primeira constante, por exemplo  $dy$ , não faz que esta Fluxão não exista em  $V$ , como existiria se não fosse constante, e sendo  $P^{2''} = \frac{dV}{ddy}$  he bem visível, que de ser  $ddy = 0$  se não segue ser  $P^{2''} = 0$ . Ora nós temos demonstrado, que sendo  $V$  Fluxão exacta de huma Função da ordem  $o$ ,  $P^{2''}$  deve ter com  $P''$  a relação, que exprime a Equação  $P'' - \frac{1}{n} dP^{2''} = 0$ ; logo parece, que quando se determina a Fluxão de  $V$  com o fim de extrahir d'ella os valores de  $N''; N^{2''}; N^{3''}; \&c.$  se deve proceder a este calculo de maneira, que da expressão de  $dV$  se possaõ tambem extrahir  $P''$ ; e  $P^{2''}$ : isto he; parece, que neste calculo não deve reputar  $dy$  como constante; mas sim taõ sómente na expressão de  $P^{2''}$ , fazendo  $ddy = 0$ ; pois que de outra maneira se omitiria aquella Equação  $P'' - \frac{1}{n} dP^{2''} = 0$ , á qual  $V$  deve incontestavelmente satisfazer, se for Fluxão exacta de alguma Função da ordem  $o$ . E mostra por ventura evidentemente a analyse de M. de Condorcet a superabundancia d'esta Equação?

## §. XXXVI.

Ainda que ella não seja de absoluta necessidade no

cazo de que se trata, com tudo he igualmente verdadeira, e servirá sempre para abreviar, e simplificar a sobredita indagação; pois huma vez admitida, em vez de precisarmos verificar todas as Equações de condição relativas a cada huma das outras Fluents primitivas, bastará que verifiquemos metade, sendo  $n$  numero par, e metade de todas menos huma, sendo  $n$  numero impar. A demonstração d'esta Proposição se deriva dos mesmos principios expostos em os §§. XXIII, e XXIV; mas para maior clareza, circumstancia que dezejára não faltasse jámais em meus escritos, e de que parece que alguns Geometras fugirão de proposito, juntarei hum exemplo, em que procederei por dois differentes caminhos á indagação, de que se trata.

§. XXXVII.

Seja por exemplo  $V$  huma Função Fluxional da quarta ordem, que involva sómente duas variaveis, e em que  $dy$  seja constante. A sua fórmula geral não desfirá da fórmula geral transcrita em o §. XXIX senão em não ter nenhum dos termos, em que entraõ  $ddy$ ,  $d^3y$ , e  $d^4y$ ; por tanto será

$$V = Ad^4x + Cdx d^3x + Edy d^3x + Gddx^2 + Idx^2 ddx + Mdx dy ddx + Pdy^2 ddx + Rdx^4 + Sdy^4 + Tdy dx^3 + Udx dy^3 + Xdx^2 dy^2.$$

e as condições, que determinaõ os coefficients aqui expressos, serão as mesmas do §. XXIX, com a differença de serem todas expressadas em Fluxões parciaes de  $A$ ; o que se conseguirá substituindo  $\int \frac{dA}{dy} dx$  em lugar de  $B$ . Por este modo teremos, que as condições necessarias no presente cazo, para que  $V$  seja Fluxão exacta de huma Função da ordem  $o$ , serão

$$C = 4 \frac{dA}{dx}; E = 4 \frac{dA}{dy}; G = 3 \frac{dA}{dx}; I = 6 \frac{ddA}{dx dx}; M = 12 \frac{ddA}{dx dy};$$

Tom. II. Nnn P = 6

$$P = 6 \frac{dA}{dy}; R = \frac{d^3 A}{dx^3}; T = 4 \frac{d^3 A}{dy dx^2}; U = 4 \frac{d^3 A}{dy^3}; X = 6 \frac{d^3 A}{dx dy^2};$$

$$S = \int \frac{d^4 A}{dy^4} dx; \text{ ou } \frac{dS}{dx} = \frac{d^4 A}{dy^4}$$

## §. XXXVIII.

Segundo a regra exposta (§. XXXIII.) as nossas Equações de condição faõ

$$N^{1'} - \frac{1}{4} dN^{2'} = 0$$

$$N^{2'} - \frac{2}{3} dN^{3'} = 0$$

$$P^{1'} - \frac{1}{4} dP^{2'} = 0$$

as quaes, substituindo por  $N^{1'}$ ;  $N^{2'}$ ;  $N^{3'}$ ;  $P^{1'}$ ; e  $P^{2'}$ ; os seus valores tirados de  $dV$ , se converteraõ a primeira em

$$\left(\frac{dA}{dx} - \frac{1}{4}C\right)dx^3 + \left(\frac{3dC}{4dx} - \frac{1}{2}I\right)dx dx^3 + \left(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{4}\frac{dC}{dy} - \frac{1}{4}M\right)dy dx^3$$

$$+ \left(\frac{dG}{dx} - \frac{1}{2}I\right)ddx^2 + \left(\frac{1dI}{2dx} - 3R\right)dx^2 ddx + \left(\frac{dP}{dx} - \frac{1}{4}\frac{dM}{dy} - \frac{1}{2}X\right)dy^2 ddx$$

$$+ \left(\frac{3}{4}\frac{dM}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dy} - \frac{3}{2}T\right)dx dy ddx + \left(\frac{dS}{dx} - \frac{1}{4}\frac{dU}{dy}\right)dy^4 +$$

$$\left(\frac{1}{4}\frac{dI}{dx} - \frac{dR}{dy}\right)dy dx^3 + \left(\frac{3dU}{4dx} - \frac{1}{2}\frac{dX}{dy}\right)dx dy^3 + \left(\frac{1}{2}\frac{dX}{dx} - \frac{3dT}{4dy}\right)dx^2 dy^2 = 0$$

A segunda em

$$\left(C - \frac{4}{3}G\right)dx^3 + \left(\frac{2}{3}I - \frac{4}{3}\frac{dG}{dx}\right)dx dx dx + \left(\frac{1}{3}M - \frac{4}{3}\frac{dG}{dy}\right)dy ddx$$

$$+ \left(3T - \frac{2}{3}\frac{dI}{dy} - \frac{2}{3}\frac{dM}{dx}\right)dx^2 dy + \left(2X - \frac{2}{3}\frac{dP}{dx} - \frac{2}{3}\frac{dM}{dy}\right)dx dy^2$$

$$+ \left(4R - \frac{2}{3}\frac{dI}{dx}\right)dx^3 + \left(U - \frac{2}{3}\frac{dP}{dy}\right)dy^3 = 0$$

a terceira em

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dA}{dy} - \frac{1}{4} E \right) d^4x + \left( \frac{3}{4} \frac{dE}{dy} - \frac{1}{2} P \right) dy d^3x + \left( \frac{dG}{dy} - \frac{1}{4} \frac{dE}{dx} - \frac{1}{4} M \right) dx d^2x \\ & + \left( \frac{dG}{dy} - \frac{1}{4} M \right) dd^2x + \left( \frac{1}{2} \frac{dP}{dy} - \frac{3}{4} U \right) dy^2 dd^2x + \left( \frac{dI}{dy} - \frac{1}{4} \frac{dM}{dx} - \frac{3}{4} T \right) dx^2 dd^2x \\ & + \left( \frac{dR}{dy} - \frac{1}{4} \frac{dT}{dx} \right) dx^4 + \left( \frac{3}{4} \frac{dM}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} - X \right) dx dy dd^2x + \left( \frac{1}{4} \frac{dU}{dy} - \frac{dS}{dx} \right) dx dy^3 \\ & + \left( \frac{3}{4} \frac{dT}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dX}{dx} \right) dy dx^3 + \left( \frac{1}{2} \frac{dX}{dy} - \frac{3}{4} \frac{dU}{dx} \right) dx^2 dy^2 = 0 \end{aligned}$$

Equações de que se tiraõ, como he visivel, com summa facilidade todas as que acima determinamos: advertindo que pela regra de M. de Condorcet seria preciso empregarmos todas as Equações relativas á variavel  $x$ ; e posto que no presente cazo esta ventagem seja pouco notavel, ella o fará tanto mais quanto maior for o numero das variaveis, que entrarem em  $V$ , e quanto mais alto for o expoente da sua ordem Fluxional,

§. XXXIX.

O Theorema geral representado pelas formulas geraes do §. XVII. abrange em toda a sua extençãõ a Theorica das Equações de condiçãõ das Funcções Fluxionaes, que são Fluxões exactas de outra alguma Funcção de qualquer ordem inferior; porém como ha muitas, que naõ o sendo se tornaõ taes logo que sejaõ multiplicadas por factores convenientes para esse effeito, para completar a Theorica geral das Equações de condiçãõ passaremos a determinar as condições d'este segundo genero de Funcções Fluxionaes.

## S E C Ç A Õ III.

*Das Equações de condiçã das Funções Fluxionaes, que não sendo Fluxões exactas se podem reduzir a que o sejam sendo multiplicadas por Factores convenientes.*

## §. XL.

Seja  $V = 0$  huma Equação Fluxional de qualquer ordem  $n$ , e de qualquer numero de variaveis, tal porém que se reconheça não ser  $V$  Fluxão exacta de nenhuma Função de ordem inferior, mas que sendo multiplicada por hum factor conveniente  $P$  fique sendo Fluxão exacta de huma Função  $B$  da ordem  $0$ , isto he, fique sendo

$$PV = d^n B.$$

Determinando a Fluxão de  $V$  temos

$$\begin{aligned} dV = & N^1 dx + N^2 dp + N^3 dp' + N^4 dp'' + N^5 dp''' + \&c. \\ & + P^1 dy + P^2 dq + P^3 dq' + P^4 dq'' + P^5 dq''' + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

e suppondo que seja

$$\begin{aligned} dP = & M^1 dx + M^2 dp + M^3 dp' + M^4 dp'' + M^5 dp''' + \&c. \\ & + L^1 dy + L^2 dq + L^3 dq' + L^4 dq'' + L^5 dq''' + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

ferá

$$\begin{aligned} d(PV) = & (PN^1 + VM^1)dx + (PN^2 + VM^2)dp + (PN^3 + VM^3)dp' + \&c. \\ & + (PP^1 + VL^1)dy + (PP^2 + VL^2)dq + (PP^3 + VL^3)dq' + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

por

por tanto devendo ser  $PV$  Fluxaõ exacta de huma Funçaõ da ordem  $\circ$  os coefficients de  $d(PV)$  devem satisfazer a todas as Equações de condiçaõ do §. X, e assim devemos ter a serie de Equações de condiçaõ

$$\left(N^{1'} - \frac{1}{n} dN^{2'}\right)P - \frac{1}{n} N^{2'} dP + \left(M^{1'} - \frac{1}{n} dM^{2'}\right)V - \frac{1}{n} M^{2'} dV = 0$$

$$\left(N^{2'} - \frac{2}{n-1} dN^{3'}\right)P - \frac{2}{n-1} N^{3'} dP + \left(M^{2'} - \frac{2}{n-1} dM^{3'}\right)V - \frac{2}{n-1} M^{3'} dV = 0$$

$$\left(N^{3'} - \frac{3}{n-2} dN^{4'}\right)P - \frac{3}{n-2} N^{4'} dP + \left(M^{3'} - \frac{3}{n-2} dM^{4'}\right)V - \frac{3}{n-2} M^{4'} dV = 0$$

.....

$$\left(N^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)'}\right)P - \frac{n-2}{3} N^{(n-1)'} dP + \left(M^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3} dM^{(n-1)'}\right)V - \frac{n-2}{3} M^{(n-1)'} dV = 0$$

$$- \frac{n-2}{3} M^{(n-1)'} dV = 0$$

$$\left(N^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dN^{n'}\right)P - \frac{n-1}{2} N^{n'} dP + \left(M^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dM^{n'}\right)V - \frac{n-1}{2} M^{n'} dV = 0$$

$$- \frac{n-1}{2} M^{n'} dV = 0$$

$$\left(N^{n'} - \frac{n}{1} dN^{(n+1)'}\right)P - \frac{n}{1} N^{(n+1)'} dP + \left(M^{n'} - \frac{n}{1} dM^{(n+1)'}\right)V - \frac{n}{1} M^{(n+1)'} dV = 0$$

$$- \frac{n}{1} M^{(n+1)'} dV = 0$$

relativa á variavel  $x$ : a serie

$$\left(P^{1'} - \frac{1}{n} dP^{2'}\right)P - \frac{1}{n} P^{2'} dP + \left(L^{1'} - \frac{1}{n} dL^{2'}\right)V - \frac{1}{n} L^{2'} dV = 0$$

$$\left(P - \frac{2}{n-1} dP^{3'}\right)P - \frac{2}{n-1} P^{3'} dP + \left(L - \frac{2}{n-1} dL^{3'}\right)V - \frac{2}{n-1} L^{3'} dV = 0$$

$$\left(P - \frac{3}{n-2} dP^{4'}\right)P - \frac{3}{n-2} P^{4'} dP + \left(L - \frac{3}{n-2} dL^{4'}\right)V - \frac{3}{n-2} L^{4'} dV = 0$$

$$\left(P - \frac{n-2}{3} dP^{(n-1)'}\right)P - \frac{n-2}{3} P^{(n-1)'} dP + \left(L - \frac{n-2}{3} dL^{(n-1)'}\right)V - \frac{n-2}{3} L^{(n-1)'} dV = 0$$

$$\left(P - \frac{n-1}{2} dP^{n'}\right)P - \frac{n-1}{2} P^{n'} dP + \left(L - \frac{n-1}{2} dL^{n'}\right)V - \frac{n-1}{2} L^{n'} dV = 0$$

$$\left(P - \frac{n}{1} dP^{(n+1)'}\right)P - \frac{n}{1} P^{(n+1)'} dP + \left(L - \frac{n}{1} dL^{(n+1)'}\right)V - \frac{n}{1} L^{(n+1)'} dV = 0$$

relativa á variavel  $y$  ; e huma serie femelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas.

### §. XLI.

Attendendo porém a que he  $V = 0$  , e  $dV = 0$  ; a primeira d'estas series se reduz a

$$\left(N^{1'} - \frac{1}{n} dN^{2'}\right)P - \frac{1}{n} N^{2'} dP = 0$$

$$\left(N^{2'} - \frac{2}{n-1} dN^{3'}\right)P - \frac{2}{n-1} N^{3'} dP = 0$$

$(N^{3'})$

$$\left(N^{3'} - \frac{3}{n-2} dN^{4'}\right)P - \frac{3}{n-2} N^{4'} dP = 0$$

-----  
 -----

$$\left(N^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)'}\right)P - \frac{n-2}{3} N^{(n-1)'} dP = 0$$

$$\left(N^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dN^{n'}\right)P - \frac{n-1}{2} N^{n'} dP = 0$$

$$\left(N^{n'} - \frac{n}{1} dN^{(n+1)'}\right)P - \frac{n}{1} N^{(n+1)'} dP = 0$$

A segunda a

$$\left(P^{1'} - \frac{1}{n} dP^{2'}\right)P - \frac{1}{n} P^{2'} dP = 0$$

$$\left(P^{2'} - \frac{2}{n-1} dP^{3'}\right)P - \frac{2}{n-1} P^{3'} dP = 0$$

$$\left(P^{3'} - \frac{3}{n-2} dP^{4'}\right)P - \frac{3}{n-2} P^{4'} dP = 0$$

-----  
 -----

$$\left(P^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3} dP^{(n-1)'}\right)P - \frac{n-2}{3} P^{(n-1)'} dP = 0$$

$$\left(P^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dP^{n'}\right)P - \frac{n-1}{2} P^{n'} dP = 0$$

$$\left(P^{n'} - \frac{n}{1} dP^{(n+1)'}\right)P - \frac{n}{1} P^{(n+1)'} dP = 0$$

e affim semelhantemente todas as outras.

## §. XLII.

Eliminando de todas estas Equações  $\frac{dP}{P}$ , se combinassêmos todos os valores de  $\frac{dP}{P}$ , que se podem d'ellas tirar, teriamos (sendo  $\lambda$  o numero das variaveis primitivas, que entraõ em  $V$ ) hum numero  $\frac{\lambda n (\lambda n - 1)}{2}$  de Equações, a que os coefficientes de  $dV$  fatisfaraõ todas as vezes que a Função  $V$ , sendo multiplicada por hum factor conveniente, se poder reduzir a ser Fluxaõ exacta da ordem fluxional  $n$ ; porêm se reflectirmos, que igualando quaesquer dos ditos valores com cada hum dos outros successivamente todas as mais igualdades, que entre estes se podem estabelecer, saõ consequencias necessarias d'aquellas, e que por tanto se naõ podem contemplar como condições differentes, veremos que o numero total das condições realmente differentes em vez de ser  $\frac{\lambda n (\lambda n - 1)}{2}$  ferá simplesmente  $\lambda n - 1$ . A escolha d'estas  $\lambda n - 1$  Equações de condição rigorosamente differentes tiradas das  $\frac{\lambda n (\lambda n - 1)}{2}$ , que a analyze nos facilita, he arbitraria; porêm sendo ao mesmo tempo conveniente e elegante que ellas sejaõ as mais faceis de calcular, e que tenhaõ entre si alguma lei de successaõ facil de notar, nós as escolheremos pela maneira seguinte.

$$nN^{(n+1)'} \left( 2N^{(n-1)'} - (n-1)dN^{n'} \right) - (n-1)N^{n'} \left( N - ndN^{(n+1)'} \right) = 0$$

$$nN^{(n+1)'} \left( 3N^{(n-2)'} - (n-2)dN^{(n-1)'} \right) - (n-2)N^{(n-1)'} \left( N - ndN^{(n+1)'} \right) = 0$$

$$nN^{(n+1)'} \left( 4N^{(n-3)'} - (n-3)dN^{(n-2)'} \right) - (n-3)N^{(n-2)'} \left( N - ndN^{(n+1)'} \right) = 0$$

$$nN^{(n+1)'}$$

-----  
 -----

$$nN^{(n+1)'} \left( (n-2)N^{3'} - 3dN^{4'} \right) - 3N^{4'} \left( N^{n'} - ndN^{(n+1)'} \right) = 0$$

$$nN^{(n+1)'} \left( (n-1)N^{2'} - 2dN^{3'} \right) - 2N^{3'} \left( N^{n'} - ndN^{(n+1)'} \right) = 0$$

$$nN^{(n+1)'} \left( nN^{1'} - dN^{2'} \right) - N^{2'} \left( N^{n'} - ndN^{(n+1)'} \right) = 0$$

$$N^{(n+1)'} \left( P^{n'} - n d P^{(n+1)'} \right) - P^{(n+1)'} \left( N^{n'} - ndN^{(n+1)'} \right) = 0$$

$$nP^{(n+1)'} \left( {}_2P^{(n-1)'} - (n-1)dP^{n'} \right) - (n-1)P^{n'} \left( P^{n'} - ndP^{(n+1)'} \right) = 0$$

$$nP^{(n+1)'} \left( {}_3P^{(n-2)'} - (n-2)dP^{(n-1)'} \right) - (n-2)P^{(n-1)'} \left( P^{n'} - ndP^{(n+1)'} \right) = 0$$

$$nP^{(n+1)'} \left( {}_4P^{(n-3)'} - (n-3)dP^{(n-2)'} \right) - (n-3)P^{(n-2)'} \left( P^{n'} - ndP^{(n+1)'} \right) = 0$$

-----  
 -----

$$nP^{(n+1)'} \left( (n-2)P^{3'} - 3dP^{4'} \right) - 3P^{4'} \left( P^{n'} - ndP^{(n+1)'} \right) = 0$$

$$nP^{(n+1)'} \left( (n-1)P^{2'} - 2dP^{3'} \right) - 2P^{3'} \left( P^{n'} - ndP^{(n+1)'} \right) = 0$$

$$nP^{(n+1)'} \left( nP^{1'} - dP^{2'} \right) - P^{2'} \left( P^{n'} - ndP^{(n+1)'} \right) = 0$$

&c. &c.

§. XLIII.

Se a Função proposta  $V$  não satisfizer a estas Equações  
 Tom. II. Ppp ções

ções de condição deveremos examinar se multiplicandoa por hum factor conveniente  $P$  se poderá reduzir a ser Fluxão exacta de huma Função Fluxional da primeira ordem, e como neste caso os coefficients de  $d(PV)$  devem satisfazer ás condições do §. XIV, applicando-lhe o Theorema por ellas expressado, e attendendo a que  $V=0$ ;  $dV=0$ , e  $ddV=0$ , acharemos que elles devem satisfazer ás seguintes series de Equações de condição, a primeira

$$\left(N'' - 2 \frac{1}{n} dN'' + \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} ddN''\right) P - 2 \frac{1}{n} \left(N'' - \frac{2}{n-1} dN''\right) dP + \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} N'' ddP = 0$$

$$\left(N''' - 2 \frac{2}{n-1} dN''' + \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} ddN'''\right) P - 2 \frac{2}{n-1} \left(N''' - \frac{3}{n-2} dN'''\right) dP + \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} N''' ddP = 0$$

$$\left(N^{(4)} - 2 \frac{3}{n-2} dN^{(4)} + \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} ddN^{(4)}\right) P - 2 \frac{3}{n-2} \left(N^{(4)} - \frac{4}{n-3} dN^{(4)}\right) dP + \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} N^{(4)} ddP = 0$$

$$\left(N^{(n-3)} - 2 \frac{n-3}{4} dN^{(n-2)} + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} ddN^{(n-1)}\right) P -$$

$$2 \frac{n-3}{4} \left(N^{(n-2)} - \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)}\right) dP + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} N^{(n-1)} ddP = 0$$

$$\left(N^{(n-2)} - 2 \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} ddN^{(n)}\right) P -$$

$$2 \frac{n-2}{3}$$

$$2 \frac{n-2}{3} \left( N^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dN^{n'} \right) dP + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} N^{n'} ddP = 0$$

$$\left( N^{(n-1)'} - 2 \frac{n-1}{2} dN^{n'} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} ddN^{(n+1)'} \right) P - 2 \frac{n-1}{2} \left( N^{n'} - \right.$$

$$\left. \frac{n}{1} dN^{(n+1)'} \right) dP + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} N^{(n+1)'} ddP = 0$$

relativa á variavel  $x$ : a segunda

$$\left( P^{1'} - 2 \frac{1}{n} dP^{2'} + \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} ddP^{3'} \right) P - 2 \frac{1}{n} \left( P^{2'} - \frac{2}{n-1} dP^{3'} \right) dP$$

$$+ \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} P^{3'} ddP = 0$$

$$\left( P^{2'} - 2 \frac{2}{n-1} dP^{3'} + \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} ddP^{4'} \right) P - 2 \frac{2}{n-1} \left( P^{3'} - \right.$$

$$\left. \frac{3}{n-2} dP^{4'} \right) dP + \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} P^{4'} ddP = 0$$

$$\left( P^{3'} - 2 \frac{3}{n-2} dP^{4'} + \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} ddP^{5'} \right) P - 2 \frac{3}{n-2} \left( P^{4'} - \right.$$

$$\left. \frac{4}{n-3} dP^{5'} \right) dP + \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} P^{5'} ddP = 0$$

.....

$$\left( P^{(n-3)'} - 2 \frac{n-3}{4} dP^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} ddP^{(n-1)'} \right) P -$$

$$\frac{n-3}{4} \left( P^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3} dP^{(n-1)'} \right) dP + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} P^{(n-1)'} ddP = 0$$

$$\left( P^{(n-2)'} - 2 \frac{n-2}{3} dP^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} ddP^{n'} \right) P -$$

$$2 \frac{n-2}{3} \left( P^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dP^{n'} \right) dP + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} P^{n'} ddP = 0$$

$$\left( P^{(n-1)'} - 2 \frac{n-1}{2} dP^{n'} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} ddP^{(n+1)'} \right) P - 2 \frac{n-1}{2}$$

$$\left( P^{n'} - \frac{n}{1} dP^{(n+1)'} \right) dP + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} P^{(n+1)'} ddP = 0$$

relativa á variavel  $y$ ; e assim semelhantemente a respeito de cada huma das outras variaveis primitivas.

#### §. XLIV.

Eliminando d'estas Equações as quantidades  $ddP$ ; e  $\frac{dP}{d}$ ; e estabelecendo entre os valores de  $\frac{dP}{P}$ , que d'aqui resultarem, todas as igualdades rigorosamente differentes teremos as Equações de condiçãõ, a que a Função  $V$  deve satisfazer todas as vezes que sendo multiplicada por hum factor conveniente se reduzir a ser Fluxão exacta de alguma Função Fluxional da primeira ordem. Mas qual será o numero e a fórma d'estas Equações? O numero das Equações do §. antecedente sendo  $\lambda$  o numero das variaveis, e  $n$  o expoente da ordem Fluxional he  $(n-1)\lambda$ ; e por tanto havendo de se eliminar  $ddP$ , e  $\frac{dP}{P}$  parece, que o numero das Equações de condiçãõ, a que  $V$  deve satisfazer, neste cazo deve reduzirse a  $(n-1)\lambda - 2$ ; mas se for  $\lambda = 2$ , e  $n = 2$ ; será  $(n-1)\lambda - 2 = 0$ , e com tudo he preciso, que a Função proposta satisfaça a alguma condiçãõ.

#### §. XLV.

Principiemos por examinar este cazo, que á primeira vista parece não exigir condiçãõ alguma. Seja pois a Função proposta  $V$  huma Função Fluxional da segunda ordem  
das

das variaveis  $x$ , e  $y$ . As Equações que nos devem dar as condições, a que os coefficients de  $dV$  devem satisfazer, são

$$(N'' - dN^{2'} + ddN^{1'})P - (N^{2'} - 2dN^{1'})dP + N^{1'}ddP = 0$$

$$(P'' - dP^{2'} + ddP^{1'})P - (P^{2'} - 2dP^{1'})dP + P^{1'}ddP = 0$$

as quaes por maior brevidade escreveremos d'esta forte

$$B''P - C''dP + D''ddP = 0$$

$$B^{2'}P - C^{2'}dP + D^{2'}ddP = 0$$

eliminando d'ellas  $ddP$  teremos huma nova Equação

$$(B''D^{2'} - D''B^{2'})P - (C''D^{2'} - D''C^{2'})dP = 0$$

d'aqual substituinto em lugar de  $ddx$ , ou  $ddy$  o seu valor tirado da proposta, e determinando a sua Fluxão, se deduz outra nova Equação

$$Pd(B''D^{2'} - D''B^{2'}) + (B''D^{2'} - D''B^{2'})dP - (C''D^{2'} - D''C^{2'})ddP = 0 \\ - d(C''D^{2'} - D''C^{2'})dP$$

que para maior simplicidade do calculo escreveremos d'esta forte

$$B^{1'}P - C^{1'}dP + D^{1'}ddP = 0$$

D'esta se tira

$$ddP = \frac{C^{1'}dP - B^{1'}P}{D^{1'}}$$

valor que substituido nas duas primeiras as reduz a

$$(B''D^{1'} - D''B^{1'})P - (C''D^{1'} - D''C^{1'})dP = 0$$

$$(B''D''' - D''B''')P - (C''D''' - D''C''')dP = 0$$

e por tanto eliminando por meio d'ellas  $\frac{dP}{P}$  teremos a Equaçãõ

$$(B''C'' - C''B'')D''' - (B''C''' - C''B''')D'' + (B''C''' - C''B''')D' = 0$$

em que se envolvem as condições, a que a Funçaõ proposta  $V$  deve satisfazer no caso que, sendo multiplicada por hum factor conveniente  $P$ , se possa reduzir a ser Fluxaõ exacta de outra Funçaõ Fluxional da primeira ordem.

#### §. XLVI.

Ora este procedimento, naõ sendo de nenhuma forte particular ao caso proposto, nos mostra que, comparando duas a duas todas as Equações do §. XLIII, de tal forte que se tenhaõ todas as comparações de igualdade realmente differentes, que entre ellas se podem estabelecer, de cada hum d'estes pares de Equações assim combinadas se póde deduzir huma Equaçãõ de condiçãõ semelhante a do §. antecedente; e que por tanto sendo  $\lambda$  o numero das variaveis, e  $n$  o expoente da ordem fluxional da Funçaõ  $V$ , das  $(n-1)\lambda$  Equações do §. XLIII se tiraráõ  $(n-1)\lambda-1$  Equações de condiçãõ semelhantes á do §. precedente, as quaes todas deverãõ ter logar, para que  $V$  se possa reduzir a ser fluxaõ exacta de huma Funçaõ Fluxional da primeira ordem. Porém será sempre mais simples em todos os casos em que fôr  $(n-1)\lambda > 2$  proceder á eliminaçãõ de  $ddP$ , e  $\frac{dP}{P}$  pelos methodos da Algebra ordinaria, o que dará as Equações de condiçãõ necessarias com menos trabalho, e em menor numero; pois seráõ como affirma dissemos sómente  $(n-1)\lambda-2$ .

#### §. XLVII.

§. XLVII.

Suppondo que as variaveis fejaõ só duas  $x$ , e  $y$ , e escrevendo por mais brevidade as Equações do §. XLIII da fórma seguinte, teremos

$$B^{1'} P - C^{1'} dP + D^{1'} ddP = 0$$

$$B^{2'} P - C^{2'} dP + D^{2'} ddP = 0$$

$$B^{3'} P - C^{3'} dP + D^{3'} ddP = 0$$

- - - - -

- - - - -

$$B^{(n-3)'} P - C^{(n-3)'} dP + D^{(n-3)'} ddP = 0$$

$$B^{(n-2)'} P - C^{(n-2)'} dP + D^{(n-2)'} ddP = 0$$

$$B^{(n-1)'} P - C^{(n-1)'} dP + D^{(n-1)'} ddP = 0$$

primeira serie de Equações relativa á variavel  $x$ , e

$$B_{(1)}^{1'} P - C_{(1)}^{1'} dP + D_{(1)}^{1'} ddP = 0$$

$$B_{(1)}^{2'} P - C_{(1)}^{2'} dP + D_{(1)}^{2'} ddP = 0$$

$$B_{(1)}^{3'} P - C_{(1)}^{3'} dP + D_{(1)}^{3'} ddP = 0$$

- - - - -

- - - - -

$$B_{(1)}^{(n-3)'} P - C_{(1)}^{(n-3)'} dP + D_{(1)}^{(n-3)'} ddP = 0$$

$$B_{(1)}^{(n-2)'}$$

$$B_{(1)}^{(n-2)'} P - C_{(1)}^{(n-2)'} dP + D_{(1)}^{(n-2)'} ddP = 0$$

$$B_{(1)}^{(n-1)'} P - C_{(1)}^{(n-1)'} dP + D_{(1)}^{(n-1)'} ddP = 0$$

segunda serie de Equações relativa á variavel  $y$ .

§. XLVIII.

Comparando a ultima Equação da primeira serie com cada huma das outras da mesma serie : depois com a ultima da segunda , e esta com cada huma das outras da mesma segunda ; e eliminando  $ddP$  , teremos as seguintes Equações.

$$\left( \frac{B^{(n-1)'}}{B} \frac{D^{(n-2)'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{B^{(n-2)'}}{B} \right) P - \left( \frac{C^{(n-1)'}}{C} \frac{D^{(n-2)'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{C^{(n-2)'}}{C} \right) dP = 0$$

$$\left( \frac{B^{(n-1)'}}{B} \frac{D^{(n-3)'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{B^{(n-3)'}}{B} \right) P - \left( \frac{C^{(n-1)'}}{C} \frac{D^{(n-3)'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{C^{(n-3)'}}{C} \right) dP = 0$$

$$\left( \frac{B^{(n-1)'}}{B} \frac{D^{(n-4)'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{B^{(n-4)'}}{B} \right) P - \left( \frac{C^{(n-1)'}}{C} \frac{D^{(n-4)'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{C^{(n-4)'}}{C} \right) dP = 0$$

-----  
-----

$$\left( \frac{B^{(n-1)'}}{B} \frac{D^{3'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{B^{3'}}{B} \right) P - \left( \frac{C^{(n-1)'}}{C} \frac{D^{3'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{C^{3'}}{C} \right) dP = 0$$

$$\left( \frac{B^{(n-1)'}}{B} \frac{D^{2'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{B^{2'}}{B} \right) P - \left( \frac{C^{(n-1)'}}{C} \frac{D^{2'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{C^{2'}}{C} \right) dP = 0$$

$$\left( \frac{B^{(n-1)'}}{B} \frac{D^{1'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{B^{1'}}{B} \right) P - \left( \frac{C^{(n-1)'}}{C} \frac{D^{1'}}{D} - \frac{D^{(n-1)'}}{D} \frac{C^{1'}}{C} \right) dP = 0$$

$$\left( \frac{B^{(n-1)'}}{B} \frac{D_{(1)}^{(n-1)'}}{D_{(1)}} - \frac{D_{(1)}^{(n-1)'}}{D_{(1)}} \frac{B_{(1)}^{(n-1)'}}{B_{(1)}} \right) P - \left( \frac{C^{(n-1)'}}{C} \frac{D_{(1)}^{(n-1)'}}{D_{(1)}} - \frac{D_{(1)}^{(n-1)'}}{D_{(1)}} \frac{C_{(1)}^{(n-1)'}}{C_{(1)}} \right) dP = 0$$

$$\left( \frac{B_{(1)}^{(n-1)'}}{B_{(1)}} \frac{D_{(1)}^{(n-2)'}}{D_{(1)}} - \frac{D_{(1)}^{(n-1)'}}{D_{(1)}} \frac{B_{(1)}^{(n-2)'}}{B_{(1)}} \right) P - \left( \frac{C_{(1)}^{(n-1)'}}{C_{(1)}} \frac{D_{(1)}^{(n-2)'}}{D_{(1)}} - \frac{D_{(1)}^{(n-1)'}}{D_{(1)}} \frac{C_{(1)}^{(n-2)'}}{C_{(1)}} \right) dP = 0$$

$$\left( \frac{B_{(1)}^{(n-1)'}}{B_{(1)}} \frac{D_{(1)}^{(n-3)'}}{D_{(1)}} - \frac{D_{(1)}^{(n-1)'}}{D_{(1)}} \frac{B_{(1)}^{(n-3)'}}{B_{(1)}} \right) P - \left( \frac{C_{(1)}^{(n-1)'}}{C_{(1)}} \frac{D_{(1)}^{(n-3)'}}{D_{(1)}} - \frac{D_{(1)}^{(n-1)'}}{D_{(1)}} \frac{C_{(1)}^{(n-3)'}}{C_{(1)}} \right) dP = 0$$

$$\left( \frac{B_{(1)}^{(n-1)'}}{B_{(1)}} \right)$$

$$\left( \begin{matrix} (n-1)' & (n-4)' & (n-1)' & (n-4)' \\ B_{(1)} & D_{(1)}-D_{(1)} & B_{(1)} & \end{matrix} \right) P - \left( \begin{matrix} (n-1)' & (n-4)' & (n-1)' & (n-4)' \\ C_{(1)} & D_{(1)}-D_{(1)} & C_{(1)} & \end{matrix} \right) dP = 0$$

$$\left( \begin{matrix} (n-1)' & 3' & (n-1)' & 3' \\ B_{(1)} & D_{(1)}-D_{(1)} & B_{(1)} & \end{matrix} \right) P - \left( \begin{matrix} (n-1)' & 3' & (n-1)' & 3' \\ C_{(1)} & D_{(1)}-D_{(1)} & C_{(1)} & \end{matrix} \right) dP = 0$$

$$\left( \begin{matrix} (n-1)' & 2' & (n-1)' & 2' \\ B_{(1)} & D_{(1)}-D_{(1)} & B_{(1)} & \end{matrix} \right) P - \left( \begin{matrix} (n-1)' & 2' & (n-1)' & 2' \\ C_{(1)} & D_{(1)}-D_{(1)} & C_{(1)} & \end{matrix} \right) dP = 0$$

$$\left( \begin{matrix} (n-1)' & 1' & (n-1)' & 1' \\ B_{(1)} & D_{(1)}-D_{(1)} & B_{(1)} & \end{matrix} \right) P - \left( \begin{matrix} (n-1)' & 1' & (n-1)' & 1' \\ C_{(1)} & D_{(1)}-D_{(1)} & C_{(1)} & \end{matrix} \right) dP = 0$$

das quaes eliminando  $\frac{dP}{P}$  se deduzem as seguintes

$$\left( \begin{matrix} (n-1)' & (n-2)' & (n-1)' & (n-2)' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D - \left( \begin{matrix} (n-1)' & (n-3)' & (n-1)' & (n-3)' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D \left( \begin{matrix} (n-2)' \\ D \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} (n-2)' & (n-3)' & (n-2)' & (n-3)' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left( \begin{matrix} (n-1)' & (n-2)' & (n-1)' & (n-2)' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D - \left( \begin{matrix} (n-1)' & (n-4)' & (n-1)' & (n-4)' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D \left( \begin{matrix} (n-2)' \\ D \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} (n-2)' & (n-4)' & (n-2)' & (n-4)' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left( \begin{matrix} (n-1)' & (n-2)' & (n-1)' & (n-2)' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D - \left( \begin{matrix} (n-1)' & (n-5)' & (n-1)' & (n-5)' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D \left( \begin{matrix} (n-2)' \\ D \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} (n-2)' & (n-5)' & (n-2)' & (n-5)' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left( \begin{matrix} (n-1)' & (n-2)' & (n-1)' & (n-2)' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D - \left( \begin{matrix} (n-1)' & 3' & (n-1)' & 3' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D \left( \begin{matrix} (n-2)' \\ D \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} (n-2)' & 3' & (n-2)' & 3' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left( \begin{matrix} (n-1)' & (n-2)' & (n-1)' & (n-2)' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D - \left( \begin{matrix} (n-1)' & 2' & (n-1)' & 2' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D \left( \begin{matrix} (n-2)' \\ D \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} (n-2)' & 2' & (n-2)' & 2' \\ B & C & -C & B \end{matrix} \right) D^{(n-1)'} = 0$$



$$\begin{aligned} & \left( \begin{matrix} (n-1)' & (n-2)' & (n-1)' & (n-2)' \\ B_{(1)} & C_{(1)} & -C_{(1)} & B_{(1)} \end{matrix} \right)^{1'} D_{(1)} - \left( \begin{matrix} (n-1)' & 1' & (n-1)' & 1' \\ B_{(1)} & C_{(1)} & -C_{(1)} & B_{(1)} \end{matrix} \right)^{(n-2)'} D_{(1)} \\ & + \left( \begin{matrix} (n-2)' & 1' & (n-2)' & 1' \\ B_{(1)} & C_{(1)} & -C_{(1)} & B_{(1)} \end{matrix} \right)^{(n-1)'} D_{(1)} = 0 \end{aligned}$$

em que se comprehendem todas as condições, a que os coefficients de  $dV$  devem satisfazer. Se o numero das variaveis fosse maior, o procedimento aqui praticado e em o §. antecedente deixaõ bem claramente ver qual he o caminho, que se deveria seguir para se obterem as Equações de condição, a que os coefficients de  $dV$  deverião satisfazer, e por tanto podemos dispensarnos de examinar outro algum caso dos em que  $V$  possa ser reductivel a huma Fluxão exacta de outra Função Fluxional da primeira ordem.

§. XLIX.

Se depois de ter reconhecido que  $V$  não satisfaz a estas Equações de condição quizermos examinar se esta Função pode ser por outro modo tratada, para que se obtenha a sua Fluente, segue-se indagar se multiplicando-a por hum factor conveniente se poderá reduzir a ser Fluxão exacta de huma Função Fluxional da segunda ordem; e como neste caso os coefficients de  $d(PV)$  devem satisfazer ás condições do §. XVI. applicando-lhe o Theorema por ella expressado, e attendendo a que neste caso he  $V=0$ ;  $dV=0$ ;  $ddV=0$ ; e  $d^3V=0$ ; acharemos que elles devem satisfazer á seguinte serie de Equações

$$\begin{aligned} & \left( N'' - 3 \frac{1}{n} dN^{2'} - 3 \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} ddN^{3'} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} d^3 N^{4'} \right) P - \\ & 3 \frac{1}{n} \left( N^{2'} - 2 \frac{2}{n-1} dN^{3'} + \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} ddN^{4'} \right) dP + 3 \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} \left( N^{3'} \right. \\ & \left. - \frac{3}{n-2} dN^{4'} \right) ddP - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} N^{4'} d^3 P = 0 \end{aligned}$$

$$\left( N^{2'} \right.$$

$$\begin{aligned}
& (N^{2'} - 3 \frac{2}{n-1} d N^{3'} + 3 \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} dd N^{4'} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(n-1)(n-2)(n-3)} d^3 N^{5'}) P \\
& - 3 \frac{2}{n-1} (N^{3'} - 2 \frac{3}{n-2} d N^{4'} + \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} dd N^{5'}) dP + 3 \frac{2 \cdot 3}{(n-1)(n-2)} \\
& (N^{4'} - \frac{4}{n-3} d N^{5'}) ddP - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(n-1)(n-2)(n-3)} N^{5'} d^3 P = 0 \\
& (N^{3'} - 3 \frac{3}{n-2} d N^{4'} + \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} dd N^{5'} - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{(n-2)(n-3)(n-4)} d^3 N^{6'}) P \\
& - 3 \frac{3}{n-2} (N^{4'} - 2 \frac{4}{n-3} d N^{5'} + \frac{4 \cdot 5}{(n-3)(n-4)} dd N^{6'}) dP + 3 \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)} \\
& (N^{5'} - \frac{5}{n-4} d N^{6'}) ddP - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{(n-2)(n-3)(n-4)} N^{6'} d^3 P = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (N^{(n-4)'} - 3 \frac{n-4}{5} d N^{(n-3)'} + 3 \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5} dd N^{(n-2)'} - \\
& \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3 \cdot 4 \cdot 5} d^3 N^{(n-1)'}) P - 3 \frac{n-4}{5} (N^{(n-3)'} - 2 \frac{n-3}{4} d N^{(n-2)'}) \\
& + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} dd N^{(n-1)'} dP + 3 \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5} (N^{(n-2)'} - \\
& \frac{n-2}{3} d N^{(n-1)'}) ddP - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3 \cdot 4 \cdot 5} N^{(n-1)'} d^3 P = 0 \\
& (N^{(n-3)'} - 3 \frac{n-3}{4} d N^{(n-2)'} + 3 \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} dd N^{(n-1)'}) - \\
& \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} d^3 N^{(n)'} P - 3 \frac{n-3}{4} (N^{(n-2)'} - 2 \frac{n-2}{3} d N^{(n-1)'}) + \\
& \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} dd N^{(n)'} dP + 3 \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} (N^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} d N^{(n)'}) ddP \\
& - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} N^{(n)'} d^3 P = 0 \qquad (N^{(n-2)'})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (N^{(n-2)'} - 3 \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)'} + 3 \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} ddN^{n'} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 N^{(n+1)'}) P \\ & - 3 \frac{n-2}{3} (N^{(n-1)'} - 2 \frac{n-1}{2} dN^{n'} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} ddN^{(n+1)'}) dP + 3 \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \\ & (N^{n'} - \frac{1}{n} dN^{(n+1)'}) ddP - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} N^{(n+1)'} d^3 P = 0 \end{aligned}$$

relativa á variavel  $x$ ; e a huma serie semelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas

§. L.

Sendo  $\lambda$  numero das ditas variaveis, o numero total das Equações do §. antecedente será  $(n-2)\lambda$ , e eliminando  $d^3 P; dd, P;$  e  $\frac{dP}{P}$ , d'ellas se tirará hum numero  $(n-2)\lambda-3$  de Equações de condiçãõ, que deverãõ verificar-se, para que a Função proposta  $V$ , multiplicada por hum factor conveniente  $P$ , se possa reduzir a ser Fluxão exacta de outra Função Fluxional da segunda ordem: mas esta eliminação não poderá ter lugar pelas regras ordinárias da Algebra senão sendo  $(n-2)\lambda > 3$ ; pelo que tanto no caso de ser  $n=3$ , e  $\lambda=2$ ; como no caso de ser  $n=3$ , e  $\lambda=3$  deveremos recorrer a outro methodo de eliminação como fizemos em o §. XLV.

§. LI.

Porém antes de passarmos á exposiçãõ dos differentes modos, porque se podem deduzir das Equações precedentes as condições, a que  $V$  deve satisfazer, para maior facilidade do calculo, suppondo que as variaveis sejaõ tres  $x, y,$  e  $z$ ; representaremos as mencionadas Equações pela maneira seguinte, devidindo-as em tres series: a primeira

$$B''P - C''dP + D''ddP - E''d^3P = 0$$

$$B^{2'} P - C^{2'} dP + D^{2'} ddP - E^{2'} d^3 P = 0$$

$$B^{3'} P - C^{3'} dP + D^{3'} ddP - E^{3'} d^3 P = 0$$

-----  
 -----

$$B^{(n-4)'} P - C^{(n-4)'} dP + D^{(n-4)'} ddP - E^{(n-4)'} d^3 P = 0$$

$$B^{(n-3)'} P - C^{(n-3)'} dP + D^{(n-3)'} ddP - E^{(n-3)'} d^3 P = 0$$

$$B^{(n-2)'} P - C^{(n-2)'} dP + D^{(n-2)'} ddP - E^{(n-2)'} d^3 P = 0$$

relativa á variavel  $x$ , a segunda

$$B_{(1)}^{1'} P - C_{(1)}^{1'} dP + D_{(1)}^{1'} ddP - E_{(1)}^{1'} d^3 P = 0$$

$$B_{(1)}^{2'} P - C_{(1)}^{2'} dP + D_{(1)}^{2'} ddP - E_{(1)}^{2'} d^3 P = 0$$

$$B_{(1)}^{3'} P - C_{(1)}^{3'} dP + D_{(1)}^{3'} ddP - E_{(1)}^{3'} d^3 P = 0$$

-----  
 -----

$$B_{(1)}^{(n-4)'} P - C_{(1)}^{(n-4)'} dP + D_{(1)}^{(n-4)'} ddP - E_{(1)}^{(n-4)'} d^3 P = 0$$

$$B_{(1)}^{(n-3)'} P - C_{(1)}^{(n-3)'} dP + D_{(1)}^{(n-3)'} ddP - E_{(1)}^{(n-3)'} d^3 P = 0$$

$$B_{(1)}^{(n-2)'} P - C_{(1)}^{(n-2)'} dP + D_{(1)}^{(n-2)'} ddP - E_{(1)}^{(n-2)'} d^3 P = 0$$

relativa á variavel  $y$ ; e a terceira

$$B_{(2)}^{1'} P - C_{(2)}^{1'} dP + D_{(2)}^{1'} ddP - E_{(2)}^{1'} d^3 P = 0$$

$$B_{(2)}^{2'} P - C_{(2)}^{2'} dP + D_{(2)}^{2'} ddP - E_{(2)}^{2'} d^3 P = 0$$

$B_{(2)}^{3'}$

$$B_{(2)}^{3'} P - C_{(2)}^{3'} dP + D_{(2)}^{3'} ddP - E_{(2)}^{3'} d^3 P = 0$$

-----

$$B_{(2)}^{(n-4)'} P - C_{(2)}^{(n-4)'} dP + D_{(2)}^{(n-4)'} ddP - E_{(2)}^{(n-4)'} d^3 P = 0$$

$$B_{(2)}^{(n-3)'} P - C_{(2)}^{(n-3)'} dP + D_{(2)}^{(n-3)'} ddP - E_{(2)}^{(n-3)'} d^3 P = 0$$

$$B_{(2)}^{(n-2)'} P - C_{(2)}^{(n-2)'} dP + D_{(2)}^{(n-2)'} ddP - E_{(2)}^{(n-2)'} d^3 P = 0$$

relativa á variavel  $z$ .

§. LII.

Começando pois pelo cazo mais simples ; isto he, suppondo  $n = 3$ , e  $\lambda = 2$ , as Equações, a que os coefficients de  $dV$  deveráo satisfazer, feráo

$$B^1 P - C^1 dP + D^1 ddP - E^1 d^3 P = 0$$

$$B_{(1)}^1 P - C_{(1)}^1 dP + D_{(1)}^1 ddP - E_{(1)}^1 d^3 P = 0$$

por quanto, naõ havendo mais que duas variaveis, as Equações da terceira serie do §. antecedente naõ podem ter logar. Se d'estas duas eliminarmos  $d^3 P$  teremos huma nova Equação

$$(B^1 E_{(1)}^1 - B_{(1)}^1 E^1) P - (C^1 E_{(1)}^1 - C_{(1)}^1 E^1) dP + (D^1 E_{(1)}^1 - D_{(1)}^1 E^1) ddP = 0$$

da qual, substituindo primeiro em logar de  $d^3 x$ , ou  $d^3 y$  o seu valor tirado da proposta, e determinando depois a sua Fluxão, deduziremos a seguinte

$$d(B^1 E_{(1)}^1 - B_{(1)}^1 E^1) P + (B^1 E_{(1)}^1 - B_{(1)}^1 E^1) dP - (C^1 E_{(1)}^1 - C_{(1)}^1 E^1) ddP - d(C^1 E_{(1)}^1 - C_{(1)}^1 E^1) dP + d(D^1 E_{(1)}^1 - D_{(1)}^1 E^1) ddP +$$

$$+(D' E_{(1)} - D_{(1)} E') d^3 P = 0$$

Equação que por mais brevidade escreveremos da maneira seguinte

$$B_{(1)} P - C_{(1)} dP + D_{(1)} ddP - E_{(1)} d^3 P = 0$$

Comparando agora esta Equação com cada huma das duas primeiras, de quem ella se derivou, e eliminando  $d^3 P$ , teremos duas novas Equações.

$$(B' E_{(1)} - E' B_{(1)}) P - (C' E_{(1)} - E' C_{(1)}) dP + (D' E_{(1)} - E' D_{(1)}) ddP = 0$$

$$(B_{(1)} E_{(1)} - E_{(1)} B_{(1)}) P - (C_{(1)} E_{(1)} - E_{(1)} C_{(1)}) dP + (D_{(1)} E_{(1)} - E_{(1)} D_{(1)}) ddP = 0$$

que semelhantemente representaremos por

$$B_{(2)} P - C_{(2)} dP + D_{(2)} ddP = 0$$

$$B'_{(2)} P - C'_{(2)} dP + D'_{(2)} ddP = 0$$

e tornando a substituir em cada huma d'ellas em lugar de  $d^3 x$  ou  $d^3 y$  o seu valor tirado da proposta, e eliminando  $ddP$  passaremos a ter outra Equação

$$(B_{(2)} D'_{(2)} - D_{(2)} B'_{(2)}) P - (C_{(2)} D'_{(2)} - D_{(2)} C'_{(2)}) dP = 0$$

da qual pela determinação da sua Fluxão deduziremos

$$d(B_{(2)} D'_{(2)} - D_{(2)} B'_{(2)}) P + (B_{(2)} D'_{(2)} - D_{(2)} B'_{(2)}) dP - (C_{(2)} D'_{(2)} - D_{(2)} C'_{(2)}) ddP = 0$$

$$-d(C_{(2)} D'_{(2)} - D_{(2)} C'_{(2)}) dP$$

Equação que pelas razões e modo até agora praticado representaremos por

$$B_{(3)} P - C_{(3)} dP + D_{(3)} ddP = 0$$

Tirando finalmente d'esta o valor de  $ddP$ , e substituindo-o

em cada huma das duas precedentes de quem ella rezultou, ellas se reduzirão a

$$(B_{(2)} D_{(3)} - D_{(2)} B_{(3)})P - (C_{(2)} D_{(3)} - D_{(2)} C_{(3)})dP = 0$$

$$(B'_{(2)} D_3 - D'_{(2)} B_3)P - (C'_{(2)} D_{(3)} - D'_{(2)} C_{(3)})dP = 0$$

Equações das quaes pela eliminaçãõ de  $\frac{dP}{P}$  se deduz ultimamente a Equaçãõ

$$(B_{(2)}C'_{(2)} - C_{(2)}B'_{(2)})D_{(3)} - (B_{(2)}C_{(3)} - C_{(2)}B_{(3)})D'_{(2)} + (B'_{(2)}C_{(3)} - C'_{(2)}B_{(3)})D_{(2)} = 0$$

em que se encerraõ todas as condições, a que  $V$  deve satisfazer no caso de que se trata.

### §. LIII.

Sendo  $n = 3$ , e  $\lambda = 3$ ; as Equações de condiçãõ a que os coefficients de  $dV$  deverãõ satisfazer serãõ

$$B'P - C dP + D ddP - E d^3P = 0$$

$$B'_{(1)}P - C'_{(1)}dP + D'_{(1)}ddP - E'_{(1)}d^3P = 0$$

$$B'_{(2)}P - C'_{(2)}dP + D'_{(2)}ddP - E'_{(2)}d^3P = 0$$

das quaes eliminando  $d^3P$  se tira

$$(B' E'_{(1)} - E' B'_{(1)})P - (C' E'_{(1)} - E' C'_{(1)})dP + (D' E'_{(1)} - E' D'_{(1)})ddP = 0$$

$$(B'_{(1)} E'_{(2)} - E'_{(1)} B'_{(2)})P - (C'_{(1)} E'_{(2)} - E'_{(1)} C'_{(2)})dP + (D'_{(1)} E'_{(2)} - E'_{(1)} D'_{(2)})ddP = 0$$

Equações que escreveremos da maneira seguinte

$$B_{(1)}P - C_{(1)}dP + D_{(1)}ddP = 0$$

$$B_{(2)}P - C_{(2)}dP + D_{(2)}ddP = 0$$

e das quaes pela eliminaçãõ de  $ddP$  tiraremos huma nova Equaçãõ

$$(B_{(1)} D_{(2)} - D_{(1)} B_{(2)})P - (C_{(1)} D_{(2)} - D_{(1)} C_{(2)})dP = 0$$

D'esta, substituinto primeiro em logar de  $d^i x$ ,  $d^i y$ , ou  $d^i z$  o seu valor tirado da proposta, e determinando a sua Fluxaõ, deduziremos a seguinte

$$d(B_{(1)}D_{(2)} - D_{(1)}B_{(2)})P + (B_{(1)}D_{(2)} - D_{(1)}B_{(2)})dP - (C_{(1)}D_{(2)} - D_{(1)}C_{(2)})ddP = 0 \\ - d(C_{(1)}D_{(2)} - D_{(1)}C_{(2)})dP$$

Equaçãõ que representaremos por

$$B_{(3)} P - C_{(3)} dP + D_{(3)} ddP = 0$$

Comparando agora esta com cada huma das outras duas, de quem ella foi derivada, teremos duas novas Equações

$$(B_{(1)} D_{(2)} - D_{(1)} B_{(2)})P - (C_{(1)} D_{(2)} - D_{(1)} C_{(2)})dP = 0$$

$$(B_{(2)} D_{(3)} - D_{(2)} B_{(3)})P - (C_{(2)} D_{(3)} - D_{(2)} C_{(3)})dP = 0$$

das quaes eliminando  $\frac{dP}{P}$  se deduz a Equaçãõ final

$$(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)})D_{(3)} - (B_{(1)}C_{(3)} - C_{(1)}B_{(3)})D_{(2)} + (B_{(2)}C_{(3)} - C_{(2)}B_{(3)})D_{(1)} = 0$$

que encerra todas as condições, a que a Funçãõ proposta  $V$  deve satisfazer no caso de que se trata.

#### §. LIV.

Suppondo porém que seja  $n > 3$ , e por consequencia  $(n - 2) \lambda > 3$  poderemos eliminar  $d^1 P$ ;  $ddP$ ; e  $\frac{dP}{P}$  simplesmente pelos methodos da Algebra ordinaria, e obter Equaçãõ

Equações de condição da mesma forma ; porém mais simples que as precedentes : e supposto que a sua determinação não seja difficil, depois do que praticamos em o §. XLVIII , com tudo por terminar quanto respeita ao presente caso, e fazer, se he possível, ainda mais patente a constante analogia do nosso methodo de proceder em todos os cazos, suppremos que seja  $n$  hum numero qualquer, e  $\lambda = 2$  ; pois que a grandeza de  $\lambda$  de nenhuma forte altera o referido methodo. Nesta hypothese pois as nossas Equações de condição serão as duas primeiras series do §. LI, das quaes eliminando  $d^3P$  tiraremos as seguintes Equações

$$\left( B^{(n-2)'} E^{(n-3)'} - E^{(n-2)'} B^{(n-3)'} \right) P - \left( C^{(n-2)'} E^{(n-3)'} - E^{(n-2)'} C^{(n-3)'} \right) dP + \left( D^{(n-2)'} E^{(n-3)'} - E^{(n-2)'} D^{(n-3)'} \right) ddP = 0$$

$$\left( B^{(n-2)'} E^{(n-4)'} - E^{(n-2)'} B^{(n-4)'} \right) P - \left( C^{(n-2)'} E^{(n-4)'} - E^{(n-2)'} C^{(n-4)'} \right) dP + \left( D^{(n-2)'} E^{(n-4)'} - E^{(n-2)'} D^{(n-4)'} \right) ddP = 0$$

$$\left( B^{(n-2)'} E^{(n-5)'} - E^{(n-2)'} B^{(n-5)'} \right) P - \left( C^{(n-2)'} E^{(n-5)'} - E^{(n-2)'} C^{(n-5)'} \right) dP + \left( D^{(n-2)'} E^{(n-5)'} - E^{(n-2)'} D^{(n-5)'} \right) ddP = 0$$

.....

$$\left( B^{(n-2)'} E^{3'} - E^{(n-2)'} B^{3'} \right) P - \left( C^{(n-2)'} E^{3'} - E^{(n-2)'} C^{3'} \right) dP + \left( D^{(n-2)'} E^{3'} - E^{(n-2)'} D^{3'} \right) ddP = 0$$

$$\left( B^{(n-2)'} E^{2'} - E^{(n-2)'} B^{2'} \right) P - \left( C^{(n-2)'} E^{2'} - E^{(n-2)'} C^{2'} \right) dP + \left( D^{(n-2)'} E^{2'} - E^{(n-2)'} D^{2'} \right) ddP = 0$$

$\left( B^{(n-2)'} \right)$

$$\left( B^{(n-2)'} E^{1'} - E^{(n-2)'} B^{1'} \right) P - \left( C^{(n-2)'} E^{1'} - E^{(n-2)'} C^{1'} \right) dP \\ + \left( D^{(n-2)'} E^{1'} - E^{(n-2)'} D^{1'} \right) ddP = 0$$

$$\left( B^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-2)'} - E^{(n-2)'} B_{(1)}^{(n-2)'} \right) P - \left( C^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-2)'} - E^{(n-2)'} C_{(1)}^{(n-2)'} \right) dP \\ + \left( D^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-2)'} - E^{(n-2)'} D_{(1)}^{(n-2)'} \right) ddP = 0$$

$$\left( B_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-3)'} - E_{(1)}^{(n-2)'} B_{(1)}^{(n-3)'} \right) P - \left( C_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-3)'} - E_{(1)}^{(n-2)'} C_{(1)}^{(n-3)'} \right) dP \\ + \left( D_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-3)'} - E_{(1)}^{(n-2)'} D_{(1)}^{(n-3)'} \right) ddP = 0$$

$$\left( B_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-4)'} - E_{(1)}^{(n-2)'} B_{(1)}^{(n-4)'} \right) P - \left( C_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-4)'} - E_{(1)}^{(n-2)'} C_{(1)}^{(n-4)'} \right) dP \\ + \left( D_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-4)'} - E_{(1)}^{(n-2)'} D_{(1)}^{(n-4)'} \right) ddP = 0$$

$$\left( B_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-5)'} - E_{(1)}^{(n-2)'} B_{(1)}^{(n-5)'} \right) P - \left( C_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-5)'} - E_{(1)}^{(n-2)'} C_{(1)}^{(n-5)'} \right) dP \\ + \left( D_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{(n-5)'} - E_{(1)}^{(n-2)'} D_{(1)}^{(n-5)'} \right) ddP = 0$$

-----

$$\left( B_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{3'} - E_{(1)}^{(n-2)'} B_{(1)}^{3'} \right) P - \left( C_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{3'} - E_{(1)}^{(n-2)'} C_{(1)}^{3'} \right) dP \\ + \left( D_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{3'} - E_{(1)}^{(n-2)'} D_{(1)}^{3'} \right) ddP = 0$$

$$\left( B_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{2'} - E_{(1)}^{(n-2)'} B_{(1)}^{2'} \right) P - \left( C_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{2'} - E_{(1)}^{(n-2)'} C_{(1)}^{2'} \right) dP \\ + \left( D_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{2'} - E_{(1)}^{(n-2)'} D_{(1)}^{2'} \right) ddP = 0$$

$$\left( B_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{1'} - E_{(1)}^{(n-2)'} B_{(1)}^{1'} \right) P - \left( C_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{1'} - E_{(1)}^{(n-2)'} C_{(1)}^{1'} \right) dP \\ + \left( D_{(1)}^{(n-2)'} E_{(1)}^{1'} - E_{(1)}^{(n-2)'} D_{(1)}^{1'} \right) ddP = 0$$

em numero de  $2n - 5$ , e que por mais simplicidade escreveremos como se segue

$$B_{(1)} P - C_{(1)} d P + D_{(1)} d d P = 0$$

$$B_{(2)} P - C_{(2)} d P + D_{(2)} d d P = 0$$

$$B_{(3)} P - C_{(3)} d P + D_{(3)} d d P = 0$$

-----

-----

$$B_{(n-5)} P - C_{(n-5)} d P + D_{(n-5)} d d P = 0$$

$$B_{(n-4)} P - C_{(n-4)} d P + D_{(n-4)} d d P = 0$$

$$B_{(n-3)} P - C_{(n-3)} d P + D_{(n-3)} d d P = 0$$

$$B' P - C' d P + D' d d P = 0$$

$$B'_{(1)} P - C'_{(1)} d P + D'_{(1)} d d P = 0$$

$$B'_{(2)} P - C'_{(2)} d P + D'_{(2)} d d P = 0$$

$$B'_{(3)} P - C'_{(3)} d P + D'_{(3)} d d P = 0$$

-----

-----

$$B'_{(n-5)} P - C'_{(n-5)} d P + D'_{(n-5)} d d P = 0$$

$$B'_{(n-4)} P - C'_{(n-4)} d P + D'_{(n-4)} d d P = 0$$

$$B'_{(n-3)} P - C'_{(n-3)} d P + D'_{(n-3)} d d P = 0$$

§. LV.

Eliminando d'estas Equações  $ddP$  teremos as seguintes

$$(B_{(1)} D_{(2)} - D_{(1)} B_{(2)})P - (C_{(1)} D_{(2)} - D_{(1)} C_{(2)}) dP = 0$$

$$(B_{(1)} D_{(3)} - D_{(1)} B_{(3)})P - (C_{(1)} D_{(3)} - D_{(1)} C_{(3)}) dP = 0$$

$$(B_{(1)} D_{(4)} - D_{(1)} B_{(4)})P - (C_{(1)} D_{(4)} - D_{(1)} C_{(4)}) dP = 0$$

-----  
-----

$$(B_{(1)} D_{(n-5)} - D_{(1)} B_{(n-5)})P - (C_{(1)} D_{(n-5)} - D_{(1)} C_{(n-5)}) dP = 0$$

$$(B_{(1)} D_{(n-4)} - D_{(1)} B_{(n-4)})P - (C_{(1)} D_{(n-4)} - D_{(1)} C_{(n-4)}) dP = 0$$

$$(B_{(1)} D_{(n-3)} - D_{(1)} B_{(n-3)})P - (C_{(1)} D_{(n-3)} - D_{(1)} C_{(n-3)}) dP = 0$$

$$(B_{(1)} D' - D_{(1)} B')P - (C_{(1)} D' - D_{(1)} C') dP = 0$$

$$(B'_{(1)} D' - D'_{(1)} B')P - (C'_{(1)} D' - D'_{(1)} C') dP = 0$$

$$(B'_{(1)} D'_{(2)} - D'_{(1)} B'_{(2)})P - (C'_{(1)} D'_{(2)} - D'_{(1)} C'_{(2)}) dP = 0$$

$$(B'_{(1)} D'_{(3)} - D'_{(1)} B'_{(3)})P - (C'_{(1)} D'_{(3)} - D'_{(1)} C'_{(3)}) dP = 0$$

$$(B'_{(1)} D'_{(4)} - D'_{(1)} B'_{(4)})P - (C'_{(1)} D'_{(4)} - D'_{(1)} C'_{(4)}) dP = 0$$

-----  
-----

$$(B'_{(1)} D'_{(n-5)} - D'_{(1)} B'_{(n-5)})P - (C'_{(1)} D'_{(n-5)} - D'_{(1)} C'_{(n-5)}) dP = 0$$

$$(B'_{(1)} D'_{(n-4)} - D'_{(1)} B'_{(n-4)})P - (C'_{(1)} D'_{(n-4)} - D'_{(1)} C'_{(n-4)}) dP = 0$$

$$(B'_{(1)} D'_{(n-3)} - D'_{(1)} B'_{(n-3)})P - (C'_{(1)} D'_{(n-3)} - D'_{(1)} C'_{(n-3)}) dP = 0$$

das

das quaes eliminando  $\frac{dP}{P}$  se deduzem a 2ª — 7 Equações, que passo a transcrever

$$(B_{(1)} C_{(2)} - C_{(1)} B_{(2)}) D_{(3)} - (B_{(1)} C_{(3)} - C_{(1)} B_{(3)}) D_{(2)} +$$

$$(B_{(2)} C_{(3)} - C_{(2)} B_{(3)}) D_{(1)} = 0$$

$$(B_{(1)} C_{(2)} - C_{(1)} B_{(2)}) D_{(4)} - (B_{(1)} C_{(4)} - C_{(1)} B_{(4)}) D_{(2)} +$$

$$(B_{(2)} C_{(4)} - C_{(2)} B_{(4)}) D_{(1)} = 0$$

$$(B_{(1)} C_{(2)} - C_{(1)} B_{(2)}) D_{(5)} - (B_{(1)} C_{(5)} - C_{(1)} B_{(5)}) D_{(2)} +$$

$$(B_{(2)} C_{(5)} - C_{(2)} B_{(5)}) D_{(1)} = 0$$

-----  
 -----

$$(B_{(1)} C_{(2)} - C_{(1)} B_{(2)}) D_{(n-5)} - (B_{(1)} C_{(n-5)} - C_{(1)} B_{(n-5)}) D_{(2)} +$$

$$(B_{(2)} C_{(n-5)} - C_{(2)} B_{(n-5)}) D_{(1)} = 0$$

$$(B_{(1)} C_{(2)} - C_{(1)} B_{(2)}) D_{(n-4)} - (B_{(1)} C_{(n-4)} - C_{(1)} B_{(n-4)}) D_{(2)} +$$

$$(B_{(2)} C_{(n-4)} - C_{(2)} B_{(n-4)}) D_{(1)} = 0$$

$$(B_{(1)} C_{(2)} - C_{(1)} B_{(2)}) D_{(n-3)} - (B_{(1)} C_{(n-3)} - C_{(1)} B_{(n-3)}) D_{(2)} +$$

$$(B_{(2)} C_{(n-3)} - C_{(2)} B_{(n-3)}) D_{(1)} = 0$$

$$(B_{(1)} C_{(2)} - C_{(1)} B_{(2)}) D' - (B_{(1)} C' - C_{(1)} B') D_{(2)} +$$

$$(B_{(2)} C' - C_{(2)} B') D'_{(1)} = 0 \qquad (B'_{(1)})$$

$$(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}) D' - (B'_{(1)}C' - C'_{(1)}B') D'_{(2)} + (B'_{(2)}C' - C'_{(2)}B') D'_{(1)} = 0$$

$$(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}) D'_{(3)} - (B'_{(1)}C'_{(3)} - C'_{(1)}B'_{(3)}) D'_{(2)} + (B'_{(2)}C'_{(3)} - C'_{(2)}B'_{(3)}) D'_{(1)} = 0$$

$$(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}) D'_{(4)} - (B'_{(1)}C'_{(4)} - C'_{(1)}B'_{(4)}) D'_{(2)} + (B'_{(2)}C'_{(4)} - C'_{(2)}B'_{(4)}) D'_{(1)} = 0$$

$$(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}) D'_{(5)} - (B'_{(1)}C'_{(5)} - C'_{(1)}B'_{(5)}) D'_{(2)} + (B'_{(2)}C'_{(5)} - C'_{(2)}B'_{(5)}) D'_{(1)} = 0$$

-----  
-----

$$(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}) D'_{(n-5)} - (B'_{(1)}C'_{(n-5)} - C'_{(1)}B'_{(n-5)}) D'_{(2)} + (B'_{(2)}C'_{(n-5)} - C'_{(2)}B'_{(n-5)}) D'_{(1)} = 0$$

$$(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}) D'_{(n-4)} - (B'_{(1)}C'_{(n-4)} - C'_{(1)}B'_{(n-4)}) D'_{(2)} + (B'_{(2)}C'_{(n-4)} - C'_{(2)}B'_{(n-4)}) D'_{(1)} = 0$$

$$(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}) D'_{(n-3)} - (B'_{(1)}C'_{(n-3)} - C'_{(1)}B'_{(n-3)}) D'_{(2)} + (B'_{(2)}C'_{(n-3)} - C'_{(2)}B'_{(n-3)}) D'_{(1)} = 0$$

em que se comprehendem todas as condições, a que no presente caso devem satisfazer os coefficients de  $dV$ .

## §. LVI.

O Methodo, porque até aqui temos procedido, deixa ver affás claramente o que se deve praticar em todos os outros cazos, para se obterem as Equações de condição, a que qualquer Função Fluxional  $V$  da ordem  $n$  deve satisfazer, se por ventura poder reduzir-se a Fluxão exacta de outra Função Fluxional de qualquer ordem inferior a  $n$ , sendo multiplicada por hum factor conveniente: e por tanto não devemos encher de mais formulas a presente Memoria, já affás longa, e carregada de expressões analyticas: muito principalmente quando raras vezes acontecerá, que as questões, a que o methodo das Fluxões he applicavel, conduzam a Equações de ordem superior á segunda, nem de mais de tres variaveis. Não será porém inutil que advirtamos. I. Que huma vez que se tenha reconhecido, que a Função proposta  $V$ , supposta da ordem  $n$ , se pode reduzir pela multiplicação de hum factor conveniente a ser Fluxão exacta de outra Função Fluxional da ordem  $n - m$ ; achada esta, sobre ella se devem praticar os mesmos exames, para que finalmente se possa obter a Fluente da ordem 0. E II. Que para esta Fluente ser completa he preciso, que cada huma das Equações de condição, em que não entrarem Fluxões da ordem  $n$ , seja identica por si; e que todas as em que entrarem Fluxões da dita ordem se tornem identicas substituindo-se em lugar de huma d'essas Fluxões o seu valor tirado da Equação  $V = 0$ . Não se verificando esta identidade a Função proposta  $V$  não admitirá Fluente completa; poderá com tudo admitir huma ou mais Fluentes particulares, se as nossas Equações de condição, a pezar de não serem identicas, tiverem lugar ao mesmo tempo, que a Equação  $V = 0$ . Em todos os outros cazos a Função  $V$  não admitirá fluente nem completa nem particular, e por tanto a Equação  $V = 0$  será impossivel, isto he, não admitirá Fluente alguma por este methodo; o que exprimiremos chamando-lhe imaginaria.

## S E C Ç Ã O IV.

*Appliação das Formulas precedentes ás Equações Fluxionaes de diversas ordens.*

## §. LVII.

**S** seja  $V$  huma Função Fluxional da primeira ordem, que involva sómente duas variaveis  $x$ , e  $y$ ; isto he, seja

$$V = Adx + Bdy = 0$$

tal porém que  $V$  não seja Fluxão exacta, e supponhamos que, sendo multiplicada por hum factor conveniente  $P$ , fique sendo

$$PV = dZ.$$

Para que esta supposição se verifique, será preciso que os coefficients de  $dV$  satisficão as Equações de condição do §. XLII., as quaes neste cazo se reduzem sómente a huma

$$N''(P' - dP^{2'}) - P''(N' - dN^{2'}) = 0$$

que pela substituição dos valores de  $N''$ ;  $N^{2'}$ ;  $P''$ ; e  $P^{2'}$ ; se converte em

$$A\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx - B\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right)dy = 0$$

Equação, que sendo devidida por  $\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)$ , se reduz á mesma proposta

$$Adx + Bdy = 0$$

o que nos mostra, que não ha Equação alguma Fluxional da primeira ordem, em que entrem sómente duas variaveis, a qual, sendo multiplicada por hum factor conveniente, se não

naõ possa reduzir a Fluxaõ exacta; por isso que a supposta condiçaõ he rigorosamente a mesma Equaçãõ proposta.

§. LVII.

Sendo  $V = Adx + Bdy + Cdz = 0$ , e conservando todas as supposições do §. antecedente, as Equações de condiçaõ, a que os coefficients de  $dV$  devem satisfazer; saõ

$$N^{2'}(P'' - dP^{2'}) - P^{2'}(N^{1'} - dN^{2'}) = 0$$

$$P^{2'}(Q'' - dQ^{2'}) - Q^{2'}(P'' - dP^{2'}) = 0$$

as quaes pela substituiçaõ dos valores de  $N^{1'}$ ;  $N^{2'}$ ;  $P^{1'}$ ;  $P^{2'}$ ;  $Q^{1'}$ ; e  $Q^{2'}$  se reduzem a

$$A \left( \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} \right) dx + \left( \frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz} \right) dz - B \left( \frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy} \right) dy + \left( \frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz} \right) dz = 0$$

$$B \left( \frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx} \right) dx + \left( \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} \right) dy - C \left( \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} \right) dx + \left( \frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz} \right) dz = 0$$

e huma e outra, substituindo nellas por  $dy$  o seu valor tirado da proposta, se convertem em

$$A \left( \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} \right) - B \left( \frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx} \right) + C \left( \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} \right) = 0.$$

§. LIX.

Sendo  $V = Adx + Bdy + Cdz + Ddu = 0$ , as Equações de condiçaõ, a que os coefficients de  $dV$  devem satisfazer, para que  $V$  possa reduzirse a Fluxaõ exacta sendo multiplicada por hum factor conveniente, saõ

$$N^{2'}(P^{1'} - dP^{2'}) - P^{2'}(N^{1'} - dN^{2'}) = 0$$

$N^{2'}$

$$P^{2'}(\underline{Q}^{1'} - d\underline{Q}^{2'}) - \underline{Q}^{2'}(P^{1'} - dP^{2'}) = 0$$

$$\underline{Q}^{2'}(R^{1'} - dR^{2'}) - R^{2'}(\underline{Q}^{1'} - d\underline{Q}^{2'}) = 0$$

as quaes, substituindo em lugar de  $N^{1'}$ ;  $N^{2'}$ ;  $P^{1'}$ ;  $P^{2'}$ ;  $\underline{Q}^{1'}$ ;  $\underline{Q}^{2'}$ ;  $R^{1'}$ ; e  $R^{2'}$ ; os seus valores tirados da Fluxão de  $V$ , se convertem em

$$A\left(\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}\right)dz + \left(\frac{dD}{dy} - \frac{dB}{du}\right)du\right)$$

$$- B\left(\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right)dy + \left(\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz}\right)dz + \left(\frac{dD}{dx} - \frac{dA}{du}\right)du\right) = 0$$

$$B\left(\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right)dx + \left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right)dy + \left(\frac{dD}{dz} - \frac{dC}{du}\right)du\right)$$

$$- C\left(\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}\right)dz + \left(\frac{dD}{dy} - \frac{dB}{du}\right)du\right) = 0$$

$$C\left(\left(\frac{dA}{du} - \frac{dD}{dx}\right)dx + \left(\frac{dB}{du} - \frac{dD}{dy}\right)dy + \left(\frac{dC}{du} - \frac{dD}{dz}\right)dz\right)$$

$$- D\left(\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right)dx + \left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right)dy + \left(\frac{dD}{dz} - \frac{dC}{du}\right)du\right) = 0$$

e substituindo por  $dy$  na primeira, por  $dz$  na segunda, e por  $du$  na terceira os seus valores tirados da Equação  $V=0$ , ellas se reduzem a

$$\left(A\left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right) - B\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right) + C\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)\right) dz$$

$$+ \left(A\left(\frac{dB}{du} - \frac{dD}{dy}\right) - B\left(\frac{dA}{du} - \frac{dD}{dx}\right) + D\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)\right) du = 0$$

$$\left(A\left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right) - B\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right) + C\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)\right) dx$$

+

$$+ \left( B \left( \frac{dC}{du} - \frac{dD}{dz} \right) - C \left( \frac{dB}{du} - \frac{dD}{dy} \right) + D \left( \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} \right) \right) du = 0$$

$$\left( A \left( \frac{dC}{du} - \frac{dD}{dz} \right) - C \left( \frac{dA}{du} - \frac{dD}{dx} \right) + D \left( \frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx} \right) \right) dx$$

$$+ \left( B \left( \frac{dC}{du} - \frac{dD}{dz} \right) - C \left( \frac{dB}{du} - \frac{dD}{dy} \right) + D \left( \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} \right) \right) dy = 0$$

Equações, que por isso que devem ser identicas, e que nas quantidades, que se achão entre os parenthezes, não entraõ as Fluxões  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , e  $du$ , nos daõ as seguintes quatro Equações de condição

$$A \left( \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} \right) - B \left( \frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx} \right) + C \left( \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dB}{du} - \frac{dD}{dy} \right) - B \left( \frac{dA}{du} - \frac{dD}{dx} \right) + D \left( \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dC}{du} - \frac{dD}{dz} \right) - C \left( \frac{dA}{du} - \frac{dD}{dx} \right) + D \left( \frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx} \right) = 0$$

$$B \left( \frac{dC}{du} - \frac{dD}{dz} \right) - C \left( \frac{dB}{du} - \frac{dD}{dy} \right) + D \left( \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} \right) = 0$$

que rigorosamente se reduzem ás tres primeiras; por quanto a 4.<sup>a</sup> se deduz das antecedentes multiplicando a 3.<sup>a</sup> por  $B$ , a 2.<sup>a</sup> por  $C$ , e a 1.<sup>a</sup> por  $D$ ; tirando o segundo producto do primeiro, e substituinto no resto em lugar dos ultimi

mos dois termos, que faõ  $DB \left( \frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx} \right) - DC \left( \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} \right)$ ,

o seu valor  $DA \left( \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} \right)$  tirado do ultimo producto, e devidindo o resultado por  $A$ .

## §. LX.

Se na Formula  $A dx + B dy + C dz = 0$  do §. LVIII suppofermos  $A = 1$ ; o que equivale a suppor toda a Equação devidida pelo coeſſiciente do primeiro termo, e que  $B$  fica representando o novo coeſſiciente do ſegundo, e  $C$  o novo coeſſiciente do terceiro: entãõ a Equação ſeria

$$dx + B dy + C dz = 0$$

e a Equação de condição, que deverã verificar-fe, para que ella poſſa reduzir-fe a Fluxãõ exacta, ſendo multiplicada por hum factor conveniente, ſerã

$$B \frac{dC}{dx} - C \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} = 0$$

## §. LXI.

Fazendo huma ſemelhante ſuppoſição na Formula do §. LIX, teremos em logar da Equação allí propoſta

$$dx + B dy + C dz + D du = 0$$

e as Equações de condição, a que os ſeus coeſſicientes deverãõ ſatisfazer, para que ella poſſa reduzir-fe a Fluxãõ exacta, ſendo multiplicada por hum factor conveniente, ſerãõ

$$B \frac{dC}{dx} - C \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} = 0$$

$$B \frac{dD}{dx} - D \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{du} - \frac{dD}{dy} = 0$$

$$C \frac{dD}{dx} - D \frac{dC}{dx} + \frac{dC}{du} - \frac{dD}{dz} = 0$$

Equações, que ſãõ as meſmas, que M. Fontaine achou por outro muito differente caminho no ſeu primeiro Methodo do Calculo Integral, e que aſſim deduzidas dos principios de

de M. de Condorcet poderiaõ juntamente com as outras, que por semelhante modo hiremos deduzindo nos §§. seguintes, tirar ao meõmo Fontaine da duvida, em que parecia estar, de serem ou naõ estes principios sufficientes para resolver o Problema, que elle enuncia na sua Memoria impressa na Collecçaõ da Academia das Sciencias de Pariz no volume do anno de 1767, e para cuja soluçaõ convidava Condorcet.

§. LXII.

Sendo  $V = A dx + B dy + C dx^2 + D dy^2 + E dx dy = 0$ , e naõ sendo Fluxaõ exacta de Funçaõ alguma da ordem 0, mas sim huma expressaõ tal que multiplicada por hum factor conveniente  $P$  fique

$$PV = dZ$$

entaõ ferá preciso, que os coefficients de  $dV$  satisfacaõ ás Equações de condiçaõ do §. XLII, as quaes neste cazo se reduzem ás tres seguintes

$$2N^{1'}(2N^{2'} - dN^{2'}) - N^{2'}(N^{2'} - 2dN^{3'}) = 0$$

$$N^{1'}(P^{2'} - 2dP^{3'}) - P^{3'}(N^{2'} - 2dN^{3'}) = 0$$

$$2P^{3'}(2P^{1'} - dP^{2'}) - P^{2'}(P^{2'} - 2dP^{3'}) = 0$$

Equações, que substituindo em logar de  $N^{1'}$ ;  $N^{2'}$ ;  $N^{3'}$ ;  $P^{1'}$ ;  $P^{2'}$ ; e  $P^{3'}$ ; os seus valores tirados da Fluxaõ de  $V$ , se convertem em

$$4A\left(\frac{dA}{dx} - C\right)ddx + 4A\left(\frac{dB}{dx} - \frac{1}{2}E\right)ddy + 4C\left(\frac{dA}{dx} - C\right)dx^2$$

$$+ 4\left(A\left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right) - \frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right)\right)dy^2 - 4\left(A\left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{2}E\left(C - \frac{dA}{dx}\right) + C\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right) dx dy = 0$$

$$2\left(A\left(D - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right)\right)dy - 2\left(B\left(C - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx}\right)\right)dx = 0$$

$$4B\left(\frac{dB}{dy} - D\right)d^2y + 4B\left(\frac{dA}{dy} - \frac{1}{2}E\right)d^2x + 4D\left(\frac{dB}{dy} - D\right)dy^2 + 4\left(B\left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right) - \frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx}\right)\right)dx^2 - 4\left(B\left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right) + \frac{1}{2}E\left(D - \frac{dB}{dy}\right) + D\left(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx}\right)\right)dx dy = 0$$

Devidindo a 1.<sup>a</sup>, e a 3.<sup>a</sup> por 4, e a 2.<sup>a</sup> por 2; substituindo na 1.<sup>a</sup> o valor de  $d^2x$  tirado da proposta, e na 3.<sup>a</sup> o valor de  $d^2y$  tirado da mesma proposta, ellas se converterão em

$$\left(B\left(C - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx}\right)\right)d^2y + \left(A\left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right) - \frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right) + D\left(C - \frac{dA}{dx}\right)\right)dy^2 - \left(A\left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right) - \frac{1}{2}E\left(C - \frac{dA}{dx}\right) + C\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right)\right)dx dy = 0$$

$$\left(A\left(D - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right)\right)dy + \left(B\left(C - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx}\right)\right)dx = 0$$

$$\left(A\left(D - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right)\right)d^2x + \left(B\left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right) - \frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dx}\right) + C\left(D - \frac{dB}{dy}\right)\right)dx^2 - \left(B\left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right) - \frac{1}{2}E\left(D - \frac{dB}{dy}\right) + D\left(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx}\right)\right)dx dy = 0$$

Equa-

Equações que devendo ser identicas dão as seguintes leis, a que os coefficients da proposta devem satisfazer

$$B \left( C - \frac{dA}{dx} \right) - A \left( \frac{1}{2} E - \frac{dB}{dx} \right) = 0$$

$$A \left( D - \frac{dB}{dy} \right) - B \left( \frac{1}{2} E - \frac{dA}{dy} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dD}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dE}{dy} \right) - \frac{1}{2} E \left( \frac{1}{2} E - \frac{dA}{dy} \right) + D \left( C - \frac{dA}{dx} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dC}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dE}{dx} \right) - \frac{1}{2} E \left( C - \frac{dA}{dx} \right) + C \left( \frac{1}{2} E - \frac{dA}{dy} \right) = 0$$

$$B \left( \frac{dC}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dE}{dx} \right) - \frac{1}{2} E \left( \frac{1}{2} E - \frac{dB}{dx} \right) + C \left( D - \frac{dB}{dy} \right) = 0$$

$$B \left( \frac{dD}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dE}{dy} \right) - \frac{1}{2} E \left( D - \frac{dB}{dy} \right) + D \left( \frac{1}{2} E - \frac{dB}{dx} \right) = 0$$

das quaes sómente as duas primeiras exprimem condições realmente distinctas; por quanto a terceira e a quinta se obtem, tomando a somma e a differença da Fluxão parcial da primeira relativamente a  $y$  devidida por  $dy$ , e da Fluxão parcial da segunda relativamente a  $x$  devidida por  $dx$ , fazendo em huma e outra das Equações, que por este modo se achão, em lugar de  $\frac{dA}{dx}$ ;  $\frac{dB}{dx}$ ;  $\frac{dA}{dy}$ ;  $\frac{dB}{dy}$ ; e  $\frac{dA}{dx dy}$  as convenientes substituições dos seus valores tirados das mesmas duas primeiras.

A quarta, e a sexta se obtem substituindo na terceira e quinta em lugar de  $\left( \frac{1}{2} E - \frac{dA}{dy} \right)$ ;  $\left( C - \frac{dA}{dx} \right)$ ;  $\left( \frac{1}{2} E - \frac{dB}{dx} \right)$ ; e  $\left( D - \frac{dB}{dy} \right)$  os seus valores tirados tambem das duas primeiras.

## §. LXIII.

Sendo  $V = A dx + B dy + C dz + D dx^2 + E dy^2 + F dz^2 + G dx dy + H dx dz + I dy dz = 0$ , e conservando todas as supposições do §. antecedente; as Equações de condição, a que os coefficients de  $dV$  devem satisfazer, são

$$2N''(2N'' - dN'') - N''(N'' - 2dN'') = 0$$

$$N''(P'' - 2dP'') - P''(N'' - 2dN'') = 0$$

$$2P''(2P'' - dP'') - P''(P'' - 2dP'') = 0$$

$$P''(Q'' - 2dQ'') - Q''(P'' - 2dP'') = 0$$

$$2Q''(2Q'' - dQ'') - Q''(Q'' - 2dQ'') = 0$$

as quaes substituindo em lugar de  $N''$ ;  $N''$ ;  $N''$ ;  $P''$ ;  $P''$ ;  $P''$ ;  $Q''$ ;  $Q''$ ; e  $Q''$  os seus valores tirados da Fluxão de  $V$  se convertem em

$$\begin{aligned} & 4A\left(\frac{dA}{dx} - D\right)ddx + 4A\left(\frac{dB}{dx} - \frac{1}{2}G\right)ddy + 4A\left(\frac{dC}{dx} - \frac{1}{2}H\right)ddz \\ & - 4D\left(D - \frac{dA}{dx}\right)dx^2 + 4\left(A\left(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dy}\right) - \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right)\right)dy^2 \\ & + 4\left(A\left(\frac{dF}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right) - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right)\right)dz^2 - 4\left(A\left(\frac{dD}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dx}\right)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}G\left(D - \frac{dA}{dy}\right) + D\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right)\right)dx dy - 4\left(A\left(\frac{dD}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dx}\right)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}H\left(D - \frac{dA}{dx}\right) + D\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right)\right)dx dz + 4\left(A\left(\frac{dI}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dy}\right)\right. \\ & \left. - \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right) - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right)\right)dy dz = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \left( A \left( E - \frac{dB}{dy} \right) - B \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) \right) dy - 2 \left( B \left( D - \frac{dA}{dx} \right) \right. \\
 & - \left. A \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) \right) dx + 2 \left( A \left( \frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz} \right) - B \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) \right) dz = 0 \\
 & 4B \left( \frac{dB}{dy} - E \right) ddy + 4B \left( \frac{dA}{dy} - \frac{1}{2} G \right) ddx + 4B \left( \frac{dC}{dy} - \frac{1}{2} I \right) ddz \\
 & - 4E \left( E - \frac{dB}{dy} \right) dy^2 + 4 \left( B \left( \frac{dD}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dx} \right) - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) \right) dx^2 \\
 & + 4 \left( B \left( \frac{dF}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dz} \right) - \frac{1}{2} I \left( \frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz} \right) \right) dz^2 - 4 \left( B \left( \frac{dE}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dy} \right) \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} G \left( E - \frac{dB}{dy} \right) + E \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) \right) dxdy - 4 \left( B \left( \frac{dE}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dy} \right) \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} I \left( E - \frac{dB}{dy} \right) + E \left( \frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz} \right) \right) dydz + 4 \left( B \left( \frac{dH}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dx} \right) \right. \\
 & - \left. \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz} \right) - \frac{1}{2} I \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) \right) dx dz = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \left( B \left( F - \frac{dC}{dz} \right) - C \left( \frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz} \right) \right) dz - 2 \left( C \left( E - \frac{dB}{dy} \right) \right. \\
 & - \left. B \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) \right) dy + 2 \left( B \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) - C \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) \right) dx = 0 \\
 & 4C \left( \frac{dC}{dz} - F \right) ddz + 4C \left( \frac{dA}{dz} - \frac{1}{2} H \right) ddx + 4C \left( \frac{dB}{dz} - \frac{1}{2} I \right) ddy \\
 & - 4F \left( F - \frac{dC}{dz} \right) dz^2 + 4 \left( C \left( \frac{dD}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dx} \right) - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) \right) dx^2 \\
 & + 4 \left( C \left( \frac{dE}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dy} \right) - \frac{1}{2} I \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) \right) dy^2 - 4 \left( C \left( \frac{dF}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dz} \right) \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} H \left( F - \frac{dC}{dz} \right) + F \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) \right) dxdz - 4 \left( C \left( \frac{dF}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dz} \right) \right.
 \end{aligned}$$

+

$$+ \frac{1}{2} I \left( F - \frac{dC}{dz} \right) + F \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) dy dz + 4 \left( C \left( \frac{dG}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dx} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) - \frac{1}{2} I \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) \right) dx dy = 0$$

Devidindo a 1.<sup>a</sup>, a 3.<sup>a</sup>, e a 5.<sup>a</sup> d'estas Equações pelo numero 4; e a 2.<sup>a</sup>, e 4.<sup>a</sup> pelo numero 2; e substituindo por  $ddx$  na 1.<sup>a</sup>, por  $ddy$  na 3.<sup>a</sup>, e por  $ddz$  na 5.<sup>a</sup> os seus valores, tirados da proposta  $V=0$ , ellas se convertem em

$$\left( B \left( D - \frac{dA}{dx} \right) - A \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) \right) ddy + \left( C \left( D - \frac{dA}{dx} \right) \right. \\ \left. - A \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) \right) ddz + \left( A \left( \frac{dE}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dy} \right) - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) \right) \\ + E \left( D - \frac{dA}{dx} \right) dy^2 + \left( A \left( \frac{dF}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dz} \right) - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) \right) \\ + F \left( D - \frac{dA}{dx} \right) dz^2 - \left( A \left( \frac{dD}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dx} \right) - \frac{1}{2} G \left( D - \frac{dA}{dx} \right) \right) \\ + D \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) dx dy - \left( A \left( \frac{dD}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dx} \right) - \frac{1}{2} H \left( D - \frac{dA}{dx} \right) \right) \\ + D \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) dx dz + \left( A \left( \frac{dI}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) + I \left( D - \frac{dA}{dx} \right) \right) dy dz = 0 \\ \left( A \left( E - \frac{dB}{dy} \right) - B \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) \right) dy - \left( B \left( D - \frac{dA}{dx} \right) \right. \\ \left. - A \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) \right) dx + \left( A \left( \frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz} \right) - B \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) \right) dz = 0 \\ \left( A \left( E - \frac{dB}{dy} \right) - B \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) \right) ddx + \left( C \left( E - \frac{dB}{dy} \right) \right. \\ \left. - B \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) \right) ddz + \left( B \left( \frac{dD}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dx} \right) - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) \right) \\ +$$

$$\begin{aligned}
 &+ D\left(E - \frac{dB}{dy}\right) dx^2 + \left(B\left(\frac{dF}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dz}\right) - \frac{1}{2} I\left(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz}\right)\right) \\
 &+ F\left(E - \frac{dB}{dy}\right) dz^2 - \left(B\left(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dy}\right) - \frac{1}{2} G\left(E - \frac{dB}{dy}\right)\right) \\
 &+ E\left(\frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx}\right) dx dy - \left(B\left(\frac{dE}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dy}\right) - \frac{1}{2} I\left(E - \frac{dB}{dy}\right)\right) \\
 &+ E\left(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz}\right) dy dz + \left(B\left(\frac{dH}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dx}\right)\right. \\
 &\left. - \frac{1}{2} G\left(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz}\right) - \frac{1}{2} I\left(\frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx}\right) + H\left(E - \frac{dB}{dy}\right)\right) dx dz = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left(B\left(F - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz}\right)\right) dz - \left(C\left(E - \frac{dB}{dy}\right)\right. \\
 &\left. - B\left(\frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy}\right)\right) dy + \left(B\left(\frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx}\right) - C\left(\frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx}\right)\right) dx = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left(A\left(F - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz}\right)\right) ddx + \left(B\left(F - \frac{dC}{dz}\right)\right. \\
 &\left. - C\left(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz}\right)\right) ddy + \left(C\left(\frac{dD}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dx}\right) - \frac{1}{2} H\left(\frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx}\right)\right) \\
 &+ D\left(F - \frac{dC}{dz}\right) dx^2 + \left(C\left(\frac{dE}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dy}\right) - \frac{1}{2} I\left(\frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy}\right)\right) \\
 &+ E\left(F - \frac{dC}{dz}\right) dy^2 - \left(C\left(\frac{dF}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dz}\right) - \frac{1}{2} H\left(F - \frac{dC}{dz}\right)\right) \\
 &+ F\left(\frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx}\right) dx dz - \left(C\left(\frac{dF}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dz}\right) - \frac{1}{2} I\left(F - \frac{dC}{dz}\right)\right) \\
 &+ F\left(\frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy}\right) dy dz + \left(C\left(\frac{dG}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dx}\right)\right. \\
 &\left. - \frac{1}{2} H\left(\frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy}\right) - \frac{1}{2} I\left(\frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx}\right) + G\left(F - \frac{dC}{dz}\right)\right) dx dy = 0
 \end{aligned}$$

Equações, que devendo ser identicas nos daõ as seguintes  
 Tom. II. Aaaa con-

condições expressadas nas 23. Equações, que passamos a transcrever.

$$B \left( D - \frac{dA}{dx} \right) - A \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) = 0$$

$$C \left( D - \frac{dA}{dx} \right) - A \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) = 0$$

$$A \left( E - \frac{dB}{dy} \right) - B \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) = 0$$

$$C \left( E - \frac{dB}{dy} \right) - B \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) = 0$$

$$A \left( F - \frac{dC}{dz} \right) - C \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) = 0$$

$$B \left( F - \frac{dC}{dz} \right) - C \left( \frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz} \right) - B \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) = 0$$

$$B \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) - C \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dE}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dy} \right) - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) + E \left( D - \frac{dA}{dx} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dF}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dz} \right) - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) + F \left( D - \frac{dA}{dx} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dD}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dx} \right) - \frac{1}{2} G \left( D - \frac{dA}{dx} \right) + D \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dD}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dx} \right) - \frac{1}{2} H \left( D - \frac{dA}{dx} \right) + D \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) = 0$$

$$B \left( \frac{dD}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dx} \right) - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) + D \left( E - \frac{dB}{dy} \right) = 0$$

$$B \left( \frac{dF}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dz} \right) - \frac{1}{2} I \left( \frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz} \right) + F \left( E - \frac{dB}{dy} \right) = 0$$

$$B \left( \frac{dE}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dy} \right) - \frac{1}{2} G \left( E - \frac{dB}{dy} \right) + E \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) = 0$$

$$E \left( \frac{dE}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dy} \right) - \frac{1}{2} I \left( E - \frac{dB}{dy} \right) + E \left( \frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz} \right) = 0$$

$$C \left( \frac{dD}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dx} \right) - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) + D \left( F - \frac{dC}{dz} \right) = 0$$

$$C \left( \frac{dE}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dy} \right) - \frac{1}{2} I \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) + E \left( F - \frac{dC}{dz} \right) = 0$$

$$C \left( \frac{dF}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dz} \right) - \frac{1}{2} H \left( F - \frac{dC}{dz} \right) + F \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) = 0$$

$$C \left( \frac{dF}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dz} \right) - \frac{1}{2} I \left( F - \frac{dC}{dz} \right) + F \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dI}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} \right) - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) + I \left( D - \frac{dA}{dx} \right) = 0$$

$$B \left( \frac{dH}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dx} \right) - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz} \right) - \frac{1}{2} I \left( \frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx} \right) + H \left( E - \frac{dB}{dy} \right) = 0$$

$$C \left( \frac{dG}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dx} \right) - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) - \frac{1}{2} I \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) + G \left( F - \frac{dC}{dz} \right) = 0$$

das quaes fômente as seis primeiras exprimem condições realmente distinctas, por serem todas as outras consequencias derivadas d'ellas, como he facil de ver, principalmente attendendo ao que em circumstancias semelhantes differmos no fim do §. antecedente.

§. LXIV.

Reflectindo em todo o processo dos calculos executados em os dois §§. precedentes, e attendendo á dependencia reciproca das Equações de condiçãõ alli achadas, facilmen-

mente veremos: 1.º Que o nosso Methodo conduz a Equações de condição superabundantes, o que sería facil de prever depois das reflexões que fizemos, e das conclusões que tirámos em os §.§. XXIII, e XXIV. 2.º Que por huma immediata consequencia das ditas conclusões para se reconhecer se huma Equação Fluxional qualquer da segunda ordem de duas, ou mais variaveis, em que se não suppõs Fluxão alguma constante, se póde reduzir a ser Fluxão segunda exacta de huma Função da ordem 0, bastará examinar se ella satisfaz ás Equações de condição, que na ordem, por que se achão escritas nos §.§. LXII, e LXIII, occupão os lugares pares; isto he, bastará verificar as Equações

$$N^{3'}(P^{2'} - 2dP^{3'}) - P^{3'}(N^{2'} - 2dN^{3'}) = 0$$

$$P^{3'}(Q^{2'} - 2dQ^{3'}) - Q^{3'}(P^{2'} - 2dP^{3'}) = 0$$

&c.

3.º Que para o mesmo effeito bastaria tambem verificar sómente as Equações de condição, que nos mencionados §.§. occupaõ os lugares impares. E 4.º finalmente que suposto por este modo se haja de attender a huma Equação mais, do que verificando as dos lugares pares, nem por isso o trabalho de cálculo será maior; por quanto basta que nestas Equações se calculem os termos, que deverem ser multiplicados pelas segundas Fluxões das variaveis, que entram na Função proposta. Por meio d'estas advertencias se achará com summa facilidade, que sendo

$$V = Addx + Bddy + Cddz + Dddu + Edx^2 + Fdy^2 + Gdz^2 + Hdu^2 \\ + Idxdy + Kdx dz + Lxd u + Mdy dz + Ndy du + Odz du = 0$$

huma Equação Fluxional da segunda ordem, e de quatro variaveis, para que se possa reduzir a Fluxão segunda exacta de huma Função da ordem 0, sendo multiplicada por hum factor conveniente para esse effeito, os coefficientes de

de  $dV$  deverão satisfazer ás seguintes 12 Equações de condição

$$B\left(E - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2}I - \frac{dB}{dx}\right) = 0$$

$$C\left(E - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2}K - \frac{dC}{dx}\right) = 0$$

$$D\left(E - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2}L - \frac{dD}{dx}\right) = 0$$

$$A\left(F - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2}I - \frac{dA}{dy}\right) = 0$$

$$C\left(F - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2}M - \frac{dC}{dy}\right) = 0$$

$$D\left(F - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2}N - \frac{dD}{dy}\right) = 0$$

$$A\left(G - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2}K - \frac{dA}{dz}\right) = 0$$

$$B\left(G - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2}M - \frac{dB}{dz}\right) = 0$$

$$D\left(G - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2}O - \frac{dD}{dz}\right) = 0$$

$$A\left(H - \frac{dD}{du}\right) - D\left(\frac{1}{2}L - \frac{dA}{du}\right) = 0$$

$$B\left(H - \frac{dD}{du}\right) - D\left(\frac{1}{2}N - \frac{dB}{du}\right) = 0$$

$$B\left(H - \frac{dD}{du}\right) - D\left(\frac{1}{2}O - \frac{dC}{du}\right) = 0$$

que por outro qualquer dos methodos conhecidos se não poderiaõ obter sem muito enfadonho trabalho. Seguindo hum procedimento analogo se poderaõ determinar, quando feja preciso, as condições relativas ás Equações Fluxionaes

da segunda ordem de hum maior numero de variaveis, podendo desde já concluir-se, que sendo  $p$  o número das variaveis, será  $p - 1$  o numero das Equações dadas pelo nosso methodo, e  $p(p - 1)$  o numero total das Equações analogas ás precedentes, que das nossas se derivaõ.

## §. LXV.

Se na Equação Fluxional do §. LXII suppozermos  $A = 1$ , ella se reduzirá a

$$ddx + Bddy + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy = 0$$

e as Equações a que ella, considerada debaixo d'esta fórma, deverá satisfazer, para que possa reduzir-se a Fluxão exacta de huma Função da ordem 0, serão

$$BC - \frac{1}{2} E + \frac{dB}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2} BE - D + \frac{dB}{dy} = 0$$

## §. LXVI.

Semelhantemente se na Equação do §. LXIII fizermos a mesma supposição de  $A = 1$ , as seis Equações de condição, a que a proposta

$$ddx + Bddy + Cddz + Ddx^2 + Eddy^2 + Fdz^2 + Gdxdy + Hdxdz + Idydz = 0$$

deverá satisfazer, para que multiplicada por hum factor conveniente se possa reduzir a ser Fluxão exacta de huma Função da ordem 0, são

$$BD - \frac{1}{2} G + \frac{dB}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2} BG - E + \frac{dB}{dy} = 0$$

$$\frac{1}{2} BH - \frac{1}{2} I + \frac{dB}{dz} = 0$$

$$CD - \frac{1}{2} H + \frac{dC}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2} CG - \frac{1}{2} I + \frac{dC}{dy} = 0$$

$$\frac{1}{2} CH - F + \frac{dC}{dy} = 0$$

## §. LXVII.

Se na Formula do §. LXII se suppoem  $dy$  constante; entaõ, sendo  $ddy = 0$ , ella se reduz a

$$V = Adx + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy = 0$$

e para que possa converter-se em Fluxaõ exacta de huma Funçaõ da ordem 0, sendo multiplicada por hum factor conveniente para esse effeito, os coefficients de  $dV$  deveraõ satisfazer á primeira das tres Equações de condiçaõ alli expressadas, isto he, deveraõ satisfazer á Equaçãõ

$${}_2N^{1'}({}_2N^{1'} - dN^{2'}) - N^{2'}(N^{2'} - dN^{3'}) = 0$$

por quanto, naõ se conhecendo o valor de  $P^{3'}$ , nenhuma das outras póde ter lugar. Desta se derivaõ pela substituiçaõ

dos valores de  $N^{1'}$ ;  $N^{2'}$ ; e  $N^{3'}$ , e do valor de  $ddx$  tirado da proposta as duas seguintes, a que a mesma proposta deve satisfazer.

$$A\left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dE}{dy}\right) - \frac{1}{2} E\left(\frac{1}{2} E - \frac{dA}{dy}\right) + D\left(C - \frac{dA}{dx}\right) = 0$$

$$A\left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dE}{dx}\right) - \frac{1}{2} E\left(C - \frac{dA}{dx}\right) + C\left(\frac{1}{2} E - \frac{dA}{dy}\right) = 0$$

Equações que tambem se poderiaõ achar sem dependencia de novos calculos, excluindo das seis do §. LXII todas as em que entra a quantidade  $B$ , cujo valor neste caso se ignora.

### §. LXVIII.

Semelhantemente se na Formula do §. LXIII supposermos  $dy$  constante, a Equação Fluxional alli proposta se reduzirá a

$$V = A dx + C dz + D dx^2 + E dy^2 + F dz^2 + G dx dy + H dx dz + I dy dz = 0$$

e para que possa reduzir-se a Fluxão segunda exacta de huma Função da ordem 0, deverá satisfazer á primeira, e á ultima das cinco Equações alli expressadas; por isso que em todas as outras entra  $P''$ , quantidade que neste caso se não conhece. Substituindo pois em as duas Equações

$$2N' (2N'' - dN^{2'}) - N^{2'} (N^{2'} - 2dN^{3'}) = 0$$

$$2Q' (2Q'' - dQ^{2'}) - Q^{2'} (Q^{2'} - 2dQ^{3'}) = 0$$

os valores de  $N''; N^{2'}; N^{3'}; P''; P^{2'}; P^{3'}$ , e os valores de  $ddx$ , e  $ddz$  tirados da proposta, se derivaõ as seguintes 12 Equações de condição

$$C\left(D - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx}\right) = 0$$

$$A\left(F - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz}\right) = 0$$

$$A \left( \frac{dE}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dy} \right) - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) + E \left( D - \frac{dA}{dx} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dF}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dz} \right) - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) + F \left( D - \frac{dA}{dx} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dD}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dx} \right) - \frac{1}{2} G \left( D - \frac{dA}{dx} \right) + D \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dD}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dx} \right) - \frac{1}{2} H \left( D - \frac{dA}{dx} \right) + D \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) = 0$$

$$C \left( \frac{dD}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dx} \right) - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) + D \left( F - \frac{dC}{dz} \right) = 0$$

$$C \left( \frac{dE}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dy} \right) - \frac{1}{2} I \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) + E \left( F - \frac{dC}{dz} \right) = 0$$

$$C \left( \frac{dF}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dz} \right) - \frac{1}{2} H \left( F - \frac{dC}{dz} \right) + F \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) = 0$$

$$C \left( \frac{dF}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dz} \right) - \frac{1}{2} I \left( F - \frac{dC}{dz} \right) + F \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) = 0$$

$$A \left( \frac{dI}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} \right) - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz} \right) - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} G - \frac{dA}{dy} \right) + I \left( D - \frac{dA}{dx} \right) = 0$$

$$C \left( \frac{dG}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dx} \right) - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) - \frac{1}{2} I \left( \frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx} \right) + G \left( F - \frac{dC}{dz} \right) = 0$$

a que a mesma proposta deve satisfazer, e das quaes sómente a 1.<sup>a</sup>; a 2.<sup>a</sup>; a 3.<sup>a</sup>; a 5.<sup>a</sup>; a 8.<sup>a</sup>; e a 10.<sup>a</sup> exprimem condições realmente differentes, sendo assim o número d'estas o mesmo que no caso, em que se não suppunha Fluxão alguma constante.

§. LXIX.

Se na Formula do §. LXVII supposermos  $A = 1$ ; o que equivale a supphôr toda a Equação devida pelo coffi-

ciente de  $ddx$ , entã as duas Equações de condiçãõ alli expressadas se reduzem a

$$\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dE}{dx} = 0$$

$$DC - \frac{1}{4} E^2 + \frac{dD}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dE}{dy} = 0$$

E se na Formula do §. LXVIII fizermos a mesma supposiçãõ as seis Equações alli transcritas, que exprimem condições realmente differentes, se reduzem a

$$CD - \frac{1}{2} H + \frac{dC}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2} CH - F + \frac{dC}{dz} = 0$$

$$\frac{dD}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dx} = 0$$

$$DE - \frac{1}{4} G^2 + \frac{dE}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dG}{dy} = 0$$

$$C \left( \frac{dE}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dy} \right) - \frac{1}{2} I \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) + E \left( F - \frac{dC}{dz} \right) = 0$$

$$C \left( \frac{dF}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dI}{dz} \right) - \frac{1}{2} I \left( F - \frac{dC}{dz} \right) + F \left( \frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy} \right) = 0$$

e com effeito a Equaçãõ

$$ddx + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gdx dy + Hdx dz + Idy dz = 0$$

considerando  $y$  como constante, está no caso do §. LXV; e por tanto como Funçãõ de  $x$ , e  $z$  deve satisfazer ás primeiras duas Equações das seis aqui expressadas, considerando  $z$  como constante, está no caso primeiramente considerado neste mesmo §.; e por tanto como Funçãõ de  $x$ , e  $y$  deve satisfazer á terceira, e quarta d'estas mesmas Equações:

ções: e finalmente considerando  $x$  como constante, está no caso do §. LXVII; e por consequencia como Função de  $y$ , e  $z$  deve satisfazer ás duas ultimas.

## §. LXX.

A supposição de huma variavel uniformemente fluente nas Funções Fluxionaes da segunda ordem, quando pretendemos indagar, se ellas são Fluxões exactas de outras Funções da ordem 0, nos despenha, como acabamos de ver, de verificar aquella das nossas Equações de condição de lugar impar, que he relativa á variavel, cuja primeira Fluxão se suppõe constante; mas como no §. LXIV advertimos, que não suppondo Fluxão alguma constante, a verificação das nossas Equações absolutamente necessarias se reduz a calcular sómente as Equações, que pela ordem, por que nós as escrevemos, occupaõ os lugares pares, ou a calcular meramente nas que occupaõ os lugares impares os termos, em que devêraõ entrar Fluxões segundas, fica ao arbitrio do calculador, que tiver de proceder a huma semelhante indagação sobre huma Função Fluxional da segunda ordem, em que se tenha supposto huma primeira Fluxão constante, o tratalla neste estado, ou reduzilla primeiro a outra, em que não haja Fluxão alguma constante. A sua sagacidade, e o uso de calcular lhe dictaráõ nos casos occorrentes o que mais lhe convem para a brevidade dos seus calculos: a nós sómente nos toca expôr em toda a sua generalidade os meios, de que elle póde servir-se em todos os casos imaginaveis.

## §. LXXI.

Se a Equação Fluxional

$$V = Aaddx + Bddy + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy = 0$$

que supponmos não ser Fluxão exacta de Função alguma de

or-

ordem inferior, poder com tudo reduzir-se a Fluxão exacta de huma Função da primeira ordem, sendo multiplicada por hum Factor conveniente, então os coefficientes de  $dV$  deverão satisfazer á Equação

$$(B''C^{2'} - C''B^{2'})D^{1'} - (B''C^{3'} - C''B^{3'})D^{2'} + (B^{2'}C^{3'} - C^{2'}B^{3'})D^{3'} = 0$$

que no §. XLV achamos expressar as condições necessarias para este effeito. Porém a sua transformação em Função dos coefficientes de  $dV$ , e das Fluxões parciaes d'elles, sobre não ser absolutamente necessaria para o fim indicado, nos conduziria a calculos tão extensos, e complicados, que julgamos por melhor omittillos, e substituir-lhes algumas considerações geraes, que mostrando-nos a inutilidade de serem praticados por extenso nos fação ao mesmo tempo conhecer, que parte d'este trabalho bastará executar para chegar ao fim proposto.

Recorrendo ao §. XLV, aonde expozemos a analyse da nossa solução do Problema de achar o criterio proprio para reconhecer se huma Função Fluxional qualquer da segunda ordem, que involva duas variaveis, e que não seja Fluxão exacta de nenhuma outra da primeira ordem, se póde reduzir a que o seja, sendo multiplicada por hum factor  $P$  conveniente para esse effeito, facilmente veremos

1.º Que na Equação

$$(B''D^{2'} - D''B^{2'})P - (C''D^{2'} - D''C^{2'})dP = 0$$

depois de feita a substituição do valor de  $ddx$  tirado da proposta não podem existir senão termos multiplicados por  $ddy$ , termos multiplicados por  $dx^2$ , termos multiplicados por  $dy^2$ , e termos multiplicados por  $dx dy$ .

2.º Que sendo  $P$  Função de  $x$ , e  $y$ , e não entrando em  $C^{1'}$ ,  $C^{2'}$ , e  $dP$  senão as Fluxões primeiras de  $x$ , e  $y$ , os termos multiplicados por  $ddy$  se não comprehendem na

parte  $(C''D^{2'} - D''C^{2'})dP$  da mesma Equação; o que he o

mes-

mesmo que dizer, que elles se comprehendem sómente na parte  $(B''D'' - D''B'')P$ .

3.º Que pela natureza do Methodo directo das Fluxões sendo

$$B''' = d(B''D'' - D''B'')$$

o coeſſiciente de  $d^3y$  em  $B'''$  será o mesmo que o de  $ddy$  em  $B''D'' - D''B''$ .

4.º Que em nenhum dos termos da Equação

$$B'''P - C'''dP + D'''ddP = 0$$

além do primeiro se póde achar  $d^3y$ .

5.º Que por consequencia fó na parte  $(D''C'' - C''D'')B'''$  da Equação final

$$(B''C'' - C''B'')D''' - (B''C''' - C''B''')D'' + (B''C'' - C''B'')D'' = 0$$

se podem achar termos, em que entre  $d^3y$ .

6.º Que o coeſſiciente de  $d^3y$  na mesma Equação final será o mesmo que o de  $ddy$  em  $(B''D'' - D''B'')$ , só com a differença de se achar multiplicado por  $D'''$ .

7.º Que devendo ser identica a Equação final, e não sendo  $D''' = 0$ , o coeſſiciente de  $ddy$  em  $B''D'' - D''B''$  igualado a cifra deve dar huma das condições, a que a proposta  $V = 0$  deve satisfazer.

Ora lembrando-nos que he

$$B''' = N'' - dN'' + ddN''$$

$$B'' = P'' - dP'' + ddP''$$

$$D''' = N'''$$

$$D'' = P'''$$

e attendendo aos valores de  $N''$ ;  $N^{2''}$ ;  $N^{3''}$ ;  $P''$ ;  $P^{2''}$ ; e  $P^{3''}$ , he evidente 1.º Que a Equação, que resulta de igualar a cifra o coeſſiciente de  $ddy$  na expressão  $B''D^{2''} - D''B^{2''}$ , exprimirá a relação, que entre ſi devem ter todos os coeſſicientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , e  $E$  da propoſta, para que ſendo multiplicada por hum factor conveniente, poſſa reduzir-ſe a ſer Fluxão exacta de huma Função da primeira ordem. E 2.º Que não podendo os coeſſicientes dos termos da Equação final do §. XLV expreſſar outras relações entre os coeſſicientes dos termos da propoſta, e ſuas Fluxões parciaes, ſenaõ a já mencionada, ou relações derivadas d'eſta, ella expreſſará a condição unica, a que a meſma propoſta deve ſatisfazer.

Calculando pois na conformidade d'eſtas reflexões o coeſſiciente de  $ddy$  em  $B''D^{2''} - D''B^{2''}$  acharemos, que a condição unica, a que a propoſta deve ſatisfazer, he a que expreſſa a ſeguinte Equação:

$$B^2 \left( C - \frac{dA}{dx} \right) + AB \left( \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} - E \right) + A^2 \left( D - \frac{dB}{dy} \right) = 0$$

### §. LXXII.

Querendo indagar as condições, a que a Equação

$$V = Addx + Bddy + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gxdy + Hxdz + Idydz = 0$$

deve ſatisfazer, para que ſendo multiplicada por hum factor conveniente  $P$ , ſe poſſa reduzir a Fluxão exacta de huma Função da primeira ordem, entãõ, ſegundo demonſtramos em o §. XLIII, os coeſſicientes de  $dV$  deverãõ ſatisfazer ás ſeguintes tres Equações

$$(N'' - dN^{2''} + ddN^{3''})P - (N^{2''} - 2dN^{3''})dP + N^{3''}d^2P = 0$$

$$(P''$$

$$(P'' - dP^{2'} + ddP^{3'})P - (P^{2'} - 2dP^{3'})dP + P^{3'}ddP = 0$$

$$(Q'' - dQ^{2'} + ddQ^{3'})P - (Q^{2'} - 2dQ^{3'})dP + Q^{3'}ddP = 0$$

que por mais brevidade escreveremos assim :

$$B''P - C''dP + D''ddP = 0$$

$$B^{2'}P - C^{2'}dP + D^{2'}ddP = 0$$

$$B^{3'}P - C^{3'}dP + D^{3'}ddP = 0$$

eliminando primeiro  $ddP$ , e ultimamente  $\frac{dP}{P}$ , d'ellas derivaremos a Equação unica de condiçãõ

$$(B''C^{2'} - C''B^{2'})D^{3'} - (B''C^{3'} - C''B^{3'})D^{2'} + (B^{2'}C^{3'} - C^{2'}B^{3'})D'' = 0$$

da qual, calculando sómente os termos affectos de  $ddx$ ,  $ddy$ , e  $ddz$ , se deduzem as seguintes tres Equações de condiçãõ

$$B^2 \left( D - \frac{dA}{dx} \right) + AB \left( \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} - G \right) + A^2 \left( E - \frac{dB}{dy} \right) = 0$$

$$C^{2'} \left( E - \frac{dB}{dy} \right) + BC \left( \frac{dB}{dz} + \frac{dC}{dy} - I \right) + B^2 \left( F - \frac{dC}{dz} \right) = 0$$

$$A^2 \left( F - \frac{dC}{dz} \right) + CA \left( \frac{dC}{dx} + \frac{dA}{dz} - H \right) + C^2 \left( D - \frac{dA}{dx} \right) = 0$$

de que se derivaõ necessariamente todas as outras, que obteriamos, fazendo por extenso o cálculo necessario para transformar a Equação achada em Função dos coefficients da proposta.

§. LXXIII.

Se na indagação d'estas condições quizeſsemos proceder por hum modo analogo, ao que praticamos no §. LXX, então comparando duas a duas as tres Equações

$B''$

$$B''P - C''dP + D''ddP = 0$$

$$B'''P - C'''dP + D'''ddP = 0$$

$$B''''P - C''''dP + D''''ddP = 0$$

deduziríamos d'ellas as seguintes tres

$$(B''D'' - D''B'')P - (C''D'' - D''C'')dP = 0$$

$$(B'''D''' - D'''B''')P - (C'''D''' - D'''C''')dP = 0$$

$$(B''''D'''' - D''''B''')P - (C''''D'''' - D''''C''')dP = 0$$

substituindo na primeira em lugar de  $ddx$  o seu valor tirado da proposta  $V=0$ , e calculando em  $B''D'' - D''B''$  o coefficiente de  $ddy$ , e igualando-o a cifra teriamos a Equação

$$B^2 \left( D - \frac{dA}{dx} \right) + AB \left( \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} - G \right) + A^2 \left( E - \frac{dB}{dy} \right) = 0$$

Semelhantemente substituindo na segunda em lugar de  $ddx$  o seu valor tirado da proposta, calculando em  $B'''D''' - D'''B'''$  o coefficiente de  $ddx$ , e igualando-o a cifra teriamos a Equação

$$A^2 \left( F - \frac{dC}{dz} \right) + CA \left( \frac{dC}{dx} + \frac{dA}{dz} - H \right) + C^2 \left( D - \frac{dA}{dx} \right) = 0$$

E finalmente substituindo na terceira em lugar de  $ddy$  o seu valor tirado da proposta, calculando em  $B''''D'''' - D''''B''''$  o coefficiente de  $ddz$ , e igualando-o a cifra teriamos a Equação

$$C^2 \left( E - \frac{dB}{dy} \right) + BC \left( \frac{dB}{dz} + \frac{dC}{dy} - I \right) + B^2 \left( F - \frac{dC}{dz} \right) = 0$$

e d'este modo obteriamos com menos trabalho do que no §. ante-

§. antecedente as condições, a que a proposta deve satisfazer.

Se tivéssimos seguido os passos, que apontamos no §. XLVI, então bastaria, que substituindo em  $B''D'' - D''B''$  o valor de  $ddx$  tirado da proposta, calculássemos os termos, que seriaõ coefficients de  $ddy$ , e  $ddz$ ; e que substituindo em  $B''D'' - D''B''$  o valor de  $ddy$  tirado da mesma proposta calculássemos os termos, que seriaõ coefficiente de  $ddx$ , e  $ddz$ , e que igualássemos cada hum dos ditos coefficients a cifra. Assim acharíamos duas das Equações, que achamos pelos processos antecedentes, e em lugar da terceira acharíamos outras duas equivalentes a ella: he verdade que o numero das Equações finaes seria maior; mas nem o numero, nem a fórma das ditas Equações deve ser considerado como motivo de preferencia para a escolha dos diversos caminhos, que o nosso methodo offerece para se reconhecer effectivamente se huma Função Fluxional proposta se póde ou não reduzir a Fluxão exacta de outra Função de ordem inferior a ella. O menor ou maior trabalho de calculo he a unica consideração, que deve preceder a esta escolha, e não he senão com o fim de facilitar o acerto na mesma escolha a quem precisar fazer indagações semelhantes em os casos, que nesta Memoria se não mencionaõ, que aquí expomos os diversos modos, que mais naturalmente se offerecem para o mencionado fim.

#### §. LXXIV.

Se na Formula do §. LXXI supposermos  $A=1$ , a Equação de condição allí expressada se reduzirá a

$$B \left( BC - E + \frac{dB}{dx} \right) + D - \frac{dB}{dy} = 0.$$

E se fizermos a mesma supposição na Formula do §. LXXII as Equações, que no dito §. achámos, se reduzirão a

Tom. II.

Ecce

B

$$B \left( BD - G + \frac{dB}{dx} \right) + E - \frac{dB}{dy} = 0$$

$$C \left( CD - H + \frac{dC}{dx} \right) + F - \frac{dC}{dz} = 0$$

$$C^2 \left( E - \frac{dB}{dy} \right) + BC \left( \frac{dB}{dz} + \frac{dC}{dy} - I \right) + B^2 \left( F - \frac{dC}{dz} \right) = 0$$

## §. LXXV.

Continuando a proceder por hum modo analogo se poderiaõ achar as Equações de condiçaõ relativas a todos os outros casos, aquí naõ comprehendidos; mas além de que hum tal processo sería sem fim, e que as Equações de condiçaõ, a que seriamos conduzidos, se achariaõ cada vez mais complicadas, e menos proprias para se conferirem de memoria, sería trabalho verdadeiramente inutil passar mais adiante nesta indagaçaõ, visto que no estado presente das Sciencias naõ será facil encontrar questaõ alguma, que conduza a Equações Fluxionaes de ordem superior á segunda, nem de mais de tres variaveis, como já em outro lugar ponderámos. Será com tudo de razaõ, que advirtamos, que quando huma Equaçãõ Fluxional qualquer naõ for Fluxãõ exacta de outra alguma Equaçãõ de ordem inferior, nem se poder reduzir a que o seja por meio da multiplicaçãõ de hum factor conveniente para esse effeito, se naõ deve por isso concluir, que ella seja absurda em todo o rigor d'esta expressãõ, quero dizer, que ella expresse alguma propriedade imaginária, ou impossivel de sua natureza; mas taõ sómente, que a sua Fluente se naõ póde achar nem immediatamente, nem por meio do artificio da multiplicaçãõ de hum factor variavel. As consequencias, que da doutrina exposta se deduzem relativamente á possibilidade, e modo de obter esta qualidade de factores nos casos, em que d'elles depende a determinaçaõ das Fluentes, seraõ o objecto de outra Memoria.

E R-

ERROS DE CALCULO

Que se devem corrigir nesta Memoria.

Na pagina 214 linha ultima em lugar de

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dy}\right) dx = 0$$

deve lêr-fe

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right) dx = 0$$

Na pag. 243 lin. 3 em lugar de  $\frac{n.(n-1)}{1.2} N^{(n+1)} ddP$ , deve lêr-fe  $\frac{n.(n-1)}{1.2} N^{(n+1)'} ddP$ .

Na pag. 244 lin. 7 em lugar de  $\frac{dP}{d}$ , deve lêr-fe  $\frac{dP}{P}$ .

Na pag. 251 lin. 24 em lugar de  $-3 \frac{1.2}{n(n-1)} ddN^{3'}$ , deve lêr-fe  $+3 \frac{1.2}{n(n-1)} ddN^{3'}$ .

Na pag. 253 lin. 8 em lugar de  $dd, P$ , deve lêr-fe  $ddP$ .

Na pag. 260 lin. 11 em lugar de  $E^{3'}$ , deve lêr-fe  $E(1)^{3'}$ ; e na linha 13 em lugar de  $E^{2'}$ , deve lêr-fe  $E(1)^{2'}$ .

Na pag. 281 lin. 14 em lugar de

$$B \left( H - \frac{dD}{dx} \right) - D \left( \frac{1}{2} O - \frac{dC}{du} \right) = 0$$

deve lêr-fe

$$C \left( H - \frac{dD}{dx} \right) - D \left( \frac{1}{2} O - \frac{dC}{du} \right) = 0$$

NB. Não se aponhaõ alguns erros de Orthografia, que escaparaõ á vigilancia do corrector, por serem de natureza ral, que o leitor facilmente os pôde supprir, visto que nenhum d'elles altera nem levemente o discurso.

## DESCRIPÇÃO

*De hum Feto humano monstruoso, nascido em Coimbra no dia 28 de Novembro de 1791.*

· POR FRANCISCO TAVARES.

**N** — Mãi de muitos filhos, de 36 annos de idade, em Novembro de 1791 julgava-se pejada de sete mezes, parte dos quaes tinhaõ sido passados em bastante regularidade. Em Agosto tinha padecido huma hemorragia uterina, de que convalesceu sem ajuda de medicamentos, que não fossem a dieta, e descanso na cama. Restituída aos seus trabalhos domesticos ficou sempre padecendo huma purgação côr de café, até que por hum subito terror começou a sentir descer o ventre, com frequente vontade de urinar, pouco movimento do feto, dores pelo ventre, e lombos, por espaço de oito dias. Passados elles entreu a sentir verdadeiras dores de parir no dia 28 de Novembro, que soffreu por dez, ou doze horas. Ao fim d'ellas chamada a parteira tocando-a, chegou ao feto, o qual pouco tempo depois lançou fóra hum dos pés, logo o outro, e ajudado da parteira finalmente nasceu semivivo sem secundinas, havendo precedido á fahida do pé huma grande cópia de agoas de côr preta. Examinado o feto appareceu da fórma que representa a Fig. I. apresentando hum grande exomphalo incluído sómente no peritoneo, taõ adherente pelos lados aos tegumentos communs, que a não ser a natural transparencia que o distinguia, pareceria sua continuacão. Mas observava-se tambem, que os tegumentos se limitavaõ n'huma rima continuada até o sternon por onde sahia o peritoneo, porém





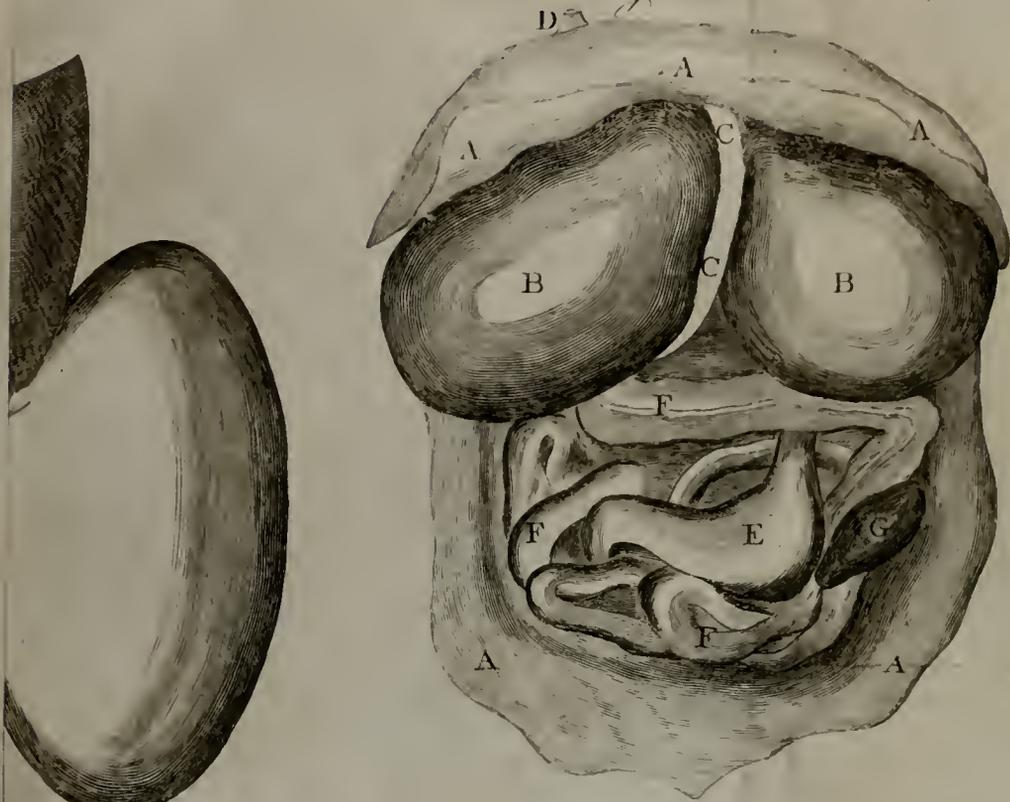
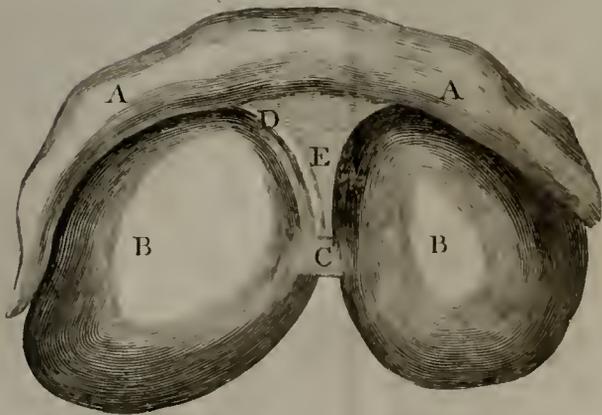


Fig. IIII



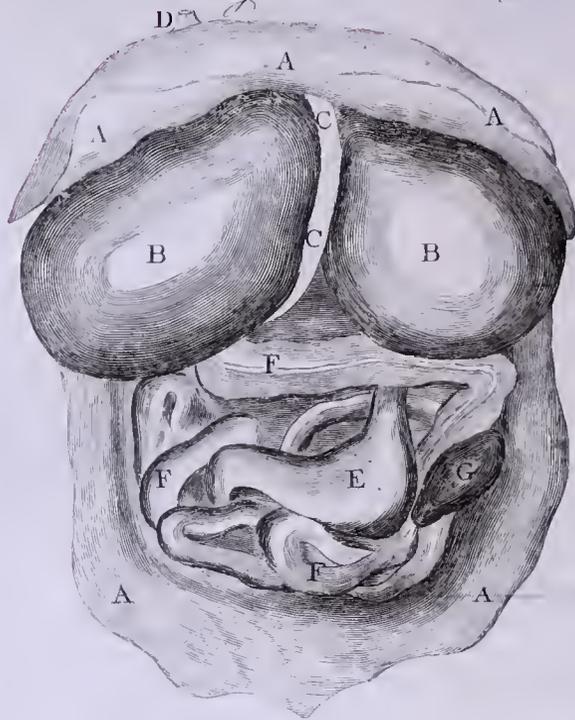
*Fig. II*



*L. delinavit.*

*Fig. III*

*Mem. pag. 296.*



*Fig. IIII*

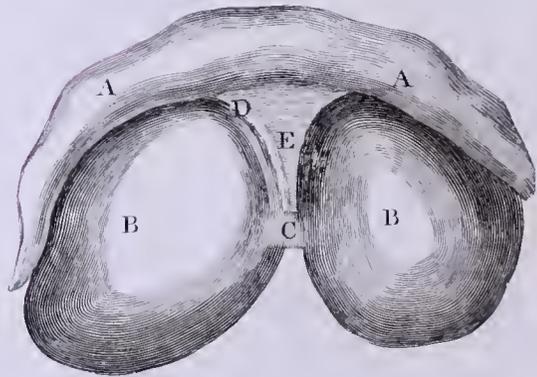


Fig. VI.

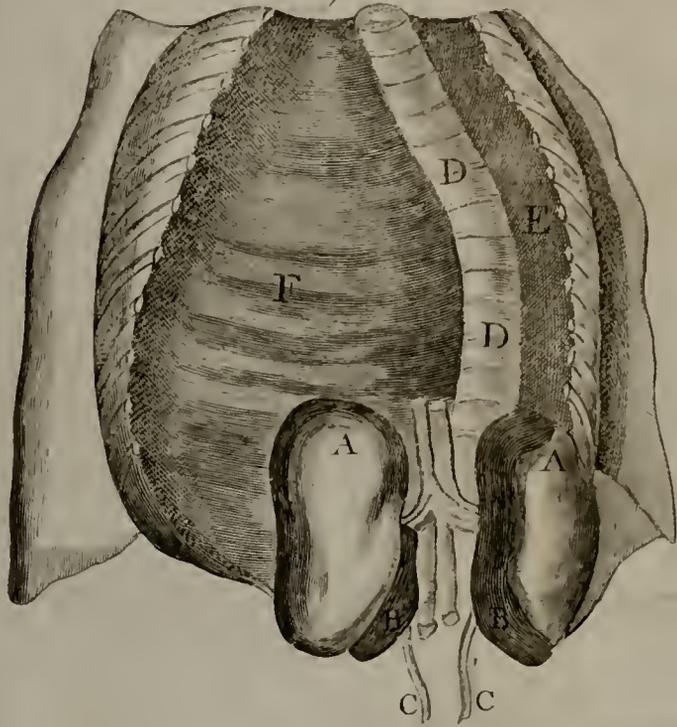


Fig. VIII.

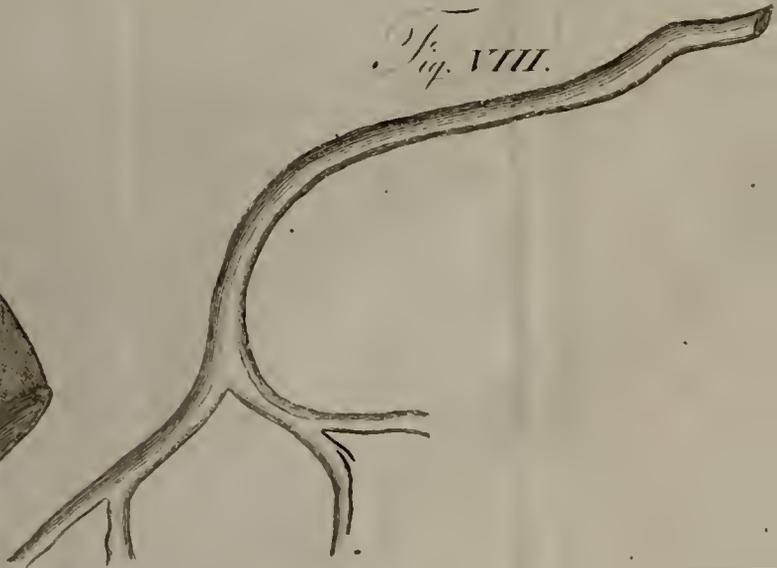


Fig. V.

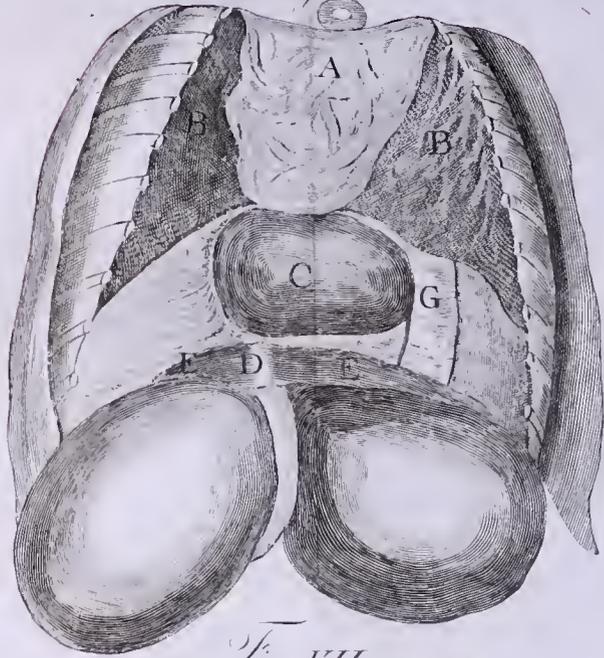


Fig. VI.

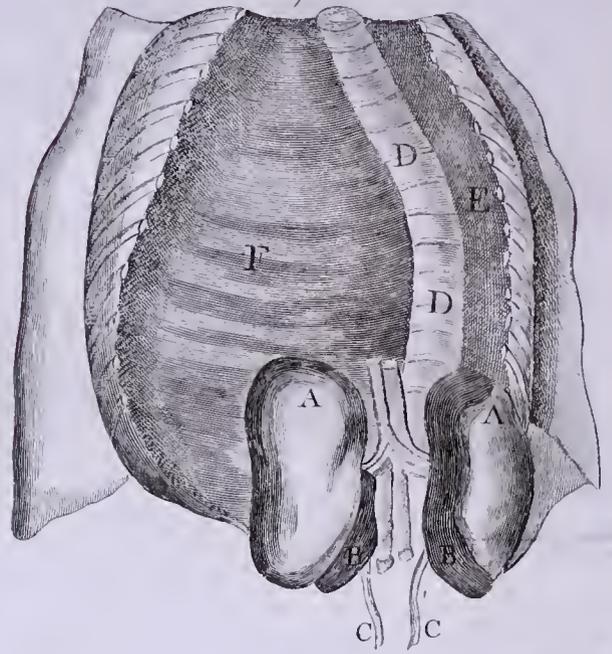
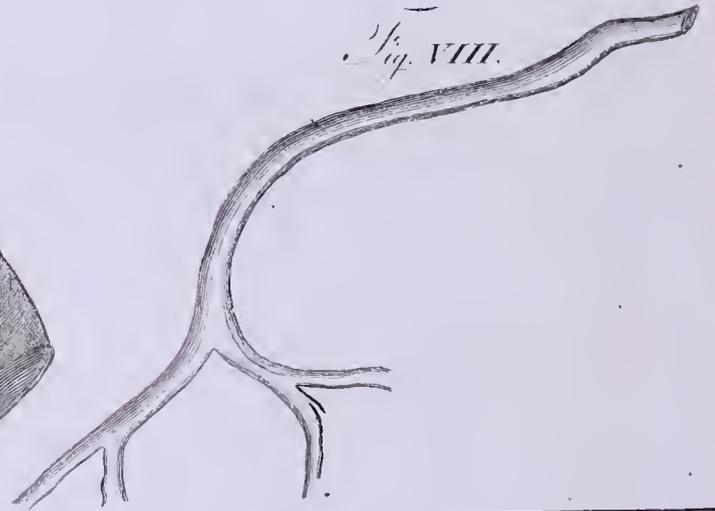


Fig. VII.



Fig. VIII.



rém nada cruenta, o que bem indicava, que não se formou na occasião do parto. Ao lado direito da origem do exomphalo havia huma excavação desigual, que no sitio (A) representava hum bordo rijo, e resistente ao cortar, e logo para a parte interior hum forame (a) cego, sem passagem para a parte interna, e pouco abaixo no sitio notado com a letra B huma caruncula rubra peciolada por hum péssimo delicadissimo pouco distante do buraco C, o qual pela extensão de huma pollegada formava hum sacco de meia pollegada de diametro, cuja superficie interna era rugosa, rubro-rosea, e semelhante á superficie interna do intestino recto: a sua entrada era facil introduzindo o dedo minimo, que não encontrava resistencia, senão quando o diametro diminuia á distancia de huma pollegada, e por tanto não tinha Sphinter. Distinguia-se em D hum ducto, que caminhava por toda a superficie superior do exomphalo para a parte interna, do qual, por meio da pressão, se víraõ sahir algumas gottas de sangue. A sua grossura total seria de huma linha pouco mais, ou menos.

Averiguando-se relativamente aos sinaes distinctivos do fexo, nenhuns apparecêraõ; porque afóra de duas producções cutancas semelhantes a duas verrugas pendentes, marcadas em EE, nada mais se via senão as tres pequenas impressões no sitio proprio, mas hum pouco ao lado direito, notadas com as letras *b*, *c*, *d*, das quaes a superior *b* tinha hum muito pequeno forame, que se limitava á distancia de huma linha, sem dar passagem a hum Stillete com que se tentou.

Não tinha nem final de papillas de mammas: a cabeça era maior do que he ordinario em crianças de sete mezes: os pés retrahidos para o mallcolo interno, mostrando as palmas seguidas á parte interna da perna.

Visto pela parte posterior, se via logo hum tumor mole, liso, da côr da pelle no sitio correspondente á ultima vertebra lombar, e principio do ossõ sacro, da fórma que se vê representado na Fig. II. A.; e proseguindo-se na ave-

riguação exterior, achou-se não ter *anus*, nem bem divisaõ de nadegas.

Pude obter dos pais facilitarem-me a disseccão deste particular monstro, a que procedeu o Lente de Anatomia nesta Universidade o Doutor João de Campos Navarro de Andrade, na minha presença, na do Doutor João Joaquim Gramacho da Fonseca, Lente de Aphorismos, e na do Doutor Joaquim Navarro de Andrade, Lente de Instituições Medico-Cirurgicas. Foi ella feita com todo o esculpulo, e attenção, e cuidei de desenhar, ainda que toscamente, na natural grandeza cada huma das figuras, que necessarias fôraõ, para dar huma idéa mais justa das particularidades, que se observáraõ.

Abrio-se o sacco do exomphalo (Fig. III.) AAAAA, e appareceu o figado em dous lobos BB repartido, e suspenso pelo ligamento CC de largura de huma linha. O sacco do peritoneo estava adherente pela ametade da parte convexa do figado, e tinha algumas outras irregulares adherencias em varias partes da mesma superficie. O ligamento CC vinha tambem adherir pela parte da espinha do dorso aos intestinos. Immediatamente abaixo dos dous grandes lobos do figado se viaõ os intestinos F, e o estomago E em sufficientemente boa conformação, e ao seu lado o baço G de huma figura cordiforme acuminada, e de huma consistencia mais dura do que a natural, e faltava de todo o omento, que devia cubrir os intestinos, e faltava o pancreas. O ducto D se foi seguindo, como convinha, e caminhava pela adherencia do peritoneo até ao figado, de fóra para dentro, da direita para a esquerda até se introduzir na substancia do figado superiormente, e no meio da parte gibbosa n'uma grande scissura, qual se vê na Figura IV. letra E, que se terminava por huma ponte C, depois da qual he que começava o ligamento CC (da Fig. III.).

Tiradas as adherencias ditas, o figado parecia sustentado por hum peciolo formado pela veia cava (Fig. V.) D; mas pela parte anterior do diaphragma EE, logo debaixo do

do sternon. E indagada a parte concava achou-se o seu lobo de Spigelio dentro n'hum duplicatura do sacco, e não se encontrou bexiga do fel. O diaphragma apenas merecia o nome pela divisaõ das cavidades, sendo taõ tenue, que pouquissimo, ou nada mostrava da parte muscular. Tirado o figado, e intestinos, abrindo-se estes pelo seu comprimento, se levou a abertura até ao buraco C da Fig. I. Eftavaõ cheios de meconio, que tinha facil sahida pelo dito buraco com qualquer leve pressaõ.

Os rins (Fig. VI.) AA cheios de elevações desiguaes por toda a superficie externa, tinhaõ de particular ser o direito maior, e mais levantado na extremidade superior, do que o esquerdo. Hum, e outro com as capsulas renaes BB inferiores a cada hum, mas a esquerda tripla da direita, e acompanhando toda a parte concava do rim, e ficando-lhe ainda alguma coufa superior: ambas de côr rubro-fusca. A disposiçaõ dos vasos renaes regular sahindo tambem os uretheres (cc) do proprio lugar, dos quaes o esquerdo tinha livre sahida para o buraco C da Fig. I., e o direito parecia perder-se nos tegumentos. Não tinha bexiga urinaria, nem cavidade, aonde se contivesse, como se verá logo.

Aberta a cavidade do peito appareceu hum grande glandula thymo A. Fig. V.: os pulmões BB pequenos, e solidos, e o coração C todo da parte direita da cavidade, tocando a sua ponta a columna vertebral G, e ficando toda a cavidade esquerda livre, pois que, como se vê na Fig. VI., pela inclinaçaõ da espinha dorsal em DD a cavidade E vinha a ser o terço da cavidade F, e por consequencia incapaz de accomodar hum coração volumoso.

Da mesma fórma os vasos grandes, que sahem, e entraõ no coração, estavaõ em toda a parte direita, com a differença de que a veia cava se adiantava para a parte anterior do diaphragma, onde, como dito fica, o figado era como peçiolado por ella: o esophago, e a trachea da mesma maneira eraõ da parte direita.

O volume maior da cabeça convidava á indagação do estado do cerebro; e apenas se rompeu a dura meninge sahíraõ mais de duas onças de hum sôro limpido, e por tanto se suspeitou immediatamente, que se havia de verificar o tumor da parte posterior por spina bifida. Rompeu-se o tumor, sahio hum semelhante sôro, mas sanguinolento; e continuando-se a romper longitudinalmente as vertebrae, vio-se toda a cavidade da columna vertebral do diametro de tres linhas, a medulla spinal tenue, como macerada, e occupando apenas hum terço da cavidade, cujo resto era cheio do mesmo sôro dito. As ultimas lombares erãõ bifidas.

Eraõ os ossos innominados inteiramente planos, e verticalmente situados. As ultimas vertebrae lombares começavaõ a encaminhar-se para a parte anterior: assim continuava o osso sacro, e terminava o coccyx, como representa a Fig. VII.

A falta de partes genitaeas externas, que faz dever contar-se este monstro entre os mais raros, puxava a curiosidade para procurallas interiormente. Debalde tudo. A pelve era nenhuma, e afóra dos musculos, que a forravaõ, apenas se via cellular, e sobre a crista do illion glandulas bem patentes: de resto nada mais, que tivesse nem a mais remota analogia, ou semelhança das partes, que distinguem os sexos.

Passadas trinta e tres horas a mãi lançou as segundas, que reteve sem a mais pequena evacuação de sangue. Eraõ de natural tamanho, e o seu funiculo de quatro pollegadas escassas de comprimento, e taõ tenue, como he representado na Fig. VIII., e bem correspondente ao ducto D das Fig. I., III., e IV. As arterias umbilicaes se reduziaõ a huma só, e a veia era taõ tenue, que com muita difficuldade se percebia.

Persuadido de que a Natureza naõ reconhece limites no modo das suas producções, que ella sabe, e póde variar ao infinito; entrei com tudo na curiosidade de averiguar sobre a raridade, ou frequencia de monstros humanos,  
em

em que junto a huma configuração exterior pouco irregular á primeira vista se encontrassem tantas irregularidades, como no que fica descripto. Vim por fructo da minha diligencia a conhecer, que nelle havia huma complicação de muitas das modificações, que classificaõ os monstros por excesso, por defeito, e por situaçãõ mudada de partes; mas revolvendo a immensa lista de monstros para encontrar os analogos, ou semelhantes, de que se conservasse memoria, apezar de que o grande *Haller* (*Oper. min. Tom. III. Lib. I. de Monstris, pag. 34.*) diga: *Sed etiam fetus sexu destitutos, pene, aut vulva, passim referuntur*; eu não encontrei esta facilidade, ficando n'uma desproporção infinita os destituidos de sexo, e mesmo os herniosos semelhantes, relativamente aos outros. Basta confrontar as notas do lugar citado, que devem verificar o *passim*, com as que vão dispersas por todo o Liv. I., para se vir no conhecimento da desproporção.

De quantos são referidos na Academia Real das Sciencias de Paris desde o anno de 1701 até ao de 1780 são sómente dous descriptos por Mr. *Mery* no anno de 1716; e outro por Mr. *Petit* no mesmo anno, que com este tem alguma analogia, principalmente o ultimo, em que com tudo póde entrar em dúvida, se o appendix, que apparecia ao lado do anus spurio, tendo hum unico corpo cavernoso, e tres musculos, dos quaes dous nasciaõ dos ossos da pube, e hum dahi mesmo, e do coccyx, e deveria haver-se por parte, que em toda a imperfeição fosse com tudo distinctiva do sexo masculino.

Aproxima-se a este o que descreve *Frederico Hoffmann* (*de morbis fetuum in utero materno, num. 3.*) ainda que tão laconicamente, que não dá idéa senão do que exteriormente se observava. Este não tinha abertura de anus, era sem distincão de sexo, e com huma grande porção de intestinos fóra do corpo. No mesmo paragrafo se faz menção de outros dous monstros por exomphalos com parte das entranhas nelle contidas, mas de sexo conhecido.

Nas *Aélas de Compenbague* anno de 1675 *Observ.* 59. lê-se a Historia de hum Feto monstruoso, com a cabeça bem conformada; as pernas voltadas para a parte posterior; corpo immovel; figado de grandeza extraordinaria; intestinos fóra do ventre; sem anus; sem nenhuma apparencia de sexo; mas que na coxa direita tinha huma abertura, que tomáráõ por hum orificio do utero, ou por collo da bexiga.

Mr. *Le Prieur de Lugeris* descreve hum monstro sem distincção sensível de sexo, mas com hum buraco de quasi seis linhas de diametro, onde deveria estar a parte distinctiva do sexo masculino. (*Journ. des Scavans ann.* 1690.) E no anno 1696 se descreve outro sem apparencia de sexo, mas sem maior individuação.

He mais bem descripto o que participou Mr. *Sue* á Academia Real das Sciencias de Paris no anno de 1746, que não tinha nenhuma apparencia de coxas, nem de pernas, e que entre outras particularidades não tinha no fim do tronco nenhuma abertura natural, e sómente onde deveriaõ ser as partes da geração havia hum pequeno appendis produzido pela pelle, debaixo do qual se achou pela dissecção huma pequena bexiga.

Sem nenhuma partes da geração assim internas, como externas, era o monstro que Mr. *Marrigues* communicou a Mr. *Morand* em Carta de 9 de Novembro de 1758, havendo com tudo ossos innominados no estado natural (*Mem. des Scavans Etrang.* T. IV. pag. 123). Mas que deformidades não ha no resto? Era sem coração, sem pulmões, sem trachea, sem aorta, nada de veia cava, mediastino, nem thymo. Havia pouca extenção de abdomen, e parte dos intestinos estava fóra do ventre. Da mesma fórma faltavaõ o estomago, figado, baço, pancreas, capsulas renaes, rins, urethers, bexiga urinaria, e o cordaõ umbilical era de seis pollegadas.

Dos fetos herniosos somente, isto he, sem fazer cabedal de outra conformação, tambem não he grande a cópia.

piã. Além dos já mencionados acha-se nas *Transacções Philosophicas*, ann. 1670, n. 58, art. 3, notado hum Feto de huma figura horrenda com o peito aberto, e os intestinos fóra do ventre.

*Nicolau Stenon* (*Act. de Compenbague*, ann. 1671, e 1672, *Observ.* 110) vio hum Feto, cujo coração, figado, ventriculo com o baço adherente, quasi todos os intestinos, e o rim direito estava fóra do thorax, e do abdomen.

Lê-se nas *Ephemerides dos Curiosos da Natureza*, Dec. 2, An. 6, 1687, *Observ.* 126, outro Feto, cujos intestinos sahiaõ pelo embigo incluído n'uma bolça formada pelo peritonco: e na Dec. 1, Ann. 3, *Observ.* 168, acha-se a descripção de outro extremamente monstruoso, sem distincão de sexo, e sem anus, com hum sacco membranoso, e transparente, em que se continhaõ as entranhas thoracicas, e abdominaes. Por hum semelhante sacco membranoso, e transparente se deixavaõ vêr em outro todas as visceras abdominaes (*Eph. N. C. An.* 1688 *Append. Observ.* 45.).

Com todas as entranhas thoracicas, e abdominaes fóra das cavidades, e descubertas acho dous exemplos, hum em *Bonnet* (*Observat. Septentrion. T. II. L. IV. Sect. 9. Observ.* 29 *in Scholio*), e outro nas *Memorias da Acad. das Sciencias de Paris* no anno de 1746 communicado por Mr. *Chaberdard*.

Para evitar a justa censura do célebre Dr. *Joaõ Gregory* Professor d'Edimburgo n'uma das suas sábias *Lições sobre os deveres, e qualificações do Medico*, não deixarei de tentar as utilidades, que se podem offerecer neste producto monstruoso para intelligencia de alguma parte da economia animal, e pelo que respeita aos fenomenos da prenhez, e parto, e suas consequencias.

A primeira cousa admiravel foi a copiosa hemorragia uterina, que veio a cessar sem mais remedio do que o descanso, e dieta. Isto parece provar, que se não deve em todos os casos da hemorragia precipitar o parto, como muitos aconselháraõ; mas que ao contrario, quando a hemor-

ragia não ameaça perigo evidentissimo, se deve temporizar, procurando pelos meios mais suaves a cessação della.

Em segundo lugar he de notar a purgação de côr de caffè, que parada a hemorragia continuou até o dia do parto. Parece mostrar este successo; que os vasos, que davaõ larga sahida ao sangue, não chegarão a tapar-se de todo, e fôraõ deixando sahir hum sôro sanguinolento, que imitava a côr do caffè, sem com tudo dar lugar a despego maior da placenta; pois que ainda depois do parto ficou tanto tempo retida sem evacuação de sangue nenhuma absolutamente.

Daqui mesmo nasce espontaneamente outro corollario de não se dever precipitar temerariamente a extracção das segundas, se não seguem immediatamente o feto: e que he preciso dar tempo a que a Natureza por effeito da contracção do utero as faça sahir, se não ha hemorragia muito consideravel. Corollario taõ recommendado pelos sabios Parteiros, e nunca executado pelos Cirurgiões faltos de principios, e conhecimentos, a quem muitas vezes saõ devolvidas estas operações.

Parece provar-se a pouca necessidade de ligar o cordão umbilical da parte da mãi: e que por esta falta nunca, ou rarissimas vezes se seguem hemorragias depois do parto.

E sendo taõ tenue o cordão deste monstro, falto de huma das arterias umbilicaes, e a que restava taõ delgada, chegando entretanto a huma grandeza regular, parece provar-se, que o sangue da mãi não passa livremente para o feto, e só passa hum líquido tenue albuminoso, do qual o feto pela açção dos seus vasos fórma o sangue, que pela arteria umbilical sahe para a placenta; e que no monstro descripto isto não succedia sómente nos primeiros mezes, mas nos ultimos tambem, contra o parecer de alguns Physiologistas.

He ultimamente hum dos fenomenos succedidos no parto muito attendivel, e de que sería difficultoso dar a expli-

plicação se a natureza inquirida pela dissecação anatomica não a désse; vem a ser: as agoas negras que precedêraõ o parto. Porém deixamos notado, que no sitio do embigo havia hum anus sem sphinter, que com leve pressão largava o meconio, e sabemos que he final de se appresentar o feto sentado á sahida do meconio (ainda quando muito bem conformado) pelos simples esforços do utero materno. Que muito pois que, ajuntando-se aos esforços a facil sahida pelo anus monstruoso, as agoas viessem pretas?

Deixo á contemplação dos Sabios se Mr. *Mery*, nas duas Memorias do anno de 1716 já citadas, e outros que o tem seguido, tem toda a razão para negar, que haja exomphalos contidos sómente no peritoneo.

## LOXODROMIA DA VIDA HUMANA,

O U

## MEMORIA

*Em que se mostra, qual seja a carreira da nossa especie pelos  
espaços da nossa presente existencia.*

POR JOSE' JOAQUIM SOARES DE BARROS.

**S**EMPRE a Natureza nas suas operações mostra constantes os seus motivos, e sempre na sua direcção ella nos indica os seus diversos empregos, não obstante as differenças que muitas vezes se encontram em alguns dos seus resultados; pois que essas mesmas differenças não são mais que outras tantas confirmações da sua tendencia primitiva, e dos seus primeiros intentos. Se ella obrasse de outra fórma, se a sua acção fosse incerta, e fortuita, deftituidos então os animaes de huma lei geral, e huma regular energia para todos em todo o tempo duravel, nesse estado de simultaneos, e encontrados impulsos, e sem hum instincto directorio, e hum principio de huma acção decidida, elles não seriaõ mais que humas maquinas vertiginosas, sempre movidas pelo impeto, e destruidas pelas suas proprias forças, ou conservadas pelos acafos; e os homens em taes circumstancias, em vistas tão arriscadas, e sem huma norma invariavel, sempre á razão parallela em discursos acertados, se mostrariaõ sem remorso indocis a todo o preceito, e sem nenhuma mostras de agrados para o bello esplendor da verdade. Em huma situação tão triste elles não gozariaõ dos grandes beneficios das moradas fixas, e das povoações reguladas, ver-se-hiaõ espalhados sobre os espaços da terra como animaes solitarios,

rios, sem providencia, sem conselho, e sempre errantes, e desgraçados. Mas graças á poderosa Natureza, e áquella illuminada faculdade, que do mais sublime assento lhe foi dada, tudo para nós está mui diversamente ordenado. Essa mão que perpetuamente nos rege sem resistencia nos seus fins, move a toda a humanidade com hum vigor tão seguro, e regulado como sempre se tem visto em toda a carreira dos Seculos, sem que os seus grandes desígnios tenhaõ ainda em nada mudado. Tudo ao seu dominio se sujeita, ao seu Imperio immensamente dilatado, e com tanta facilidade, que a mesma materia bruta aos seus preceitos se ajusta com huma subordinação tão notavel, como todos os dias o estamos vendo nas mais seguidas funções de todo o corpo organizado.

Reprodução de individuos, e conservação de especie, são da Natureza para todos os viventes os seus intuitos mais fixos, as suas leis invariaveis, em cuja constante observancia ella em todo o tempo trabalha, não obstante as excepções forçadas, e tambem as voluntarias que algumas vezes encontra na nossa mesma contingencia, ou na escolha dos motivos, com que a nossa intelligencia se propoem á nossa natural liberdade.

Não he porém do nosso intento, nem sería bem proporcionar este papel, o seguir as longas vistas com que aquella mão sempre activa está por toda a parte firmando os seus desígnios immutaveis em hum tão vasto theatro. Não trataremos pois das razões, com que a natureza nos seus largos golpes de vista se modera, e se limita no meio da Sociedade; nem diremos aqui nada d'aquellas desproporções, que ella muitas vezes desaprova nos empregos da grande familia do Estado; nem faremos tão pouco menção d'aquelles vinculos, aquellas obrigações com que se formaõ, e ajustaõ as mais importantes correspondencias na mesma Sociedade; e nem mesmo huma só palavra diremos da efficacia dos effeitos pelas mesmas leis promettidos para as mais certas garantias dos grandes, e populosos

losos Estados: pois que tudo isto não admite provas tão manifestas, e tão claras que ellas se possaõ dispôr, e tratar com aquellas proporcionalidades de calculo, de que especialmente nos servimos neste assumpto que tomamos, só desta fórma reductivel ás considerações deste lugar em toda a extensaõ, que lhe damos. Assim com semelhante espirito trataremos neste papel daquelle constante vigor, aquelle poder sempre vivo, que incessantemente revolve a nossa especie com huma acção sempre ajustada a determinados limites, e a permanentes medidas, aquellas que agora nos servem para fazermos a sua applicaçãõ, não só a coizas, de que a Filosofia puramente por curiosidade se agrada, mas tambem com especialidade daquellas, sobre que esta vasta Sciencia se diffunde ainda por maiores espaços, e empregos de utilidade.

Como hum fruto que da sua planta se separa, cahe o homem sobre a terra quando nasce destituido de todo o movimento de providencia, e de toda a acção de conselho nesse tempo da sua maior miseria nos seus dias arriscados. Não bastaõ as ternuras dos Pais, os seus activos cuidados para livrar a idade mais innocente dos seus maiores, e mais eminentes estragos. He preciso, que a Natureza receba aquelle tributo, que ella tem determinado, e que ella leve logo consigo no primeiro anno da vida huma grande parte dos que nascem. Semelhantes sacrificios se vão depois repetindo na continuacão de iguaes periodos com menor effeito, não ha duvida, em successivas ruinas; porque cada dia vai tomando maior vigor em alentos vitaes aquella acção, que conduz desde os primeiros dias da vida até ao tempo da puberdade, mas essas perdas são ainda tão consideraveis, que he preciso, que a Natureza sem longa perda de tempo se determine a fazer de infinitos innocentes menos frequentes os seus estragos, se ella quer, que a especie dos miseraveis humanos não veja o seu fim em poucos dias. Com effeito naquelle tempo, naquella época da puberdade tão admiravelmente afina-

finalada se mostra a mesma Natureza como sentida de tantas destruições, e de tal fórma arrebatadas, e se determina a nos dar huma nova faculdade, hum grande, e mui activo poder de reparallas.

D'esta forte passãõ todos os individuos da nossa especie, que se avançaõ até áquella pasmosa época, o tempo dos seus perigos mais graves, e assim vaõ correndo por huma sorte de trajectoria até tocar naquelle ponto fixo, aquelle alvo onde a Natureza lança a todos os humanos por huma sorte de Ballística. Lá desse ponto da nossa maior elevaçãõ em forças vitaes, e onde se encontra o *Maximum* da nossa potencia de vida, muda aquella trajectoria de inflexãõ, e toma por huma linha recta o seu curvõ, durante o espaço de sete annos, desde o termo da puberdade até aos ultimos limites do corpo em longitude. Mui raros sãõ os individuos de huma mesma Naçaõ, que na Europa se affastãõ com algumas pequenas differenças deste taõ medido caminho, dessa lei taõ fortemente promulgada, e hoje para nós com a sua sançaõ em proporções taõ claramente conhecidas, e quando essas differenças se encontraõ mais, ou menos consideraveis entre duas, ou mais Nações, todas essas desigualdades sãõ pela sabia Natureza, quanto á populaçaõ, de tal fórma com outras de outro genero dispostas e preparadas, que pela sua combinaçaõ todas tendem sempre a hum mesmo equivalente, e a hum geral resultado; pois pela observaçaõ sabemos, que se huns povos se dilataõ nos espaços da vida por maior energia em vitalidade, outros sem tanto vigor para huma mais larga existencia se anticipaõ na época da prolifegaçaõ com huma mais prompta fecundidade, compensando assim tudo a Natureza em razões de contingencias, que á nossa primeira vista naõ formaõ mais que diverſas sommas de acaſos; mas que na realidade naõ sãõ mais que os termos, e os limites de diverſas ordens de expectaçõs calculadas, e sempre mais, ou menos tendentes ao equilibrio da populaçaõ por caminhos mui diverſos, e mui variados grãos de actividade.

Se com semelhantes golpes de vista olharmos para os trabalhos da Natureza empregados na nossa especie com equações tão notaveis, vella-hemos sempre por todos os lugares da terra occupada em preparar desta forma em reciproca correspondencia o termo commum da vida com a media expressão da fecundidade. Veremos, que se por huma parte pela differença do clima hum grande numero de individuos collectivamente considerados, e como em expressão de massa, se anticipa em fecundidade, por outra parte fica logo perdendo em menor duração de vida, o que na propagação tinha ganhado em celeridade; e pelo contrario observar-se-ha, que onde o primeiro termo da serie das gerações principia a retardar, a população se compensa ao mesmo tempo com huma maior expressão de vitalidade, ou huma mais larga potencia de vida. Observar-se-ha tambem, que nesta fórma de equilibrio, a época da fecundidade vai sempre retardando da equinoccial para as vizinhanças do Polo, e que ao contrario ella vai anticipando do Norte para o Sul o tempo daquelle data, e afroxando ao mesmo passo com proporcionados descontos o poder daquelle agente invisivel, que faz a medida dos nossos dias, e já se entende, que se não trata aqui de exactas proporções de Geometria, nem de precisas analogias de calculo; mas de huma quasi coincidência a hum ponto fixo, e de huma mui notavel aproximação aos limites da verdade.

Tudo isto se conclue de hum grande numero de observações, que se tem feito sobre esta materia nas maiores, e menores latitudes do Globo, e na maior parte das latitudes intermediarias, cujas observações tendem todas a mostrar a uniformidade de semelhantes resultados. Não ha duvida, que pela mesma razão que essas observações concorrem assim tão ajustadamente sobre diferentes lugares do Globo, sempre correspondendo em razão reciproca com a dos espaços da vida á época da fecundidade, por isso mesmo parece, que essas mesmas épocas devêraõ  
mos-

mostrar na direcção do seu assento outro Circulo Maximo com os seus Polos não mui distantes da Ecliptica, ou huma linha curva de outra natureza; pois que de outra fórma seria preciso suppôr, que as ditas épocas não recebem do differente gráo de calor central nenhuma alteração sensível, nem tambem nenhuma notavel differença pela maior, ou menor approximação dos seus respectivos lugares á linha da congelação. Mas como não he o nosso intento fazer neste escripto maiores indagações a este respeito, basta-nos o que temos dito dos pontos essenciaes dessas épocas, para que se possa julgar termos por agora satisfeito ao que era preciso mostrar nesta materia. Não deixarei porém de acrescentar, que seria mui conveniente representalla de outra fórma, com outra disposição, e outro methodo, que até hoje se não tem feito, pondo em todas estas épocas o tempo da puberdade, o commum limite da prolifcação, e o termo ordinario da vida nos seus respectivos lugares, segundo os seus meridianos, e os seus parallelos, e referindo-as ao comprimento dos lados de triangulos reduzidos a huma mesma escala. Assim se representarão mui facilmente em grande quadro, e debaixo de hum só golpe de vista todas as regularidades, e todas as variações observadas, e poderemos vêr tantas coizas curiosas marcadas sobre o Globo bem conformemente ao que já se tem praticado com outras, as Cartas dos ventos, e das monções, e as que representaõ as variações da Bussola, e o systema do Magnetismo.

Estas especulações assim tratadas seriaõ huma sorte de anatomia comparativa das differentes porções da nossa especie espalhadas com qualidades, e constituições tão diversas sobre toda a face da terra. Sem taes conhecimentos, sem a noticia do que se passa nos outros povos, sem estas tão admiraveis relações, que a Natureza estabelece, e determina, o homem he pouco mais de nada, e como se não existira para tantas coizas uteis, que destes conhecimentos se derivaõ, e como hum ponto de luz sem re-

flexos invisível, e como em si mesmo escurecido. Sem se saber o que se passa nos outros, que correm na mesma carreira, quaes são os nossos passos communs, as nossas perdas, e os nossos riscos. Sem semelhantes principios, sem estas vistas assim terminadas em pontos certos, e sempre fixos, nada se pode saber de hum grande numero de materias mui curiosas, e mui uteis. He preciso sahirmos fóra de nós mesmos, e lançar o pensamento fóra da nossa individual existencia para medirmos pelo que se passa nos outros os nossos mesmos alentos, e as nossas proprias fraquezas nos diversos espaços da vida, e para sabermos onde ha mais que esperar, ou que temer, quaes são em diversos tempos os nossos maiores perigos, e quando se devem apresentar aquelles, que parecem mais repentinos. Assim por este caminho pôde o homem vêr-se a si mesmo, como desde hum ponto brevemente destruível, e comparar-se com toda a volumosa massa da sua especie espalhada por todos os espaços da terra em existencia sempre fixa.

Esta fórma poderá elle então bem conhecer, não aquelles accessos de esperanças, e de riscos nas idades dos particulares, e nas condições dos seus successos respectivos, mas ainda calcular nas revoluções dos grandes Imperios todos os seus pedaços de ruina, quando as causas são bem sabidas, não só por perdas de batalhas, ou de grandes acontecimentos imprevistos, mas por outras muitas vezes muito maiores, posto que menos promptamente sentidas, como he a falta de actividade, e de industria dos povos, a satisfação com o puro necessario, e a esperança só no foccorro do dia. A tudo isto chega, a tudo abraça a especulação da nossa especie calculada nos danos da nossa mortandade, nas medidas dos nossos perigos, na expectação de reparallos, na probabilidade de vencellos; em fim a tudo aquillo, em que he preciso applicar o conhecimento das proporções de toda a escala da população, aos mais uteis empregos da paz, e ás mais bem medidas providencias da guerra.

Com

Com semelhante conhecimento se tem adiantado no nosso Seculo a razaõ das Nações mais illustradas : não deixaremos porém de dizer , que esta Filosofia taõ nova , e de tanto bem para a Sociedade , ainda se não acha á proporção das suas graves consequencias fufficientemente cultivada , e que em muitas occasiões por esta causa , por menos bem considerada , e seguida , ou não bem ajustadamente applicada , se perde muito em administração publica , e em grandes recursos do Estado.

Mas não vamos taõ rapidamente sobre tantos objectos diversos postos á mesma vista sobre hum grande quadro , e não supponhamos a respeito do seu numero , das suas proporções variadas , e da differença dos seus contrastes tudo o que está dito , já de tal fórma conhecido , que para fixar aqui mais a intelligencia não seja preciso sobre isto dizer mais nada. Mostremos com mais alguma demora o espirito desta nova Filosofia , versando sobre os seus objectos analogos com mais alguma novidade , e tomemos por fundamentos aquellas observações , e aquelles encontros não esperados na nossa viagem pelos diversos espaços da vida. Mostremos a sua applicação com alguma novidade a huma doutrina mui notavel , mesmo á sua origem errada , a huma Filosofia mysteriosa , e grandemente decantada nos fastos da maior antiguidade , para que se veja logo como desde o escuro véo da quimera chegamos ao tempo da claridade , ao tempo de ouvirmos em fim o que a mesma Natureza falla , deixando no nosso espirito hum tom de contentamento , não só de pura curiosidade , mas tambem ao mesmo tempo hum numero de inducções mui notaveis , que podem ser applicadas com esperanças mui proveitosas ao uso da Medicina , e tambem a servir com algumas utilidades em materia de contingencias calculadas em maior precisaõ de conhecimentos na Logistica das probabilidades da vida.

Para conveniente preparaçaõ do nosso intento , leve-mos a nossa recordação logo de hum golpe de vista aos

mais remotos fundos da Historia, e vejamos os Caldeos conhecidos entre os mais antigos Filozofos, occupados em mysteriosas combinações de numeros, e em tirar de taes resultados a respeito de certos tempos da vida os mais tristes, e terriveis annuncios dos nossos maiores estragos. Alguns seculos depois encontraremos Pithagoras, e Platao Filozofos bem conhecidos, de tal forma entregues a semelhanças doutrinas, que dellas formavao huma boa parte dos seus scientificos principios, donde deduziao não só as razões da harmonia das Esferas, e das Republicas, mas tambem as dos nossos mais arriscados tempos da vida por funções da Natureza, e da Fortuna. Os numeros 7, e 9, os seus quadrados, e os seus productos, e as suas multiplicações por outros numeros, erao por aquellas theoricaricas os mais perigosos á continuacão da nossa existencia, e formavao aquelles tao terriveis como famosos annos climatericos, quando contavamos outros tantos de vida. Com tao authorizados annuncios intimidarao-se notavelmente os homens, e as fraquezas do temor se espalharao por toda a parte até quasi aos nossos dias com as fraquezas da doutrina, sem porém se vêr certamente nisso mais nada, que tao sómente o que a imaginaçao pintava. Desprezados em fim de huma vez os mysteriosos numeros, e tudo o mais que parecia Romance na Fyfica, apparecerao de huma nova forma as regiões, e os espaços da vida. Apparecerao longas series de observaões da mortalidade dos dois sexos, que devemos á celebre Cidade de Breslau, e as primeiras neste genero. Outras muito mais populosas Cidades, e Londres principalmente, não tardarao muito em seguir aquelle exemplo com grande escrupulo, e vigilancia, ficando porém sempre aquellas primeiras Listas as mais estimadas entre todas. Deste grande numero de observaões tao curiosas tirou logo a Logistica os elementos das probabilidades da vida; os fundamentos das rendas; o das annuidades, e o das Tontinas, e das mais notaveis Loterias; mas dessas observaões não se deduzio nada a

ref-

respeito dos annos climatericos , e depois de tantos seculos de ruido ficáraõ inteiramente esquecidos , excepto daquelles Authores , que ainda depois se cançáraõ em impugnallos com huma laboriosa erudiçaõ , e mal empregada critica , sem ao menos suspeitarem , que por meio d'aquellas Listas , e algumas breves comparações de calculo , poderiaõ logo mui facilmente conhecer o que certamente a este respeito succede no curso da nossa vida , e evitar nesta materia os seus taõ frustrados trabalhos.

Para acabar logo de huma vez o que este assumpto ha tantos seculos tem causado de disputas , determinei-me a consultar a Natureza naquelles seus taõ curiosos archivos , naquellas observações taõ notavéis , e naõ me foi preciso grande trabalho para alcançar logo a resposta , que buscava. Começando pelo primeiro anno da nossa existencia dividindo pelo numero dos mortos o dos que ficão em vida , e continuando assim esta divisaõ até ao ultimo termo da idade mais avançada , que se acha naquellas Listas , pude logo haver desta forma a expressaõ da vitalidade respectiva a todos os annos da vida. Observando entaõ todas as variações desta expressaõ desde o primeiro até ao ultimo termo desta carreira de tanta lida , vim a conhecer os tempos das maiores perdas da nossa especie , os lugares dos seus mais perigosos caminhos , e entaõ encontrei os verdadeiros annos climatericos certamente naõ imaginados , nem ficticios , mas sim aquelles degrãos , e decadencias da vida , onde toda a nossa especie vai encontrar com os seus mais arriscados dias , como se pode vêr na Taboa , que ajunto a este escripto , que já com huma obra minha sobre semelhante materia foi impressa em Paris no Diario Estrangeiro , por assim m'õ ter pedido o celebre Abbade Prévot , primeiro Author desta obra periodica.

Naõ he pois por combinações de números , nem em razaõ dos seus encontros em mysteriosos productos , que a Natureza nos poem naquelles taõ graves perigos , nem tam-

tambem o caminho, que ella nos determina, he nos seus decretos de tal forma invariavel, que não haja differenças mui notaveis nos intervallos dos tempos, e nas occurrencias dos riscos. Não he possível olhar para esta materia em toda aquella extenção, a que o espirito logo alcança, sem fahir dos limites da Fyfica, e sem entrar nos vastos, e indeterminados espaços da magnifica Ontologia. Mas nem este lugar nos permite excursões tão desmedidas, nem a minha confiança he tão grande, que me atreva a romper por alli novos caminhos. Deixemos o que está para lá do véo para nós sempre tão escuro, e vejamos tão sómente o que para cá nos fica, o que póde ser examinado, e bem seguramente visto. Vejamos como os annos climatericos, sendo em qualquer Paiz bem conhecidos por meio de huma serie de observações dos que annualmente morrem, podem ser de grande importancia na theorica, e na pratica da Medicina: segundo aquella Taboa das minhas observações sobre esta materia acima referidas, vemos que a passagem de 24 para 25 annos he climaterica para a Cidade de Breslau; pois que em vez de hum, de que devêra diminuir a potencia da vida a continuar naquella mesma perda, que successivamente em todos os annos antecedentes tinha tido, contados desde o tempo da puberdade, não diminue de 1 como devêra diminuir para ser igualmente seguida, mas sim de 4,66; decadencia certamente mui notavel nesse passo da vida por ser maior de 3,66, que aquella que se observa em todos os referidos annos precedentes, donde com toda a evidencia se conclue, que ha em Breslau huma causa certa de constante, e regular effeito em maior mortandade naquelle tempo da vida; e daqui por conseguinte mui facilmente se infere, que os perigos das enfermidades, quaesquer que fôrem as causas, são então na mesma razão maiores, que os de cada hum dos annos, que a precedêraõ, contados inclusivamente desde o primeiro anno da puberdade. E se se fizerem os mesmos discursos a respeito de todas as mais decadencias em

em outros espaços da vida , marcados naquella sobredita Taboa, ver-se-ha, que quanto aos maiores perigos são em tudo bem conformes na continuação dos resultados, e que daqui se tiraõ diferentes apreciações, com que deve ser tratada a Doutrina das probabilidades da vida, sobre que agora por me faltar o tempo não posso dizer mais nada: Fazendo semelhantes observações nas Listas da mortalidade de Londres, e servindo-me daquellas mesmas investigações sobre a expressão da vitalidade, ou potencia da vida, durante o progresso da nossa successiva existencia; ví, que aquelles desfallecimentos, aquellas subitas decandências, succediaõ da mesma forte naquella Capital, e que os annos climactericos se manifestavaõ alli igualmente por semelhantes estragos, sem outra differença, que a que se encontra no numero, e na variação dos degráos da escada da vida, como se póde vêr na folha impressa, que contém a Taboa das observações de Breslau, onde tambem separadamente se acha huma pequena Taboa dos annos climactericos de Londres.

Depois daquellas observações, que mostraõ a existencia dos annos climactericos, era mui facil pensar, que pois havia annos climactericos, e a esta indagação se applicáraõ varios fugeitos em diversos Paizes da Europa, e particularmente em Suecia, e em França, onde se tem visto serem mais favoraveis para humas idades o mez de Dezembro, e os cinco primeiros do anno, e para outras os do principio do Outono, servindo sempre a idade de 15 annos de termo commum para a comparação dessas differenças. Se a estas observações, que formaõ a baze de huma especulação notavel, juntarmos as de Sydenham sobre a circulação das enfermidades periodicas pelos quatro conhecidos espaços do anno, que ordinariamente mostraõ as passagens mais sensiveis dos caractéres do anno fysico, teremos huma nova materia de Fysiologia, certamente muito mais recommendavel, e muito mais digna de ser attendida, que outras tratadas com mui particular cuidado

na profissão da Medicina, e que seguramente não merecem nenhuma attenção em quanto se não justificaõ melhor as suas utilidades, como por exemplo, aquella que no tempo de certas fases da Lua tanto escrupuliza na pratica.

São bem evidentemente conhecidos os annos climactericos, e os diversos grãos dos seus perigos, demos agora consolação a muita gente dizendo, que ha certos tempos na vida, em que a nossa vitalidade recebe huma certa porção de alentos, e não corre tão grandes riscos: a estes espaços da vida, que se poderáo vêr naquellas referidas Taboas chamei anticlimactericos em razão do beneficio. Depois de huma tal consolação tambem parece bem digno de ser sabido, que esses anticlimactericos se achão mais repetidos naquellas povoações, onde em commum he menor a potencia da vida, como se acha marcado nas mencionadas Taboas, e que cada hum poderá logo vêr comparando os resultados destas observações dos annos anticlimactericos com as do termo da idade mais avançada, seguindo as sobreditas Listas de Breslau, e de Londres.

Mas depois que se publicáraõ aquellas indagações sobre os annos climactericos, qual he o uso que disto se tem feito, não de tudo o que aqui digo, porque quasi tudo agora aqui he novo, mas de algumas couzas a respeito desta materia, e que por meio dessa obra periodica fôraõ logo bem conhecidas? Pelo que até agora tem chegado á minha noticia, tudo se acha como estava, e parece que este assumpto tem passado como couza só de pura curiosidade. Só Mr. *Mobeau* no seu excellente Tratado da população da França, impresso alguns annos depois de apparecerem as minhas considerações sobre aquelle assumpto no mencionado Diario, se applicou a dar em alguns lugares daquella sua obra tão util varias Taboas de observações sobre os mezes, e as Estações climactericas, e em nada mais esta materia se tem adiantado. Bem considero, que se tivesse então tratado dos annos climactericos, como agora aqui faço, mostrando á Fysiologia por este caminho

hum

hum novo auxilio, esta materia não ficaria talvez para o bem geral facilmente esquecida; mas quando isto mesmo assim succedêra, tambem não me admiraria; pois que estou vendo, que huma das Nações mais illustradas, que tanto se distingue no bem da humanidade em largas especulações, e grandes calculos politicos, ainda para o beneficio, que pode tirar de semelhantes observações, não tem dado os primeiros passos. De Inglaterra fallo, e particularmente da sua Capital, onde a nossa especie recebe, mais que em nenhuma outra parte da Europa, os maiores estragos. Alli morre logo no primeiro anno da vida quasi a terceira parte dos que nascem, e nada até hoje se tem praticado para se evitarem perdas tão graves, não parecendo isso de nenhuma forma impossivel.

Fundados sobre taes principios, diremos a respeito desta mesma Nação huma estranha novidade, diremos que por essa causa, por tão grandes perdas logo nos primeiros annos da vida, ella fica mui diminuta em forças; e que suppostas faculdades iguaes entre essa, e outra qualquer Nação, que se ache com a mesma população, sempre ficará da parte da outra Nação a vantagem, que depender do effeito de hum maior numero de individuos empregados em acções do maior vigor. Varias couzas pudêra eu dizer a este respeito, mas tudo reduzirei aos ditos termos necessarios de huma só comparação. Pelo que ultimamente se tem observado em França se sabe, que ametade da população desse Reino se acha de vinte annos para cima, e a outra ametade dos mesmos annos para baixo; e pela Lista da mortalidade de Londres consta, que de 1280 pessoas, que nascem, passados vinte annos já não existem mais que 462, isto he, tão sómente a terça parte dos que vierão ao Mundo. Donde he facil de vêr as gravissimas perdas, que teria Inglaterra, se a população das outras Cidades, e a dos Campos soffrêra semelhantes estragos. Mas para que esses sejaõ já mui notaveis bastaráõ tão sómente os de Londres, onde de 800000 pessoas, que nascem, passados vinte annos, faltaõ

faltaõ 553517 , numero igual aos dois terços de toda a sua população , supposta esta de 800000 almas ; em lugar do que Paris , suppondo-lhe a mesma população , aproveitata nesse mesmo tempo mais de 150000 pessoas uteis aos empregos da Paz , e da Guerra.

Em fim pelo que manifestámos neste papel , que a população de qualquer Paiz he na razão directã da potencia de vida , e pelo que agora acabámos de mostrar , podemos seguramente fazer esta insolita proposição : Que as forças de hum Estado não se devem reputar pela sua actual população , como até hoje tem calculado todos os Autores de Economia politica , mas sim pelo numero de individuos capazes de o defender , ou de o servir nos empregos de vigor mais uteis : proposição que para ser admittida como certa , e infallivel não he preciso mais que annunciolla.

*Naõ tive tempo para acabar esta memoria como eu tinha pensado , e queria ; e fica para outra occasiã o tratar da Linha Curva das Economias politicas , cuja descripção com as instrucções do seu uso porã logo debaixo de huma simples vista as comparações , e correspondencias mais importantes sobre huma materia taõ util.*

N O T A:

Entre os papeis do Sr. José Joaquim Soares de Barros , se não achou copia , nem mesmo borraõ algum de Memoria , ou ourro qualquer genero de escrito , em que trarasse da Linha Curva , de que falla neste lugar : nem mesmo nos consta , que se achasse apontamento algum seu sobre esta materia.

Fig II



Fig. I



Fig. II



Fig. III

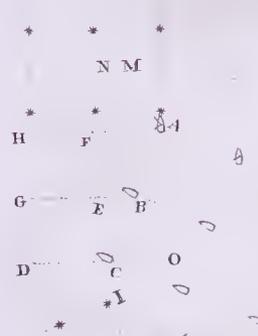


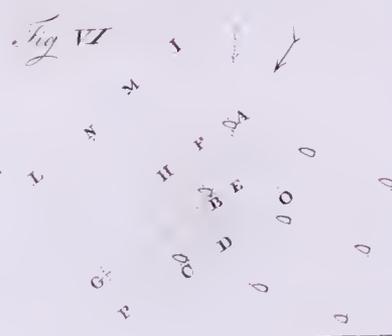
Fig. IV



Fig. V



Fig. VI



TABOA CONSTRUIDA SOBRE AS OBSERVAÇÕES DE BRESLAW

Idades.	Peſoas.	Mor- tos.	Potencia de vida.	Anno cli- maticos de	Idades.	Peſoas.	Mor- tos.	Potencia de vida.	Annos cli- maticos de	Annos cli- maticos para a Ci- dade de Londres.
1	1000									
2	855	145	6,89		43	417	10	41,70		12 p. <sup>a</sup> 13
3	798	57	21,00		44	407	10	40,70		20 p. <sup>a</sup> 21
4	760	38	24,00		45	397	10	39,70		24 p. <sup>a</sup> 25
5	732	28	27,14		46	387	10	38,70		29 p. <sup>a</sup> 30
6	710	22	33,27		47	377	10	37,70		39 p. <sup>a</sup> 40
7	692	18	39,44		48	367	10	36,70		75 p. <sup>a</sup> 76
8	680	12	57,66		49	357	10	32,37	49 p. <sup>a</sup> 50	
9	670	10	68,00		50	346	11	31,42		Anticlima- tericos.
10	661	9	74,44		51	335	11	30,46		
11	653	8	82,62		52	324	11	29,46		43 p. <sup>a</sup> 44
12	646	7	93,31		53	313	11	28,46	An. anticli- matico.	47 p. <sup>a</sup> 48
13	640	6	107,66	12 p. <sup>a</sup> 13	54	302	11	30,20	54 p. <sup>a</sup> 55	54 p. <sup>a</sup> 55
14	634	6	106,66		55	292	10	29,20		61 p. <sup>a</sup> 62
15	628	6	105,66		56	282	10	28,20		70 p. <sup>a</sup> 71
16	622	6	104,66		57	272	10	27,20		76 p. <sup>a</sup> 77
17	616	6	103,66		58	262	10	26,20		
18	610	6	102,66		59	252	10	25,20		
19	604	6	101,66		60	242	10	24,20		
20	598	6	100,66		61	232	10	23,20		
21	592	6	99,66		62	222	10	22,20		
22	586	6	98,66		63	212	10	21,20		
23	580	6	97,66		64	202	10	20,20		
24	574	6	96,66		65	192	10	19,20		
25	567	7	82,00	24 p. <sup>a</sup> 25	66	182	10	18,20		
26	560	7	81,00		67	172	10	17,20		
27	553	7	80,00		68	162	10	16,20		
28	546	7	79,00		69	152	10	15,20		
29	539	7	78,00		70	142	11	12,20	70 p. <sup>a</sup> 71	
30	531	8	67,38	29 p. <sup>a</sup> 30	71	131	11	11,91		
31	523	8	66,39		72	120	11	10,91		
32	515	8	65,38		73	109	11	9,91		
33	507	8	64,38		74	98	10	8,80		
34	499	8	63,36		75	88	10	7,80		
35	490	9	55,44	34 p. <sup>a</sup> 35	76	78	10	6,80		
36	481	9	54,44		77	68	10	6,80		
37	472	9	53,44		78	58	9	6,44		
38	463	9	52,47		79	49	8	6,12		
39	454	9	51,44		80	41	7	5,66		
40	445	9	50,44		81	34	6	5,60		
41	436	9	49,44		82	28	5	7,66	An anticli- matico.	
42	427	9	48,44		83	23			83 p. <sup>a</sup> 84	
		10	42,70	42 p. <sup>a</sup> 43	84	20	3			

## M E M O R I A

*Sobre o Restabelecimento da Quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento.*

POR MANOEL DO ESPIRITO SANTO LIMPO.

**P**OUcas luzes de Tactica Naval bastaõ para se reconhecer, que a maior difficuldade nesta Arte consiste no restabelecimento da ordem, depois de mutação de vento. Se as regras, que haõ de praticar-se em taes occasiões, não forem claras, e de facil, e prompta execucao, difficultosamente deixará de persistir por muito tempo a confusão, da qual resultará necessariamente ou retardação na expedição, a que se destina a Armada, ou consequencia ainda mais funesta, achando-se presente Armada inimiga de melhor disciplina. Estes inconvenientes haõ de infallivelmente repetir-se mais vezes se acontecer, que para o restabelecimento da formatura, em que mais frequentemente se navega, se prescrevaõ regras de semelhantes defeitos: esta formatura he sem dúvida a Quinta Ordem de Marcha, pois que as primeiras tres difficultaõ a communicação dos signaes por demasiadamente extensas, e a quarta exige tempo consideravel para se reduzir á ordem de batalha; e he com effeito para o restabelecimento da Quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento, que grande parte dos Tacticos tem proposito manobras longas, vagas, obscuras, difficeis, e erroneas. Eu mostrarei na primeira parte desta Memoria a verdade da ultima asserção, acrescentando as correções, de que algumas das ditas manobras são susceptiveis; e exporei na segunda os methodos verdadeiramente Geometricos, que propõe Mazaredo para restabelecer a Quinta Ordem de Marcha, havendo alar-

ga-

gado o vento; estabelecendo anticipadamente os principios, em que elles são fundados, por via de applicação da Algebra á Geometria, em lugar de usar de simplicies construcções geometricas, como o seu Inventor. Por este meio, sem dúvida mais fecundo, acharei facilmente mais verdades que aquellas, de que faz menção o dito Author.

## PRIMEIRA PARTE.

**M**Orogues, cuja authoridade entre os da profissão he bem notoria: Morogues, que se explica menos vagamente, e com mais clareza do que outros, manda manobrar no restabelecimento da Quinta Ordem de Marcha do mesino bordo, alterada por haver alargado o vento, da maneira seguinte:

I. » Si le vent vient peu de l'arriere (fig. I.), . . . . .  
 » la colonne du vent diminuera de voiles, celle du milieu  
 » conservera sa voilure, & la colonne de sous le vent for-  
 » cera de voiles. Le premier Vaisseau (A) de la colonne  
 » du vent tiendra le vent; & les têtes (B, C) des co-  
 » lonnes de sous le vent, observant leur distance, vien-  
 » dront insensiblement au lof en se tenant par le travers  
 » du chef de file du vent. Les Vaisseaux de chaque co-  
 » lonne ayant même voilure que le Vaisseau de leur tête, ou  
 » plus-tôt une voilure qui leur procure un sillage égal, se  
 » mettront successivement dans ses eaux. L'ordre rétabli,  
 » on corrigera les distances. »

II. » Mais si le vent vient beaucoup de l'arriere, . . . .  
 » la colonne du vent mettra en panne (fig. II, III, IV.).  
 » La colonne de sous le vent forcera de voiles dans la  
 » perpendiculaire à la nouvelle ligne du plus-près; &  
 » quand le Vaisseau (C) de la tête de cette colonne re-  
 » levera le chef de file (A) de la colonne du vent qui se-  
 » ra en panne, à 4 rumbs au vent de la ligne du plus-  
 » près, il reviendra tout à fait au lof (D), & sa colom-

» ne

» ne y viendra également au même point, & dans ses eaux.  
 » La colonne du milieu manœvrera de la même maniere  
 » que l'Escadre de sous le vent, observant de ne point  
 » parvenir au point (E), où son premier Vaisseau doit en-  
 » tierement venir au lof, avant que la tête de la colonne  
 » de sous le vent soit elle même parvenue au point, où el-  
 » le doit ferrer le vent; elle fera donc très petites voi-  
 » lés, & mettra même en panne s'il est nécessaire, en at-  
 » tendant que le chef de file (C) de sous le vent soit  
 » parvenu au point (G) par son travers, & alors les deux  
 » colonnes forceront également de voiles au plus-près. En  
 » fin lorsque les têtes (F, H) des colonnes de sous le  
 » vent tenant le vent, seront parvenues ensemble dans la  
 » perpendiculaire du plus-près par le travers du premier  
 » Vaisseau (A) de la colonne du vent; alors celle-ci fera  
 » servir dans la ligne de la panne, pour que ses Vaisseaux  
 » courent largue en se rendant dans les eaux de leur tête  
 » (A) qui tiendra le vent. Par cette manœuvre, qui est  
 » la moins longue, & la moins confuse qu'on puisse ex-  
 » cuter, les Vaisseaux ne perdront point au vent, & re-  
 » prendront aisément leur distance en se relevant. »

Por ventura por se distinguirem entre si as vozes *pou-  
 co*, e *muito* ficaõ por isso distinctos os dous casos, que se  
 consideraõ na soluçaõ precedente? E as idéas representadas  
 pelas mesmas duas vozes, naõ se referem ellas a huma uni-  
 dade, ou grandeza intermedia, que parece offerecer hum  
 terceiro caso? Ou se este terceiro caso se póde compre-  
 hender indifferentemente em qualquer dos outros dous, naõ  
 será necessario determinar o limite em augmento do *pouco*,  
 e o limite em diminuicaõ do *muito*, ao menos para distin-  
 çaõ delles?

Talvez se diga que quando se naõ especifica a unida-  
 de, a que se refere o pouco, e o muito, se deve enten-  
 der por termo de comparaçaõ o estado medio, que no caso  
 actual he de cinco quartas. Poderá tambem lembrar, que a  
 figura, a que o Author refere a descripçaõ da manobra  
 (fig.

(fig. I.), allás mostra, que o pouco não passa de  $15^\circ$ . Finalmente talvez lembre dizer, que não ha inconveniente em ampliar-se o muito, e diminuir-se o pouco como bem se quizer, e que por tanto não he indispensavel a determinação de seus limites.

Mas offercendo-se conjecturas tão diversas, a qual dellas se dará preferencia? A vacillação cessa por algum tempo, achando-se em Mazaredo estas palavras: *Alargandose el viento una cantidad pequena, que debe entenderse basta dos quartas, ò poco más.* Como porém a simples authoridade em cousas de razão he de pouco momento, brevemente se torna ao primeiro estado de dúvida. Com a luz da Geometria desapparecem por fim as trévas. Ella mostra, que a manobra mencionada em segundo lugar (II.) se não póde verificar em todas as suas partes, comprehendendo-se no *muito* quatro quartas; e que he absolutamente impossivel a sua execução, querendo-se comprehender no mesmo *muito* menos de  $45^\circ$ : consequentemente vem a ser quatro quartas o limite em augmento do pouco, e o limite em diminuição do muito para ser praticavel a doutrina de Morogues em todas as circumstancias. Ella mostra com igual evidencia, que as distancias das columnas se não alteraõ com a dita manobra havendo alargado o vento oito quartas, e que ficão diminutas havendo alargado mais ou menos de  $90^\circ$ , não obstante affirmar Mazaredo nos seus *Rudimentos de Táctica Naval*, que quando o vento alarga menos de oito quartas ficão as distancias das columnas com incremento. Passemos pois a manifestar estas verdades.

A figura II. representa a evolução para o caso, em que o vento tem alargado oito quartas. Será logo indicada a nova linha de bolina *AI*, ou *DL* pela linha de frente *CBA*; os chefes de fila *B, C* seguirão as suas derrotas *BE, CD*; e devendo ser em *D* o angulo *ADH* de  $45^\circ$  pela descripção da manobra (II.), e o angulo *CDH* de  $90^\circ$ , fieraõ os angulos *ADC, CAD* de  $45^\circ$  cada hum, e por consequencia  $CD = AC$ . Mas o angulo *CAH* he de  $90^\circ$ , por

dever considerar-se a quilha do navio atravessado  $A$  na linha de bolina  $AI$ : será logo a figura  $ACDH$  hum quadrado, e consequentemente  $AH = AC$ . Conserva pois neste caso a nova linha de frente  $AH$ , ou  $IL$  a extensão  $AC$ , que tinha antes da evolução.

A figura III. indica a evolução para o caso, em que o vento tem alargado seis quartas. Faltando pois duas quartas para  $90^\circ$ , formará a nova linha de bolina  $IAO$ , e suas paralelas  $BM, CN, EF, DL$  hum angulo de duas quartas com a linha de frente  $ABC$ , e consequentemente, caminhando os chefes de fila  $B, C$  pelas rectas  $BG, CD$  perpendiculares a  $DL$ , podem chegar a pontos  $D, E$ , nos quaes se verifique a condição, que exige a manobra (II.), de serem os angulos  $ADH, AEF$  de  $45^\circ$  cada hum. A figura  $AHDO$  he hum quadrado, cujo lado  $AO$  he menor que a recta  $AC$ , por ser  $AC$  hypothenuza do triangulo rectangulo  $ACO$ : terá logo a nova linha de frente  $AH$ , ou  $IL$  extensão menor que a primitiva, e não maior, como affevera Mazaredo quando diz: *Porque saldrá mal en otro qualquiera, quedando demasiado abiertas las columnas, si es menor de las ocho quartas, y demasiado cerradas siendo mayor* [Rudimentos de Tactica Naval, n. 237. pag. 154.].

A mesma manobra se verifica em todas as suas partes (e tambem a mesma propriedade) quando o vento alargá menos ou mais de seis quartas, dentro dos limites quarta e sinco, e noventa grãos. Havendo porém alargado só quatro quartas (fig. V.) formará a nova linha de bolina  $IAO$ , e suas paralelas  $BF, CL$  hum angulo de  $45^\circ$  com a linha de frente  $ABC$ ; e consequentemente deverá orçar, e cingir logo o vento o testa de columna  $C$ , e a columna do centro deve logo atravessar juntamente com a de barlavento. Não tem pois lugar neste caso aquella parte da manobra, em que se ordena que as duas columnas de sotavento caminhem pela perpendicular á nova linha de bolina. As distancias das columnas ficão diminutas por ser o lado  $AO$  de hum quadrado menor que a sua diagonal  $AC$ .

Se

Se o vento alargar menos de quatro quartas he impossivel a execucao da manobra. A figura VI. representa o caso, em que o vento alarga tres quartas. Faltando pois cinco quartas para  $90^\circ$ , formará a nova linha de bolina  $IAO$ , e suas parallelas  $EF$ ,  $BM$ ,  $DH$ ,  $CN$ ,  $PL$  hum angulo de cinco quartas com a linha de frente  $ABC$ ; e consequentemente, caminhando os chefes de fila  $B$ ,  $C$  pelas direccões  $BG$ ,  $CP$  perpendiculares a  $PL$ , se apartaráo cada vez mais das situações  $E$ ,  $D$ , em que se verifica a condição que exige a manobra (II.) de serem os angulos  $ADH$ ,  $AEF$  de  $45^\circ$  cada hum. Seria pois necessario que seguissem rumo opposto  $BE$ ,  $CD$  para conseguirem os lugares  $D$ ,  $E$ . Mas sendo na hypothese actual os angulos  $ACN$ ,  $ABM$  de cinco quartas cada hum, será cada hum dos angulos  $ACO$ ,  $ABE$  de tres quartas, e por consequencia distará o dito rumo  $BE$ ,  $CD$  só duas quartas da nova origem do vento: he logo rumo do *espaço indirecto*, do *espaço cruzado*, do *espaço não graduado*, ou da *parte difficil do horizonte*, adoptando a linguagem de Grenier [*L'Art de la Guerre sur Mer.*], e por consequencia não sendo possivel dar por elle seguimento aos navios, he erronea neste caso a regra que assim o prescreve, como tambem naquelles, em que o vento alargar menos de tres quartas, ou mais de tres, sem chegar a quatro.

A figura IV. representa a evolucao para o caso, em que o vento tem alargado nove quartas. Havendo pois huma quarta de excesso sobre  $90^\circ$ , formará a nova linha de bolina  $BM$ , e suas parallelas  $CN$ ,  $IAO$ ,  $EF$ ,  $DL$  com a linha de frente  $ABC$  hum angulo de  $11^\circ 15'$ , e outro tanto háo de notar os navios  $B$ ,  $C$  marcando o testa  $A$  da columna de barlavento: demora logo este no principio da evolucao huma quarta  $ABM$ ,  $ACN$  a sotavento da nova linha de bolina relativamente aos testas  $B$ ,  $C$  das columnas de sotavento. Caminhando porém os dous ultimos pelas rectas  $BG$ ,  $CD$  perpendiculares á nova linha de bolina  $DL$ , como prescreve a regra (II.), podem chegar a pontos  $D$ ,  $E$ , em os quaes

quaes o navio *A* lhes demore quatro quartas *AEF*, *ADH* a barlavento da nova linha de bolina. A figura *AHDO* he hum quadrado, cujo lado *AO* he menor que *AC*, e por effa razão a nova linha de frente *AH*, ou *IL* tem menor extensão que a primitiva *AC*.

Da illustração precedente se conclue facilmente, que he de absoluta necessidade determinar o pouco (I), e o muito (II.) da regra de Morogues, e acrescentar o caso intermedio, para que o seu methodo seja praticavel no todo, ou só em parte em quaesquer circumstancias da queftão actual: devem logo considerar-se os tres casos seguintes:

I. Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento menos de quatro quartas.

II. Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento mais de quatro quartas.

III. Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento quatro quartas.

No primeiro caso, pôde manobrar-se como prescreve Morogues para quando o vento alarga pouco; no segundo, como estabelece para quando o vento alarga muito; e no terceiro, da mesma forte que no segundo, supprimindo-se aquella parte da regra, em que se ordena, que os testas das duas columnas de sotavento naveguem por direcções perpendiculares á nova linha de bolina, sendo seguidos pelos demais navios das mesmas columnas por movimento successivo.

A pezar das precedentes correcções se não consegue dar perfeição ao methodo que Morogues nos propõe. Se o vento alarga entre duas, e quatro quartas, tem os navios das duas columnas de sotavento que correr arcos consideraveis antes de ganharem o travez dos seus correspondentes da columna de barlavento; e se não he muito facil conservar os navios em seguimento por hum rumo determinado, como vem advertido no num. 35 do *Compendio de Manobra de Navio*, que dei á luz para instrucção dos Alumnos da Real Academia da Marinha, mais difficil será fem dú-

dúvida conservar regularidade por caminho curvelíneo (\*). Esta he, certamente, a razão, por que Mazeredo não entende o *pouco* senão a algum tanto mais que duas quartas, ainda que não adverte no impossível que se segue de incluir no *muito* menos de quatro. Será logo mais conveniente manobrar nestas circumstancias como no ultimo dos tres casos, considerados precedentemente; e por tanto deve a questão dividir-se, e resolver-se da fórma seguinte.

I. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento não mais de duas quartas.*

II. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento mais de quatro quartas.*

III. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento mais de duas quartas, sem passar de quatro.*

No primeiro caso se manobra como determina Morogues para quando o vento alarga pouco. No segundo como prefereve para quando o vento alarga muito. E no terceiro da mesma sorte que no segundo, supprimindo-se parte da manobra, como já fica advertido; isto he: as duas columnas de barlavento atravessaõ; o testa da columna de sotavento cinge o vento, e he seguido por movimento successivo pelos demais navios da sua columna; e quando o dito testa chega a pôr-se pelo travez do chefe de fila da columna do centro, marêa este á bolina, e he seguido pelos demais navios da sua columna por movimento successivo: a columna de barlavento se regula pelas outras duas, como a do centro se regulou pela de sotavento. As duas columnas de sotavento restabelecem as distancias. [*L'Art des Armées Navales par le P. Hoste, Troisième Partie, §. V., II., Remarque 1.*]. Se Morogues que soube, fallando geral-

Tom. II.

Oooo

ral-

(\*) Considero o horizonte como hum circulo, em cujo centro se acha o navio, e os rumos como outros tantos raios do mesmo circulo: por tanto supponho nulla a curvatura dos arcos, por que caminhaõ os navios, quando seguem o mesmo rumo. Esta supposição he admissivel no espaço a que se pôde estender huma evolução.

ralmente, distinguir no Tratado do P. Hofte o verdadeiro util do desnecessario, o luxo da theorica do indispensavel na prática, deixou de adoptar nas circumstancias do terceiro caso este modo de manobrar, foi certamente porque se persuadio da generalidade do methodo, que nos propôs para quando o vento alarga *muito* (II.), e não por querer estender o *pouco* (I.) a quatro quartas; porque tal intensão não pôde haver sem se reconhecer o impossivel que patenteámos, e occultallo depois de reconhecido seria indefculpavel.

Naõ seria tambem defacerto subdividir o segundo caso em tres, attendendo a que nelle tem humas vezes os testas das duas columnas de sotavento que arribar do alinhamento primitivo de bolina das suas respectivas esquadras, outras que orçar, e outras em fim em que tem que continuar as suas derrotas para se dirigirem aos lugares, aonde devem cingir o vento. Desta sorte ficaria a questãõ dividida como se segue:

- 1.º Restabelecer a *Quinta Ordem de Marcha da mesma amura*, havendo alargado o vento não mais de duas quartas.
- 2.º Restabelecer a *Quinta Ordem de Marcha da mesma amura*, havendo alargado o vento oito quartas.
- 3.º Restabelecer a *Quinta Ordem de Marcha da mesma amura*, havendo alargado o vento mais de oito quartas.
- 4.º Restabelecer a *Quinta Ordem de Marcha da mesma amura*, havendo alargado o vento entre oito e quatro quartas.
- 5.º Restabelecer a *Quinta Ordem de Marcha da mesma amura*, havendo alargado o vento mais de duas quartas sem passar de quatro.

No 1.º e 5.º caso não ha que advertir. No segundo porém devem os testas das duas columnas de sotavento seguir as suas derrotas até aos pontos, em que se haõ de pôr a bolina na conformidade da regra de Morogues para quando o vento alarga muito (fig. II.).

No terceiro orçãõ os ditos testas quanto for o excessivo

fo da quantidade, que o vento tiver alargado, sobre oito quartas (fig. IV.).

No quarto finalmente devem arribar quanto oito quartas excederem a quantidade, que o vento houver alargado (fig. III.).

Depois de tantas, e taõ necessarias correccões, está bem longe de merecer toda a approvaçãõ semelhante modo de manobrar. Se o vento alarga naõ mais de duas quartas, tem os navios das duas columnas de sotavento que caminhar por arcos, antes de ganharem o travez dos seus correspondentes da columna de barlavento; e se o vento alarga entre duas e oito quartas, ou mais de oito, ficaõ as distancias das columnas diminutas: e ainda que na prática seja facil corrigir tal defeito, como affirma Morogues, quando diz: *Et reprendront aisement leur distance en se relevant* (II.), com tudo em rigotosa theorica he intoleravel. Além disso, a generalidade de humia evoluçãõ he que lhe dá toda a elegancia, a facilidade, e promptidaõ lhe fazem merecer toda a preferencia. No methodo precedente devem considerar-se ao menos tres casos, que exigem tres modos diversos de manobrar: naõ he logo geral. Quando o vento alarga oito quartas, o chefe de fila *C* (fig. II.) de sotavento tem que caminhar, antes de se restabelecer a formatura, pelas rectas *CD*, *DL*, cuja somma he quasi igual á extensaõ das tres columnas; he logo nimiamente vagarosa a evoleçãõ neste caso, como tambem naquelles, em que o vento alargar mais de oito quartas. E se o vento alarga quatro quartas, ou entre quatro e oito naõ fica, certamente, expedita; pois que no primeiro caso tem que correr o chefe de fila *C* (fig. V.) da columna de sotavento mais de ametade da extensaõ da Armada, antes do restabelecimento da ordem, por ser o lado *CH* do quadrado *AHCO* maior que ametade do comprimento de humia columna, como he facil de reconhecer, representando por *a* o comprimento de humia columna, por *x* o lado do quadrado *AHCO*, e advertindo que a linha de frente *AC* he  
 igual

igual a  $\frac{5}{6}a$  [*Tactique Navale de Morogues*, I. *Partie*, *Chap.* II. n. 28.], donde se deduz  $x = \frac{5a}{\sqrt{72}}$ ; e no segundo caso tem que caminhar espaços ainda maiores, chegando estes a ser em algumas circumstancias pouco menores que a extensaõ das tres columnas: não tem logo prometidaõ. Este he com tudo aquelle methodo de que Morogues affirma ser o mais curto, quando diz: *Par cette manœuvre, qui est la moins longue, & la moins confuse qu'on puisse executer*, &c. (II.). Passemos a expôr os de Mazarredo, para que cada hum delles se possa confrontar com as manobras precedentes.

---

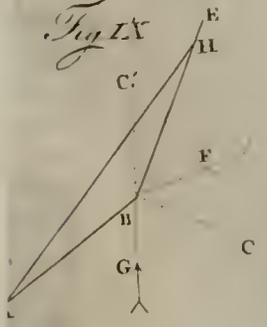
## S E G U N D A P A R T E.

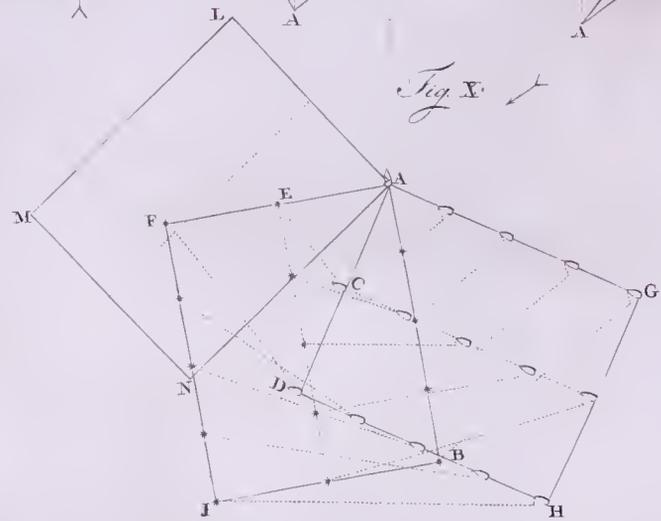
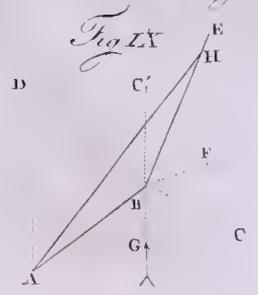
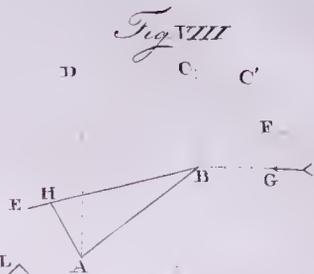
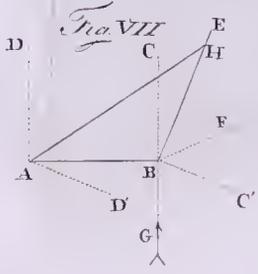
**M**Azaredo, que tambem não adopta o methodo, que acabei de analyzar, não por haver conhecido o impossivel que se encontra na manobra em alguns casos, mas tão sómente pela razaõ de se alterarem por via delle as distancias das columnas, ainda que a alteraçãõ, que ellas soffrem, quando o vento alarga menos de oito quartas, se lhe representasse de huma maneira erronea, nos propõe dous modos de manobrar no restabelecimento da Quinta Ordem de Marcha, depois de haver alargado o vento, que merecem sem dúvida toda a preferencia. A excellencia de hum delles consiste em caminharem os navios directamente para os lugares, que haõ de occupar na nova formatura; e os principios, em que ambos se fundaõ, saõ os seguintes:

### I. P R I N C I P I O.

*Caminhando á bolina dous navios em linha de travez, e havendo se esta alterado por ter alargado o vento, restabelecer-se-ha o dito travez de bolina, em igual distancia, para se na-*

Fig LX





regar com amuras do mesmo lado, atravessando o navio que se achava a barlavento antes da mudança do vento, e seguindo o outro hum rumo, que disse igualmente da primitiva, e da nova linha de bolina.

Seja *A* (fig. VII.) o navio que estava a sotavento antes da mudança do vento, *B* o de barlavento; *AD*, *BC* o rumo de bolina primitivo perpendicular á linha de travez *AB*; *F* a origem primitiva do vento, e *G* o ponto para onde se suppõe ter elle alargado. Forme-se no ponto *B* da recta *BG* o angulo *C'BG* igual a seis quartas, e tire-se do ponto *A* a recta *AD'* parallelá a *BC'*: levante-se do ponto *B* a recta *BE* perpendicular a *BC'*, corte-se della a parte *BH* igual a *AB*, e tire-se a recta *AH*.

Sendo por construcção *BC'*, ou *AD'* o novo rumo de bolina, e *BH*, que he igual a *AB*, a nova linha de travez, será *AH* o rumo que deve seguir o navio *A* para restabelecer o travez de bolina com o navio *B*, em distancia *BH*, igual á primitiva *AB*.

Represente *m* a mudança angular do vento *FBG*, ou *ABH*; *x* o angulo *BAH*, ou *AHB*: será  $2x + m = 16$  quartas, e  $x = 8$  quartas  $-\frac{1}{2}m$ . Mas he o angulo *BAD* = 8 quartas: logo o angulo *DAH* será igual a 8 quartas  $-\left(8$  quartas  $-\frac{1}{2}m\right) = \frac{1}{2}m$ , como se queria demonstrar.

### COROLLARIOS.

1.º Pelo mesmo methodo poderão os navios *A*, *B* restabelecer o travez de bolina, em distancia igual, para navegarem amurados do outro lado, quando o vento houver escaccado. Virarão de bordo simultaneamente, suppor-se-ha que se seguia á bolina rumo opposto ao primitivo, e se acharão no caso do *Principio* estabelecido: o navio *B* será eixo do movimento.

2.º Se o vento salta para o outro bordo; e depois de suppor-se, que se navegava á bolina com amuras contrarias, se deva considerar o vento como havendo alargado, po-

dem pelo mesmo methodo os navios *A, B* restabelecer o travez de bolina, em distancia igual, para navegarem amurados do outro lado. Supponha-se que se navegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas, faça-se *A* eixo do movimento, e manobre o navio *B* como manobrou o navio *A* no caso do Principio.

3.º Se o vento falta para o outro bordo, e depois de suppor-se que se navegava á bolina com amuras contrarias, se deva considerar o vento como havendo escaceado, podem os navios *A, B* restabelecer pelo mesmo methodo o travez de bolina, em igual distancia, para navegarem amurados do mesmo lado. Viraráõ de bordo simultaneamente, suppor-se-ha que se seguia á bolina rumo opposto ao primitivo, e se acharáõ no caso do Principio demonstrado: o navio *A* será eixo do movimento.

## II. P R I N C I P I O .

*Se dous navios navegarem á bolina não em linba de travez, mas sim indo o de barlavento mais adiantado que o de sotavento em alinhamento tal, que forme constantemente o mesmo angulo agudo com a direcção de bolina, que segue o navio de sotavento, e havendo-se este alterado por ter alargado o vento, restabelecer-se-ha o dito alinhamento, ou o dito angulo agudo, em distancia igual, para se navegar com amuras do mesmo lado, atravessando o navio que se achava a barlavento antes da mudança do vento, e arribando o outro [quando não seja necessario orçar, ou continuar a mesma derrota] da sua primeira linba de bolina oito quartas, menos o angulo agudo mencionado, e menos ametade da mudança angular do vento.*

Seja *B* (fig. VIII.) o navio que estava a barlavento antes da mudança do vento, *A* o de sotavento; *AD, BC* o rumo primitivo de bolina, que fórma com o alinhamento *AB* dos dous navios o angulo *BAD* agudo, e o angulo *ABC* obtuso, supplementos entre si; *E* a origem primitiva do vento, e *G* o ponto para onde se suppõe ter elle alargado.

do. Forme-se no ponto  $B$  da recta  $BG$  o angulo  $CBG$  de seis quartas, e no ponto  $B$  da recta  $BC$  faça-se o angulo  $CBE$  igual ao angulo  $ABC$ : corte-se da recta  $BE$  a parte  $BH$  igual a  $AB$ , e tire-se a recta  $AH$ .

Sendo por construcção  $BC'$  o novo rumo de bolina; e estando  $BH$ , que he igual a  $AB$ ; inclinada sobre  $BC$ ; como  $AB$  sobre  $BC$ , será  $AH$  o rumo que deve seguir o navio  $A$  para restabelecer em  $H$  o seu alinhamento primitivo com  $B$ , relativamente á linha de bolina; em distancia igual  $BH$ .

Represente  $m$  a mudança angular do vento  $FBG$ , ou  $ABH$ ;  $x$  o angulo  $BAH$ , ou  $AHB$ ; e  $r$  o angulo ágado  $BAD$ , de que se fez menção no enunciado do Principio actual: será  $2x + m = 16$  quartas, e  $x = 8$  quartas  $-\frac{1}{2}m$ : he logo o angulo  $DAH = 8$  quartas  $-r - \frac{1}{2}m$ ; como se queria demonstrar.

#### C O R O L L A R I O S .

1.º A expressão do angulo  $DAH$  indica que o navio de sotavento  $A$  (fig. IX.) deve orçar, em lugar de arribar, quando os termos negativos  $-r - \frac{1}{2}m$  derem huma somma que exceda o valor do termo positivo 8 quartas; e tanto quanto for o dito excesso.

2.º Ella mostra igualmente que o navio de sotavento  $A$  deve continuar a sua derrota primitiva quando  $-r - \frac{1}{2}m$  for igual a 8 quartas.

3.º Tambem se deduz da mesma expressão, que quando  $r$  for igual a 8 quartas deve orçar o navio de sotavento a metade da mutação angular do vento, o que concorda com o I. Principio (\*).

4.º

---

(\*) Ainda que o primeiro Principio seja hum Corollario do segundo, eu estabeleci aquelle independentemente deste; não tanto por imitar Maszaredo, como por ter que deduzir do primeiro alguns Corollarios, dous dos quaes não podem verificar-se sempre no segundo Principio, como se adverte no 4.º Corollario, que agora se segue.

4.º Ella mostra com igual clareza, que quando  $r$  for maior que 8 *quartas*, deve necessariamente orçar o navio de sotavento, pois que então se verifica, como no Corollario precedente, o que se advertio no 1.º Corollario. Mas na hypothese actual, não he sempre praticavel o restabelecimento do alinhamento primitivo dos dous navios pelo methodo prescrito; porque o navio de sotavento não pôde orçar, para pôr-se em seguimento, mais do que a mudança angular do vento: determinemos pois a condiçãõ dos casos possiveis.

Pelo Corollario primeiro tem que orçar o navio de sotavento a quantidade angular  $r + \frac{1}{2}m - 8$  *quartas*: logo  $r + \frac{1}{2}m - 8$  *quartas* não  $> m$ , ou  $r$  não  $> 8$  *quartas*  $+ \frac{1}{2}m$  he a condiçãõ, que deve verificar-se para que o caso seja possível.

## E X E M P L O S.

Seja  $r = 9$  *quartas*, e  $m =$  *humã quarta*. Feita a substituiçãõ ter-se-ha 9 *quartas* não  $> 8$  *quartas e meia*; o que he absurdo.

Seja  $r = 9$  *quartas*, e  $m = 10$  *quartas*. Feita a substituiçãõ ter-se-ha 9 *quartas* não  $> 13$  *quartas*: he logo possível.

Seja  $r$  não  $> 90^\circ$ ; será necessariamente  $r$  não  $> 8$  *quartas*  $+ \frac{1}{2}m$ : he por tanto caso possível.

5.º Se na mesma expressãõ do angulo *DAH* (fig. VIII.) supposermos  $r = 0$ , o que se verifica quando o navio *A* for nas agoas do navio *B*, ter-se-ha  $DAH = 8$  *quartas*  $- \frac{1}{2}m$ ; e por tanto deve entãõ arribar o navio *A* do seu alinhamento primitivo com *B*, oito *quartas*, menos ametade da mutaçãõ angular do vento; o que concorda exactamente com humã das regras, que se costumãõ prescrever nos livros de *Tactica Naval*, para se restabelecer a Ordem de Batalha da mesma amura, depois de haver alargado o vento.

Estabelecidos pois os dous Principios, e seus Corollarios,

rios, passarei agora a expôr os Methodos de Mazaredo, fazendo anticipadamente huma advertencia.

### A D V E R T E N C I A .

Quando o vento alargar (o que se entende até dez quartas), ou escacear (o que se entende até seis), direi que o vento alargou, ou escaceou no primeiro meio círculo; e quando o vento saltar para o outro bordo, direi que alargou, ou escaceou no segundo meio círculo, conforme o vento se puder considerar como havendo alargado, ou escaceado, suppondo-se, que se navegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas. Desta maneira se podem enunciar os diversos casos clara, e distinctamente.

### PRIMEIRO METHODO.

O primeiro methodo de Mazaredo, que, ainda que geral na theoria, não deve com tudo estender-se na prática a mais de cinco quartas, póde applicar-se, dando-lhe por outra parte a ampliação possível, aos quatro casos seguintes.

#### I. C A S O .

*Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento no primeiro meio círculo não mais de cinco quartas.*

O chefe de fila *A* (fig. X.) da columna de barlavento atravessa, e os demais navios da mesma columna arribam oito quartas, menos ametade da mudança do vento (Cor. 5.º do II. Princ.), para irem metter-se com *A* na nova linha de bolina *AB*, aonde atravessam. Os chefes de fila *C, D* das columnas de sotavento restabelecem o travez de bolina com o de barlavento *A*, seguindo o rumo *CE, DF*, que dista igualmente da primitiva, e da nova linha de bolina (I. Princ., ou Cor. 3.º do II. Princ.): os demais navios, havendo no-

tado cada hum delles a que rumo lhe demora o eixo da evoluçãõ *A*, como todos se achavaõ a sotavento, antes da mudança do vento, e mais atrazados relativamente ao mesmo eixo, manobraõ huns na conformidade do II. Principio, arribando da sua primeira linha de bolina oito quartas, menos o angulo agudo (*r*), menos ametade da mudança do vento; outros orçando quanto oito quartas forem excedidas pelo angulo agudo (*r*), sommado com ametade da mudança do vento, se o caso o pedir; advertindo que a arribada, ou a orçada he nulla nas circumstancias mencionadas no Corollario 2.º do segundo Principio. A' medida que os navios vãõ chegando aos seus lugares atravessãõ, para esperarem que o cabo de fila *H* da columna de sotavento chegue a alcançar o seu, fazendo força de véla: logo que o confegue marçãõ todos á bolina com as amuras primitivas.

## II. C A S O.

*Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo alargado o vento no segundo meio círculo não mais de cinco quartas.*

Supponha-se que se nevegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas, e manobre-se como no caso precedente, sendo eixo da evoluçãõ o Chefe de fila *D* da columna, que estava a sotavento antes da mudança do vento.

## III. C A S O.

*Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo esfaceado o vento no primeiro meio círculo não mais de huma quarta.*

Todos os navios víraõ de bordo simultaneamente; supõe-se que se seguia á bolina rumo opposto com amuras contrarias ás primitivas: e manobre-se como no primeiro caso, sendo eixo da evoluçãõ o navio *G*, que era cabo de

fila da columna de barlavento , antes de se ter virado de bordo.

#### IV. C A S O.

*Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura havendo escaceado o vento no segundo meio círculo não mais de huma quarta.*

Todos os navios virão de bordo simultaneamente ; supõe-se que seguia á bolina rumo opposto com as amuras primitivas ; e manobra-se como no primeiro caso , sendo eixo da evoluçãõ o navio *H* , que era cabo de fila da columna *DH* , que actualmente se acha a barlavento , antes de se haver virado de bordo.

#### E S C O L I O:

Se o vento alarga no primeiro meio círculo menos de quatro quartas , he possível , e poderá ser conveniente manobrar como se disse no III. caso. Se alarga menos de quatro quartas no segundo meio círculo he possível , e poderá ser vantajoso manobrar como no IV. caso. Se o vento alargar quatro quartas seja no primeiro , ou no segundo meio círculo , virando simultaneamente de bordo todos os navios , e pondo-se todos logo á bolina , ficará a ordem restabelecida. Se o vento saltar para além da prôa seis quartas , basta mudar de amuras para a ordem se restabelecer.

Este he o methodo mais prompto , que póde imaginar-se para se restabelecer a Quinta Ordem de Marcha , alterada por haver alargado o vento não mais de cinco quartas ; pois que o caminho mais curto entre dous pontos he o rectilíneo ; e a recta que se tirar do lugar , que hum navio occupa no principio de huma evoluçãõ , para o que deve occupar depois della executada , he sensivelmente a mesma cousa que o arco de Loxodromia , ou de círculo maximo comprehendido entre os ditos lugares. Eu não fiz mais do que dar huma fórma mais regular aos Principios ,

pios, em que elle he fundado; pôr em equação o angulo *DAH* (fig. VII, VIII.) com a sua expressão para deduzir facilmente as consequencias que o Author menciona, e outras não de menos importancia, como as do 4.º, e 5.º corollario do II. Principio; e dizer de que maneira se estende a applicação do dito methodo aos casos, em que o vento alarga no segundo meio círculo não mais de cinco quartas, como tambem a aquelles, em que o vento escacêa no primeiro, ou no segundo meio círculo não mais de huma quarta.

Fiz esta applicação do primeiro methodo de Mazaredo aos casos, em que o vento escacêa não mais de huma quarta em hum, ou outro meio círculo, não tanto para se praticar em taes occasiões, como para descrever a manobra, a que algumas vezes se deve dar preferencia alargando o vento entre duas e quatro quartas, ou menos, seja no primeiro, ou no segundo meio círculo, como advertí no Escolio, e para repetir mais vezes, que o dito methodo se não deve adoptar quando o vento alarga mais de cinco quartas em qualquer dos meios circulos.

A fig. X. representa distinctamente a evolução no caso de haver alargado o vento cinco quartas no primeiro meio círculo. O rectangulo *AGHD* indica a formatura primitiva, *AFIB* mostra a ordem restabelecida. A recta *HI*, medida da duração da manobra, he pouco maior que o comprimento de huma columna. Os navios não se confundem nos seus movimentos, e nenhum delles se vê precisado a separar-se do seu rumo para não atracar com outros. Não succederia porém a mesma cousa querendo-se applicar o mesmo methodo, ainda que geral na theoria, a seis, e mais quartas.

O rectangulo *ALMN* representa a ordem restabelecida, depois da alteração occasionada por haver saltado o vento para a poppa. A distancia *HM*, que mede o tempo da evolução, he pouco maior que o comprimento de duas columnas. Mas seria necessario que a materia fosse pe-

netravel para que alguns navios já atravessados, ou proximos a atravessár nos seus respectivos lugares; não obstafem ás derrotas que outros seguem, dirigindo-se para os seus lugares, que se achão mais remotos. E querendo-se evitar semelhante inconveniente, proporcionando cada hum dos navios o seu panno á distancia que tem que correr, persistiria sempre constrangimento nos movimentos, confusão na evoluçãõ, e risco de abordagens. Para evitar estes inconvenientes se faz indispensavel outro modo de manobrar quando o vento alargar mais de cinco quartas.

## SEGUNDO METHODO.

Pelo segundo methodo de Mazaredo se restabelece a Quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento, atravessando a columna de barlavento para esperar, que os testas das columnas de sotavento restabeleçaõ o tra-vez de bolina com o chefe de fila da de barlavento, caminhando cada hum delles pelo rumo medio entre a primitiva, e a nova linha de bolina, na conformidade do *Principio*, e sendo seguidos por movimento successivo pelos demais navios das columnas respectivas. Este segundo methodo, ainda que geral, tanto na theorica, como na prática; deve adoptar-se sómente quando o vento alargar mais de cinco quartas, e só pela razão de não ser entãõ conveniente a prática do primeiro, que he o mais curto de quantos podem imaginar-se. Os quatro casos considerados acima, por occasiãõ do primeiro methodo, offerecem outros quatro ao segundo.

### I. C A S O.

*Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento mais de cinco quartas no primeiro meio círculo.*

A columna de barlavento *AD* (fig. XI.) atravessa; os

testas  $B, C$  das columnas de sotavento caminhaõ (forçando de véla o ultimo  $C$ ) pelo rumo medio  $BE, CF$  entre o primitivo  $BG, CH$ , e novo rumo de bolina  $AI$ , e faõ seguidos por movimento successivo pelos demais navios das suas columnas  $BG, CH$ ; e quando os ditos testas  $B, C$  chegaõ aos pontos  $E, F$ , aonde restabelecem o travez de bolina com o testa  $A$  da columna atravessada (I. Princ.), cingem todos tres o vento, e faõ seguidos por movimento successivo pelos demais navios das columnas respectivas.

## II. C A S O.

*Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo alargado o vento no segundo meio círculo mais de cinco quartas.*

Supponha-se que se navegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas, e manobre-se como no caso precedente, sendo eixo no restabelecimento do travez de bolina dos tres chefes de fila  $A, B, C$ ; o testa  $C$  da columna, que estava a sotavento antes da mudança de vento.

## III. C A S O.

*Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo escaccado o vento no primeiro meio círculo mais de huma quarta.*

Todos os navios víraõ de bordo simultaneamente: supõe-se que se seguia á bolina rumo opposto com amuras contrarias ás primitivas; e manobra-se como no primeiro caso, sendo eixo no restabelecimento do travez de bolina dos tres novos chefes de fila  $D, G, H$ , o testa  $D$ , que era cabo de fila da columna de barlavento antes de se ter virado de bordo.

## IV.

## IV. C A S O.

*Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo escaceado o vento no segundo meio círculo mais de huma quarta.*

Todos os navios víraõ de bordo simultaneamente; supõe-se que se seguia á bolina rumo opposto com as amuras primitivas; e manobra-se como no primeiro caso, sendo eixo no restabelecimento do travez de bolina dos tres novos chefes de fila *D, G, H*, o testa *H*, que era cabo de fila da columna *CH*, que actualmente se acha a barlavento, antes de se haver virado de bordo.

## E S C O L I O.

Se o vento falta para a pôppa, como entaõ se póde considerar o vento como havendo alargado no primeiro, ou no segundo meio círculo, manobrar-se-ha como no I., ou no II. caso, conforme for conveniente. Se falta para a prôa, póde manobrar-se como no III., ou IV. caso, pois que entaõ se póde considerar o vento como havendo escaceado no primeiro, ou no segundo meio círculo.

Ainda que fiz applicação do segundo methodo de Mazaredo ao terceiro, e ao quarto caso, em que o vento se suppõe haver escaceado mais de huma quarta em hum, ou outro meio círculo, naõ he minha intençaõ preferir a prática delle em taes circumstancias, assim como a naõ tive de adoptar o primeiro methodo, quando o appliquei aos casos, em que o vento se suppoz ter escaceado naõ mais de huma quarta em qualquer dos meios circulos: a manobra que prescreve Morogues para se restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, alterada por haver escaceado o vento [ *Tactique Navale*, I. *Partie*, *Chap. IX. n. 80.* ], he afsaz facil, e prompta, naõ obstante haverem-se de restabelecer os traveztes dos navios correspondentes, e as distancias

cias das columnas tornadas diminutas. Só tive por fim principal apontar os casos, em que se podem adoptar, sem inconveniente, os ditos methodos, os quaes prefiro ás regras, que referi na Primeira Parte desta Memoria, por prefererem manobras, que tem os caracteres, que constituem huma evoluçãõ perfeita, quaes sãõ *Facilidade*, *Exacçãõ*, *Promptidaõ*, *Generalidade*.

Com effeito no primeiro methodo de Mazaredo ha *facilidade*; porque cada navio segue hum rumo determinado, sem que vá confundir-se com outros navios, alargando o vento naõ mais de cinco quartas, que he o caso em que elle he adoptado. Ha *exacçãõ*; porque as distancias das columnas naõ sãõ alteradas. Ha *promptidaõ*, e a maior que he possivel; porque os navios caminhaõ directamente para os lugares, que haõ de occupar na nova formatura. He *geral* na theoria; e na prática só está sujeito a inconveniente, e naõ a impossivel absoluto, quando o vento alarga mais de cinco quartas.

O segundo methodo de Mazaredo tem *facilidade*, naõ só porque os navios seguem determinado rumo, mas tambem porque basta que cada hum dos testas das columnas tenha cuidado em caminhar exactamente pelo rumo devido, pois que os demais navios das columnas respectivas vãõ metter-se nas suas agoas por movimento successivo. Tem *exacçãõ*; porque as distancias das columnas naõ sãõ alteradas. Tem *promptidaõ*: elle he pelo menos mais curto, do que aquelle que prescreve Morogues para quando o vento alarga muito, se o vento alargar mais de cinco quartas, que he o caso em que elle he adoptado. He *geral* tanto na theoria, como na prática, ainda que se naõ adopte quando o vento alarga naõ mais de cinco quartas, por se dar entãõ preferencia ao primeiro como mais expedito.

Finalmente naõ póde obstar ao primeiro methodo de Mazaredo dizer-se, talvez, que para elle ser excluido da prática basta a obrigaçãõ, que se impõe aos Officiaes, de terem sempre presentes os rumos, a que lhes demoraõ,

ou

ou devem demorar os eixos da evolução  $A, D, H, G$  (fig. X.), assim como tambem os termos da expressãõ 8 *quartas*  $-r - \frac{1}{2}m$ , de que nem todos poderãõ fazer uso. Porque além de baf-tarem olhos para se distinguir na bussola a que rumos demoraõ os objectos, e de ser facil de traduzir em lingua-gem vulgar a dita expressãõ, como se vê no primeiro caso das applicações do sobredito methodo; pelas sábias prõvi-dencias de S. MAGESTADE na creaçãõ de duas Acade-mias de Marinha, e pelo zelo, que anima todo o Corpo da nossa Marinha Real, podem seguramente contar-se tantas pessoas versadas nas Mathematicas como Officiaes.



---

OBSERVAÇÕES  
ASTRONOMICAS, E METEOROLOGICAS

*Feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de 1784*

POR BENTO SANCHES DORTA.

**E**STE he o quarto anno, que affiduamente observei os phenomenos, que a athmosfera d'este Paiz nos offerece. Neste anno faltaõ as observações do mez de Janeiro, por ainda existir o mesmo obstaculo, que obrigou a não se observar o mez de Dezembro do anno de 1783, de cuja causa eu não sou culpado: com tudo este anno he mais aventajado pelas observações do Barometro, as quaes se não fizeraõ nos tres annos preteritos, pelo motivo de não haver este instrumento na Collecção d'elles, que me foi entregue por ordem de S. Magestade em Janeiro de 1781.

Logo que recebi o Barometro, comecei a ter conta com a variação do pezo da athmosfera; e ainda que esta seja pequena, como ordinariamente succede na Zona torrida, com tudo he muito frequente; e por este motivo vejo-me obrigado a alterar o plano de observações, que tinha adoptado, isto he, de observar d'aquí em diante oito vezes cada dia, em lugar de sete como pratiquei até agora.

Este Barometro he de huma nova construcção do Senhor João Jacintho de Magalhães, Correspondente d'esta Academia, o qual na verdade excede em muito aos até agora usuaes: e ainda que o seu verdadeiro objecto seja para medir alturas, eu o consagrei a Meteorologia. Não me cango em fazer a sua descripção, pelo ter feito o seu sábio inventor no Tractado, que publicou em Londres no anno de 1779; e só me compete declarar, que este Ba-

rometro he composto de duas escalas huma Franceza , e outra Ingleza , e que eu me sirvo da primeira.

Neste anno succedêraõ phenomenos incomparaveis com os dos mais annos. Nos mezes de Setembro , Outubro , e Novembro subsistio huma nevoa , ou vapor mui denso , que nos occultou de dia o Sol , de noite as Estrellas ; de maneira que havendo nestes tres mezes 48 Eclipses dos Satellites de Jupiter visiveis neste Meridiano , eu não pude lograr mais de tres no fim de Setembro. Este nevoeiro muitos dias foi humido , lançando hum continuo orvalho ; e quando deixava de orvalhar , sempre os Hygrometros indicavaõ grande humidade na athmosfera , e esta tornava-se de côr avermelhada.

No dia 11 do mez de Agosto pelas 7<sup>h</sup> da noite formou-se da parte do S. O. hum negrume , e depois de formado começou a inflammarse , e ao mesmo tempo ouviraõ-se horriveis trovões : a isto seguio-se chover saraiva em grande quantidade , cujas pedras eraõ do tamanho de amendoadas. Toda a noite continuou em chover , e trovejar : na mesma occasiaõ cahiraõ nesta Cidade algumas materias incendiadas , porém gozámos a felicidade de não causarem damno.

A 19 do mesmo mez ás 10<sup>h</sup> da manhã começou a chover , e continuou sem descanso pelo espaço de 38<sup>h</sup>. A 22 o Cco esteve coberto , e pelas 7<sup>h</sup>. 45' da noite , principiou todo o Hemisferio a incendiar-se , e tomou huma côr semelhante a hum ferro em braza ; e assim permaneceu por tempo de 30' , no fim dos quaes começou a desvanecer-se pouco a pouco , até total extinçaõ.

Os dias 16 , 17 , e 18 de Setembro fôraõ notaveis , não só pelo muito que choveu continuamente , pois começando ás 8<sup>h</sup> da manhã no dia 16 , findou no dia 19 ás 4<sup>h</sup> da madrugada , completando 68<sup>h</sup> ; mas pela grande elevaçãõ do mar , pois subio mais do seu ordinario treze palmos : o vento era N. e N. O. A Lua achava-se no  
Equi-

Equinoccio ascendente, quero dizer no Signo de Libra em  $14^{\circ}$  até  $26^{\circ}$ .

A 5 de Outubro ás  $7^h$  da noite tornou a athmosfera a accender-se, como a 22 de Setembro, com a differença que ao passo, que se augmentava a inflammação, relampejava com maior força, e acceleração: ás  $10^h$  trovejou rijamente em cima d'esta Cidade, e choveu. O Barometro conservou-se todo este tempo na altura de  $28^{\text{Pol. Lin.}}_4$

A 15 de Dezembro o mar ao tempo da sua primeira enchente subio mais tres palmos do seu ordinario: o Barometro estava na altura de  $28^{\text{Pol. Lin.}}_4$ , 82: o vento era S.: A Lua achava-se em  $3^{\circ} 28'$  do Signo de Aquario; dia e meio pouco mais ou menos antes do seu Perigeu.

O maior calor, que aqui soffremos annunciado no Thermometro de Fahrenheit, foi de  $94^{\circ}$  (Tab. II.) no dia 9 de Fevereiro ás  $2^h$  da tarde: o Ceo estava coberto, e o vento corria de O. Excedeu ao do anno passado em  $4^{\circ}\frac{1}{2}$ .

Até agora ainda o mesmo Thermometro me não mostrou gráo de frio, pois he certo que o gráo 55 nesta escala annuncia o temperamento medio do ar, isto he, onde não ha calor, nem frio, e toma-se como cifra a respeito do calor: isto posto, no dia 12 de Julho ás  $4^h$ , e  $6^h$  da manhã vimos o Mercurio estacionar-se a  $55^{\circ}$ . (Tab. II.) O Ceo achava-se cheio de nuvens, e o vento assoprava de O. O anno de 1783 foi o menor calor de  $59^{\circ}$ , logo se tivemos mais do que o anno passado  $4^{\circ}\frac{1}{2}$  de calor, a Natureza nos recompensou dando-nos tambem  $4^{\circ}$  de mais frio.

A differença do maximo ao minimo calor he  $39^{\circ}$ .

Foi o calor medio de todo o anno  $73^{\circ}, 72$  resultado de 1005 observações, ou tres cada dia: mas o mesmo calor medio tambem foi de  $73^{\circ}, 6$  resultado de 20345 observações, ou sete cada dia. (Tab. II. e III.)

O calor medio da manhã  $71^{\circ}$ , 1: da tarde  $75^{\circ}$ , 18.  
No tempo, em que se observou, sempre o maior calor foi ás 4<sup>h</sup> da tarde (Tab. III.)

As irregularidades, que este anno vimos no Thermometro, as demonstramos nas tres linhas curvas *AB*, *CD*, e *EF*; que mostra a estampa, que vai aqui inclusa. O eixo das curvas, ou as Abfcisas mostraõ o tempo, e as Ordenadas a altura: a primeira e maxima ordenada de Fevereiro vai dividida em grãos para servir d'escala.

Nestes onze mezes do anno houverão 43 dias claros, 151 variaveis, 90 nublados, 50 cobertos, 48. de relampagos sem se ouvirem trovões, 40 de trovoada, 133 de chuva, 133 de nevoa, 4 de Aurora Austral, e 12 de Luz Zodiacal. (Tab. IV.)

A quantidade d'agoa, que choveu (Tab. V.) foi 50<sup>Pol.</sup>  
<sup>Lin.</sup> 4. Dezembro he o mez, em que mais choveu, Fevereiro o de menos chuva.

A vaporação (Tab. V.) chegou a 17<sup>Pol.</sup> 8<sup>Lin.</sup>, 4. Dezembro foi o mez de maior vaporação, Agosto o de menos.

A chuva excedeu a vaporação em 32<sup>Pol.</sup> 3<sup>Lin.</sup>  
O vento dominante de manhã foi variavel, e N.O.; de tarde S.E. quasi constante. (Tab. VI.)

A trovoada deixou-se ouvir a 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, e 15 de Fevereiro; a 8, 10, e 11 de Março; a 12, e 13 de Abril; a 4, 5, 22, e 31 de Julho; a 12 de Agosto; a 6, 7, 11, e 13 de Setembro; a 3, 5, 28, e 30 de Outubro; a 14, 19, 20, 21, e 22 de Novembro; a 1, 2, 13, 22, 24, 26, 27, e 31 de Dezembro.

A Aurora Austral appareceu a 7, e 25 de Julho; a 10 de Agosto, e a 30 de Dezembro: a de 25 de Julho, e 10 de Agosto foraõ mui luminosas, as outras com luz fraca.

Luz Zodiacal vio-se a 22 de Fevereiro; a 20 de Abril;  
Tom. II. Tttt a 11,

a 11, e 18 de Maio; a 6, 13, 15, 16, e 19 de Julho; a 7 de Agosto; a 30 de Setembro, e a 31 de Outubro.

O maior calor medio, que concorreu com os pontos Lunares, (Tab. VII.) foi no 2.º quarto, e no 2.º Oitante. O menor no Perigeu, e 1.º Oitante. O maior numero de dias chuyosos no Equinoccio ascendente, e Lunistico Austral, o menor no 1.º quarto, Apogeu, e 4.º Oitante.

Vento dominante SE. em todos os pontos Lunares. (Tab. VII.)

Nos cinco mezes, que observei o Barometro (Tab. I.)

chegou a sua maior altura a  $28^{\text{Pol.}} 7^{\text{Lin.}}$ , 6; a media  $28^{\text{P.}} 3^{\text{L.}}$  24; a menor a  $27^{\text{Pol.}} 10^{\text{Lin.}}$ , 7.

Diferença da maxima á minima altura  $8^{\text{Lin.}}$ , 9.  
A maior declinação Oriental da Agulha-magnetica foi de  $6^{\circ} 57'$ , a 8 de Março ás 4<sup>h</sup> da tarde: o Ceo estava coberto, e chovia: o Thermometro achava-se em  $33^{\circ}$ , e o vento assoprava do SE. (Tab. IX.)

A menor foi de  $6^{\circ} 23'$  a 31 de Outubro ás 6<sup>h</sup> da manhã: o Ceo nublado: o Thermometro em  $75^{\circ}$ : o vento N.

Declinação media de todo o anno  $6^{\circ} 37' 54''$ , resultante de 1005 observações: mas a mesma declinação também foi de  $6^{\circ} 37' 42''$ , resultante de 20345 observações. (Tab. X.)

Declinação media da manhã (Tab. IX.)  $6^{\circ} 35' 59''$ : ao meio dia  $6^{\circ} 38' 53''$ : de tarde  $6^{\circ} 38' 1''$ .

No dia 14 de Outubro a Agulha-magnetica perdeu o seu equilibrio inclinando-se para o Pólo do Sul. Não determinei o angulo, que fazia com o horizonte, pela falta de instrumento competente; pois o não ha na Colleção, que se me confiou. &c.

Observações dos Eclipses dos Satellites de Jupiter, feitas com hum Oculo achromatico de Dolond de 17 pollegadas de sóco, que augmenta os objectos quasi 70 vezes.

Anno 1784	Sarel- lites.	Tempo verda- deiro.			Circunstancias das observações.
		Hor.	Min.	Seg.	
Março. 29	2. <sup>o</sup>	16	2	40 Im.	Ceo pouco sereno, o Planeta ondean- do por causa de algum vapor.
Abril. 3	3. <sup>o</sup>	15	9	12 Im.	. . . pouco sereno, e muito Luar.
Maio. 9	1. <sup>o</sup>	14	19	17 Im.	. . . muito cheio de vapores; as faxas do Planeta não se percebiaõ.
9	3. <sup>o</sup>	14	56	50 Em.	Idem.
23	1. <sup>o</sup>	18	6	12 Im.	Ceo pouco sereno, porém as faxas do Planeta bem visíveis.
25	2. <sup>o</sup>	13	7	4 Im.	. . . muito sereno.
Junho. 8	1. <sup>o</sup>	16	18	53 Im.	Idem.
17	1. <sup>o</sup>	12	39	14 Im.	Idem.
24	1. <sup>o</sup>	14	31	2 Im.	Idem.
26	2. <sup>o</sup>	12	48	46 Im.	Ceo pouco sereno.
28	3. <sup>o</sup>	15	18	44 Im.	Ceo pouco sereno.
Julho. 3	1. <sup>o</sup>	10	51	13 Im.	Idem.
3	2. <sup>o</sup>	15	24	28 Im.	Ceo sereno.
17	1. <sup>o</sup>	14	37	12 Im.	. . . muito sereno, as faxas do Planeta bem distintas.
19	1. <sup>o</sup>	9	5	20 Im.	. . . pouco sereno, o Planeta ondean- do por causa dos vapores da atmos- fera, e da pouca altura acima do ho- rizonte.
21	2. <sup>o</sup>	9	54	22 Im.	. . . muito sereno, as faxas do Planeta bem vizives.
24	1. <sup>o</sup>	16	30	55 Im.	Idem.
26	1. <sup>o</sup>	10	58	47 Im.	Ceo pouco sereno. . .
Agosto. 9	1. <sup>o</sup>	14	48	15 Im.	. . . muito sereno, as faxas do Planeta percebiaõ-se perfeitamente.
10	3. <sup>o</sup>	15	20	22 Im.	Idem.
11	1. <sup>o</sup>	9	17	0 Im.	Ceo pouco sereno.
11	2. <sup>o</sup>	17	46	12 Im.	Ceo pouco sereno.
15	2. <sup>o</sup>	7	5	20 Im.	. . . sereno.
27	1. <sup>o</sup>	9	54	18 Em.	. . . sereno, o Satellite sahio mui próximo do Planeta.
Setemb. 26	1. <sup>o</sup>	12	13	22 Em.	. . . sereno, o Planeta bem claro.
28	1. <sup>o</sup>	6	42	44 Em.	Idem.
30	2. <sup>o</sup>	15	3	17 Em.	Ceo muito pouco sereno.

Anno 1784	Sarelites.	Tempo verdadeiro.		Circumstancias das Observações.
		Hor.	Min.Seg.	
Dezêbr. 3	3. <sup>o</sup>	8	5 35 Im.	. . . sereno , as faxas do Planeta bem visiveis.
3	3. <sup>o</sup>	11	18 40 Em.	... pouco sereno, Plan. mal terminado.
6	1. <sup>o</sup>	7	30 36 Em.	... sereno , porém muito vento , que fazia tremer o Oculo.
29	1. <sup>o</sup>	7	36 19 Em.	. . . muito sereno.
<i>Eclipse do Sol observado , antes do seu Occaso 23'</i>				
Fever. 20	Princípio do Eclipse.	5	51 14	Esta determinação não he muito exacta , por estar o Sol muito proximo do Horizonte.
<i>Observação do Eclipse parcial da Lua.</i>				
Março. 6	Princípio do Eclipse.	11	22 5	O Ceo estava fêmeado com muitas nuvens.
	Fim do Eclipse.	13	44 10	
	Fim da penumbra.	13	48 0	Não observei macula alguma , por causa de muitas nuvens.

Em 8 de Janeiro de 1784 ás 9<sup>h</sup> da noite descobri por casualidade á vista simples hum Comera entre as Estrellas  $\gamma$  do Pavão , e  $\alpha$  do Tocano , igualmente distante de huma , e outra , tendo passado de dia pelo Meridiano : eu continuei a vêllo até o dia 25 do dito mez. A sua cauda me pareceu ser pouco mais ou menos de 6<sup>o</sup>.

Eu achava-me neste tempo distante desta Cidade 12 legoas , sem instrumento algum capaz de poder determinar a sua verdadeira posição : porém recolhendo-me depois , o observei nas noites de 22 , 23 , 24 , e 25 ; e o comparei com a Estrella  $\beta$  da Baleia. Eu refervo para outra occasião trazar destas observações.

Ha quem affirme nesta Cidade ter visto este Comera no dia 1. de Janeiro ás 3<sup>h</sup> da manhã ; de que eu não fico por fiador : mas sendo isto assim podemos colligit , que já apparecia em Dezembro de 1783.



## DIARIO METEOROLOGICO.

MARÇO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quan- tidade de chuva.	Quan- tidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	Var.	S. E.	73,5	77.	79,5	.	0,8	Nub., e nevoa.
2	N. E.	S. E.	76,83	80.	83.	.	1,5	Var., e nevoa.
3	Var.	S. E.	77,66	81,5	85,16	.	1,5	Var., e relampagos.
4	Var.	S. E.	78,83	84.	84,5	.	2	Nub., e nevoa.
5	Var.	S. E.	79,33	82.	85.	.	2	Var., e nevoa.
6	Var.	S. E.	79.	82,5	85,83	.	2,4	Nub. nevoa, e relampagos.
7	N. E.	S. E.	82,33	85.	86,33	.	2,5	Nub., e nevoa.
8	Var.	S. E.	81,58	83.	83.	2	1	Nub. trovões, e chuva.
9	Var.	S. E.	79,33	81.	82,33	.	1,5	Var. nevoa, e relampagos.
10	N. O.	S. E.	78,66	80.	81,33	1	1	Var. trovões, e chuva.
11	N. E.	S.	78,66	80.	81,5	7	0,3	Cob. trovões, e chuva.
12	Var.	L.	75,83	76.	76.	5	.	Cob., e chuva.
13	S. E.	S. E.	75,33	77.	77.	4	.	Var., e chuva.
14	N. E.	S. E.	76,33	78.	78,66	.	0,5	Nub., e nevoa.
15	L.	S. E.	75,66	76,5	77,33	0,4	0,6	Cob., e orvalho.
16	N.	S.	76,83	79,5	78,33	4	.	Var., e chuva.
17	Var.	S. E.	73,66	76.	77,33	0,2	0,6	Var., e orvalho.
18	L.	S. E.	75,16	77.	76,66	.	1	Nub., e nevoa.
19	L.	S. E.	75.	77.	78.	.	1	Clar.
20	Var.	S. E.	72,66	76.	78.	.	0,5	Clar., e nevoa.
21	L.	S. E.	73,5	76.	77,66	.	1	Var.
22	N.	S. E.	74,33	77.	76,66	.	0,4	Nub., e nevoa.
23	L.	Var.	73,66	77.	77,5	.	0,3	Var., e nevoa.
24	N.	S. E.	75,16	77.	76.	0,3	0,3	Cob., e orvalho.
25	N. E.	S. E.	74.	76,25	76,66	.	0,4	Var.
26	Var.	S. E.	73,66	77.	78,66	1,5	0,3	Cob., e orvalho.
27	Var.	L.	74,16	77.	79,83	.	1	Nub., e nevoa.
28	N.	S. E.	75.	79.	80,66	.	1,5	Var.
29	N.	S.	74,33	78,5	79,16	.	1	Idem.
30	N.	S. E.	74,66	78.	79,5	.	0,8	Idem.
31	Var.	S. E.	74.	77,5	78,66	.	0,6	Clar.

Bússola no dia 2, 6° 32'; no dia 8, 6° 41' 17"; no dia 15, 6° 34' 53".  
no dia 25, 6° 40' 20"; no dia 26, 6° 34'; e no dia 30, 6° 38' 37".

## DIARIO METEOROLOGICO.

A B R I L de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Cco.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	Var.	N. O.	74,5	78.	80.	.	1,5	Nub., e nevoa.
2	O.	S. E.	77.	78.	78,33	.	0,5	Nub.
3	N. O.	S. O.	72,33	76,5	77,83	.	0,5	Var.
4	Var.	S.	72,82	76.	77,5	.	0,3	Idem.
5	N. O.	S.	71,83	74.	75,33	.	0,3	Var., e nevoa.
6	N. O.	S. E.	72,66	75.	76,66	4	0,2	Var., e chuva.
7	Var.	S. E.	73.	74.	75,66	1	0,2	Idem.
8	Var.	S. E.	74.	76,5	77.	0,4	0,3	Idem.
9	N. O.	S. E.	74,33	78.	79,16	.	0,7	Nub.
10	Var.	S. E.	75,66	78,5	80,66	.	1	Idem.
11	Var.	S. E.	77.	78,5	79,66	.	1,5	Var., e nevoa.
12	N. O.	S. E.	76,83	80.	82,33	2	1,5	Var., trovões, e chuva.
13	Var.	S. E.	77,33	79.	77.	2	.	Idem.
14	Var.	S. E.	73,33	76.	76,16	0,5	0,2	Var., e chuva.
15	Var.	S. E.	73,8	75,5	77,85	.	0,5	Var.
16	Var.	S. E.	75,33	78.	80,33	.	0,5	Var., e relampagos.
17	Var.	S. E.	77,58	81.	82,83	.	1	Clar., nevoa, e relampagos.
18	Var.	S. E.	77,83	81.	82,66	.	1	Clar., e relampagos.
19	Var.	Var.	78.	80,5	83,5	.	1,5	Clar.
20	N. O.	Var.	78,16	82.	84,33	.	1,5	Nub., e relampagos. Luz-Zodiacal muito torre.
21	N. O.	S. E.	80,75	85.	85,83	1	2	Clar., relamp., e chuva.
22	N. O.	S. E.	78,83	80.	80.	2	.	Cob., chuva, e relamp.
23	Var.	S. E.	78,33	80.	80,66	.	0,4	Var.
24	N. O.	S. E.	79,33	80,5	81,33	.	0,6	Nub., e nevoa.
25	Var.	Var.	79,33	83.	83,16	.	1	Idem.
26	Var.	S.	77,33	79.	77,66	4,5	.	Var., e chuva.
27	N. O.	S. E.	73,5	76.	76.	.	0,2	Nub.
28	Var.	Var.	74,8	75.	75,66	1,5	.	Nub., e chuva.
29	N. O.	O.	72,66	75.	76,66	7	.	Idem.
30	N. O.	O.	72,5	73,75	74,16	1,5	.	Var., e chuva.

Bussola no dia 3, 6° 32' 40''; no dia 5, 6° 40' 33''; no dia 6, 6° 34' 23''.  
no dia 25, 6° 42' 7''; no dia 27, 6° 36' 20''; e no dia 30, 6° 41' 20''.

## DIARIO METEOROLOGICO.

M A I O de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quan- tidade de chuva.	Quan- tidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	N. O.	O.	71.	73.	74,66	0,5	.	Var. , e chuva.
2	N.	S. E.	70,66	73,5	75.	.	0,3	Clar. , e nevoa.
3	Var.	S.	73.	76,5	78.	.	0,4	Clar.
4	N.	Var.	72,33	76,5	80,16	2	.	Var. , e chuva.
5	Var.	S. O.	69,5	70.	68,5	8	.	Cob. , e chuv.
6	Var.	Var.	66,75	68.	69,33	0,7	0,2	Var. , e chuv.
7	Var.	Var.	67.	68.	71,33	.	0,3	Nub.
8	Var.	Var.	69,16	71,5	73.	.	0,3	Var.
9	Var.	S. E.	69,91	73.	74,33	.	0,4	Var. A Lua com sua corôa.
10	Var.	S. E.	69,66	72,5	74,66	.	0,4	Clar.
11	N. O.	S.	69,5	72.	73,33	.	0,3	Var. Luz-Zodiacal.
12	N. O.	S. E.	67,83	70.	72,66	.	0,3	Var.
13	S.	S. O.	67,66	69.	69.	3,6	.	Cob. , e chuv.
14	S.	S. O.	67.	68.	69,66	0,5	0,2	Idem.
15	Var.	Var.	66,66	69,5	72.	.	0,2	Var.
16	N. E.	S.	69.	72.	72.	0,6	0,3	Var. , e alguns orvalhos.
17	Var.	S.	69,5	71.	71,25	.	0,2	Var.
18	Var.	S. E.	69.	71.	72.	.	0,3	Var. Luz-Zodiacal.
19	Var.	S. E.	71,16	71,5	72.	2,5	.	Cob. , e chuv.
20	Var.	S. E.	66,66	68.	69,33	.	0,2	Var.
21	N. O.	S. E.	64,16	68.	69.	1	0,2	Var. , e chuv.
22	N. O.	S.	67,16	69.	70,66	1	0,2	Idem.
23	N. O.	Var.	67,16	69.	71,16	.	0,2	Nub. , e nevoa.
24	Var.	S. E.	67.	69.	71,5	.	0,3	Var. , e nevoa.
25	N. O.	S. E.	67.	69,5	72.	.	0,2	Idem.
26	N. O.	S. E.	69.	70,5	71.	0,4	0,2	Var. , nev. , e orvalho.
27	N. O.	S. E.	70,5	73.	74,16	.	0,3	Nub. , e nevoa.
28	Var.	S. E.	72,83	76.	76,83	.	0,4	Nub.
29	N. O.	S. E.	71,66	72,5	74,33	.	0,3	Var.
30	N. O.	S. E.	69,5	70,5	71,66	.	0,3	Idem.
31	O.	S. O.	66,33	69,5	70,33	.	0,3	Clar. , e nevoa.

Buffeta no dia 1°, 6' 37" 27"; no dia 10, 6' 45" 40"; no dia 13, 6' 37" 13";  
no dia 19, 6' 42" 37"; no dia 29, 6' 35" 3"; e no dia 31, 6' 38" 20".

DIARIO METEOROLOGICO.

JUNHO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	S. O.	O.	67,5	68.	70.	1	0,2	Variavel, nevoa, e chuva.
2	S. O.	S.	66.	68.	70,33	.	0,2	Variavel.
3	V. r.	Var.	64,5	68.	70,66	.	0,2	Var., e nevoa
4	Var.	S. E.	65.	69.	71,33	.	0,1	Clar.
5	Var.	S. E.	64,16	68.	69,33	.	0,2	Idem.
6	N. O.	S. E.	64,60	68.	70,60	.	0,3	Idem.
7	N. O.	S. E.	63,66	67,75.	71.	.	0,3	Clar., e nevoa.
8	N.	S. E.	70,16	74.	79,33	.	0,3	Cl. r. A Lua com sua corôa Luminosa.
9	N. O.	N. E.	73.	75.	80.	.	0,5	Clar.
10	N. O.	N. E.	74.	78.	80,66	.	1,5	Idem.
11	Var.	S. E.	75,66	77.	75.	10	.	Var. nevoa, e chuva.
12	S. O.	S. O.	68,66	66,5	65,33	2	.	Cob., e chuva.
13	S. E.	L.	65,83	67.	67,66	.	0,3	Var.
14	Var.	Var.	66,83	68.	71,16	.	0,2	Nub.
15	Var.	S. E.	66,5	69,5	71,83	.	0,5	Nub., e nevoa.
16	N. O.	Var.	66,66	70.	73,33	.	0,5	Clar., e nevoa.
17	N. O.	Var.	66,5	69,5	73,33	.	0,4	Idem.
18	N. O.	S. E.	71,16	70.	73,33	.	0,5	Nub.
19	N. O.	S. E.	70.	74.	74,33	.	0,5	Clar.
20	N. O.	S. O.	70,33	74.	73,66	6	0,2	Var., e chuva.
21	N. O.	N. O.	68,66	68,5	69,66	.	0,2	Var.
22	N.	S.	66,66	67,5	70.	.	0,2	Idem.
23	Var.	Var.	65.	67,5	69,75	1,5	.	Var., nevoa, e chuva.
24	N. O.	S.	67.	70.	67.	0,4	0,1	Cob., e alguns orvalhos.
25	Var.	S. E.	63,33	65.	66,25	.	0,2	Var.
26	Var.	Var.	63.	64,5	67.	.	0,3	Nub., e nevoa.
27	N. O.	S. E.	63,5	68.	71,33	.	0,3	Clar., e nevoa.
28	Var.	S. E.	65,16	69.	72.	.	0,3	Var., e nevoa.
29	N. O.	S. O.	69,33	69.	68,66	11	.	Cob., nevoa, e chuva.
30	N. E.	S. E.	66.	66.	67.	2	.	Cob., e chuv.

Buffola no dia 3, 6° 34' 37"; no dia 4, 6° 42' 13"; no dia 8, 6° 37' 57".  
 no dia 13, 6° 44' 27"; no dia 19, 6° 35' 20"; e no dia 23, 6° 49' 20".

## DIARIO METEOROLOGICO.

JULHO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quan- tidade de chuva.	Quan- tidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	Var.	S. O.	66,33	68,25	73,33	0,6	0,3	Var. com algum orvalho.
2	O.	S. O.	65,83	66.	66.	.	0,2	Var.
3	Var.	Var.	62,5	65.	65,83	.	0,2	Var. A Lua com corôa.
4	Var.	Var.	62,16	66.	72.	6	0,3	Nub., nevoa, e fortissima tormenta de trovões, chu- va, e vento.
5	Var.	S. O.	66.	66.	66.	3	.	Cob., trovões, e chuva.
6	O.	S. E.	62,5	64,5	66.	.	0,2	Var. Luz-Zodiacal.
7	Var.	Var.	58.	62,5	67,66	.	0,3	Clar., e nevoa. Aur. Auf- tral bem resplandecente.
8	Var.	S. E.	60,5	64.	68,5	.	0,2	Clar., nevoa, e relampagos.
9	N. O.	S. E.	62,16	70.	72,66	.	0,2	Clar., e nevoa.
10	Var.	S. O.	68,16	70.	70,33	.	0,2	Var.
11	S. O.	S. O.	64,16	68.	70.	.	0,2	Cob.
12	Var.	L.	57,83	64.	66.	.	0,1	Var.
13	Var.	S. E.	59,5	66.	67,66	.	0,3	Clar. Luz-Zodiacal.
14	Var.	S. E.	60.	66,5	69,33	.	0,3	Clar.
15	N. O.	N. E.	63,66	70,5	75.	.	0,3	Clar. Luz-Zodiacal muito luzente.
16	Var.	S. E.	64,66	70.	73.	.	0,4	Var. Luz-Zodiacal.
17	N. O.	N. O.	69.	71.	74,66	.	0,5	Var., e nevoa.
18	N. O.	S.	68,33	72,5	74.	.	0,5	Idem.
19	Var.	S. E.	68,33	73.	75,33	.	0,5	Var. Luz-Zodiacal.
20	N. O.	N. O.	69,5	73.	77,66	.	0,5	Var.
21	N. O.	N.	73,66	76.	80,33	.	0,8	Nub.
22	Var.	N. O.	74.	75.	73,66	6	.	Var., trovões, e chuva.
23	S. O.	S. E.	70,33	71.	73,33	.	0,2	Var., e chuva.
24	Var.	S. E.	66,66	69.	71,66	.	0,4	Var.
25	N. O.	N. E.	65.	72.	76.	.	0,4	Nub., e nevoa. Aur. Aufst.
26	Var.	Var.	72,66	76.	81,33	.	1	Nub., e nevoa.
27	Var.	O.	72,33	68.	70.	4	.	Cob., e chuva.
28	O.	S. O.	63,83	66,5	64,66	1	0,4	Var., e chuva.
29	Var.	S.	62.	64.	67.	3	.	Var., e chuva. Neste dia houve huma grande maré.
30	Var.	S. E.	59,5	66,5	71.	.	0,4	Var., e nevoa.
31	Var.	Var.	69,33	70.	71,16	2	0,2	Var., trovões, e chuva.

Buffola no dia 2, 6° 36' 27"; no dia 5, 6° 45' 27"; no dia 7, 6° 48' 20"; no dia 14, 6° 36';  
no dia 24, 6° 34' 37"; no dia 26, 6° 40' 40"; e no dia 29, 6° 34' 16".

DIARIO METEOROLOGICO.

AGOSTO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Cco.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	O.	S.	65,5	67.	66,33	Linh. 3	Linh. .	Var. , e chuva.
2	O.	S. O.	61.	64,5	64.	4	.	Idem.
3	Var.	S. O.	61,33	65.	64.	3	.	Cob. , e chuva.
4	Var.	L.	61,66	64,5	65,66	.	0,2	Nub.
5	Var.	S. E.	61,66	65.	65,66	.	0,2	Clar.
6	Var.	S. E.	61,16	69.	69.	.	0,3	Idem.
7	N. O.	Var.	65.	68.	72,33	.	0,2	Var. Luz-Zodiacal muito luzente. A Lua com sua corôa.
8	Var.	S. O.	69.	70.	70,83	0,5	.	Var. , e chuva.
9	Var.	Var.	68,91	69.	69,33	0,4	0,2	Idem.
10	Var.	S. E.	64,16	70.	71.	.	0,2	Clar. , e nev. Aur. Aust.
11	N. O.	S.	65,33	72.	73,33	.	0,2	Var. Fallarei d'este dia em outra parte.
12	Var.	S. O.	69,5	72.	70,33	10	.	Var. , e chuva.
13	Var.	S. E.	66.	67.	66,66	0,5	.	Var. , e chuva.
14	Var.	S.	60.	66.	68.	.	0,2	Var.
15	N. O.	S. E.	60,66	65.	68.	.	0,3	Clar.
16	N. O.	S. E.	65,83	73.	71,66	.	0,3	Clar. , e nevoa.
17	Var.	S. E.	68,66	71.	72.	.	0,3	Var. , e nevoa.
18	Var.	N.	72,16	74.	77.	.	0,5	Var. , nev. , e relampagos.
19	Var.	S. O.	72,66	71.	69.	3	.	Var. , e chuva.
20	S. O.	S. O.	64,66	65.	64.	8	.	Cob. , e chuva.
21	L.	S.	62,5	64.	63.	2	.	Idem.
22	Var.	Var.	62,66	63,5	64,13	3,5	.	Idem.
23	Var.	L.	66,66	71,5	69,66	.	0,2	Var.
24	N.	Var.	66,33	72.	73.	0,8	0,3	Var. , e chuva.
25	Var.	Var.	71.	72.	72,25	.	0,1	Var. , e nevoa.
26	Var.	Var.	69,66	72,5	73,66	.	0,3	Var. , e nev. A Lua com sua corôa amarella , descolorado.
27	Var.	N.	73,66	80,5	77.	.	0,3	Idem.
28	S. O.	S. E.	73,58	74.	73,66	.	0,2	Var.
29	Var.	S.	68,83	70,5	71,83	.	0,2	Idem.
30	Var.	S. E.	69,83	71,25	73.	.	0,2	Idem.
31	N. E.	S. E.	70,33	71,5	75.	.	0,3	Idem.

Bussola no dia 3 , 6° 40' 20" ; no dia 8 , 6° 33' 33" ; no dia 13 , 6° 32' 27" ; no dia 23 , 6° 38' 23" ; e no dia 28 , 6° 33' 27" .

## DIARIO METEOROLOGICO.

S E T E M B R O de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Coo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	Var.	Var.	71.	73.	74,66	.	0,2	Nub., e nevoa.
2	Var.	Var.	70,83	73.	76,68	.	0,3	Idem.
3	N. O.	S. E.	72,66	74,5	75,5	.	0,3	Nub.
4	Var.	Var.	71,5	75.	76.	.	0,4	Var.
5	N. O.	S. E.	73,5	75,5	75,58	.	0,4	Nub.
6	N. E.	Var.	73,5	74.	74,83	1	0,3	Var., trovões, e chuva.
7	Var.	Var.	72.	72.	71.	10	.	Cob., trov., e chuv.
8	Var.	S. E.	68,66	69.	68,5	4	.	Cob., nevoa, e chuv.
9	S. O.	Var.	67,33	68.	67,83	5	.	Idem.
10	Var.	Var.	66,5	67.	66,5	2,5	.	Idem.
11	Var.	S. E.	64,5	64,5	64,16	7	.	Cob., trovões, e chuv.
12	N. O.	S. E.	64,83	69.	71.	0,5	0,3	Var., nev., relamp., e orv.
13	Var.	Var.	70,5	71.	71,16	2,5	.	Cob., nev., trov., e chuv.
14	Var.	S.	66,33	66.	65,66	0,3	0,2	Var., e nevoa, e orvalho.
15	Var.	S. O.	63,33	64,5	65.	0,2	0,2	Idem.
16	N. E.	S. E.	63.	63.	62.	17,5	.	Nev. todo o dia, com seu orvalho.
17	Var.	N. O.	61.	62.	62,33	5	.	Idem.
18	Var.	L.	62,5	64.	63,33	17	.	Idem.
19	Var.	S. E.	63.	65.	64,33	2	.	Idem.
20	L.	S. E.	63,5	66.	65,16	.	0,1	Nub.
21	Var.	S. E.	61,33	67,5	68.	.	0,2	Clar.
22	N. O.	S. O.	71,33	72,5	71,16	3	.	Nub., nevos, e chuva.
23	Var.	S. E.	66,66	70,5	67,83	0,5	.	Nev. todo o dia, e orvalho.
24	L.	L.	66,66	68.	69.	2	.	Idem.
25	N. O.	O.	69,16	70,5	72,33	2	.	Cob., nevoa, e chuva.
26	Var.	S. E.	69.	70.	70,83	.	0,2	Var., e nevoa.
27	Var.	S. E.	68,66	71,5	72,33	.	0,2	Nub., e nevoa.
28	Var.	S. E.	69,83	71,5	72,33	.	0,3	Idem.
29	Var.	S. E.	69,66	72,5	74,33	.	0,5	Var.
30	Var.	Var.	70,16	75,5	79,16	.	1	Nub. Luz-Zodiacal.

Bufoia no dia 1, 6° 35' 10"; no dia 7, 6° 40' 50"; no dia 14, 6° 38';  
no dia 18, 6° 36' 47"; no dia 26, 6° 43' 13"; e no dia 28, 6° 40' 7".

DIARIO METEOROLOGICO.

O U T U B R O de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	Var.	Var.	73. <sup>o</sup>	80. <sup>o</sup>	83,33	.	Linh.	Nub.
2	Var.	S. E.	74,33	76.	77,16	.	0,3	Nub., nevoa, e relampag.
3	Var.	S.	74,10	75.	73,66	3,5	.	Cob., nev., trov., e chuva.
4	S. E.	L.	66,66	68,5	68.	.	0,3	Cob., e nevoa.
5	Var.	S. E.	67,33	71.	71,33	2,5	.	Nub., nev., trov., e chuv.
6	S. E.	O.	71,10	73.	72.	1	.	Var., nev., relamp., e chuv.
7	Var.	S. E.	68,5	69,5	68,66	0,5	.	Cob., nevoa, e orvalho.
8	Var.	S. E.	69.	71.	71,33	.	0,3	Nub., e nevoa.
9	Var.	S. E.	70,66	73,5	76.	.	0,3	Idem.
10	N. O.	S. E.	73,66	77.	76,66	.	0,4	Nub., nev., e relamp.
11	N. O.	S. E.	76,33	77.	77.	0,5	.	Var.,nev., relamp., e chuv.
12	S. O.	S. O.	73.	74.	72,83	3	.	Cob., nevoa, e chuva.
13	S.	S.	69,5	71.	70.	0,3	.	Var., nevoa, e orvalho.
14	Var.	S.	69,5	70.	68,41	4,7	.	Cob., nevoa, e chuva.
15	N. O.	S. E.	69,83	71.	72.	0,8	0,3	Var., nev., relamp., e chuv.
16	N. O.	S. E.	69.	73.	73,16	0,2	0,3	Var., nev., relamp., e chuv.
17	Var.	S. E.	70,16	73.	75,16	0,2	0,2	Idem.
18	Var.	Var.	74,33	85.	78,38	8	.	Idem.
19	Var.	S. O.	64,66	66.	65,62	0,5	.	Cob., nevoa, e chuva.
20	Var.	Var.	64,66	65,5	66.	.	0,2	Var., e nevoa.
21	Var.	S. E.	64,66	68.	67,92	.	0,3	Idem.
22	N. O.	S.	67.	69,5	70,5	.	0,3	Nub., e nevoa.
23	Var.	S. E.	67,83	71,5	71,75	.	0,3	Var., e nevoa.
24	Var.	S. E.	68,33	72.	74,37	.	0,3	Idem.
25	Var.	S. E.	71,33	73.	74,6	.	0,4	Nub., e nevoa.
26	Var.	Var.	72	74.	75,5	.	0,4	Idem.
27	N. O.	Var.	70,83	75,25	77,56	.	0,4	Idem.
28	N. O.	Var.	75,16	80,5	79.	8	.	Var., nev., trov., e chuv.
29	Var.	Var.	73.	74,5	74,19	.	0,4	Var., e nevoa.
30	S. O.	S. E.	73,5	75,25	76,87	.	0,4	Nub., nev., trov. ao longc.
31	Var.	S. E.	75,58	77,5	79,12	.	0,5	Var., e nev. Luz-Zodiacal.

Buifola no dia 1, 6° 40'; no dia 11, 6° 45' 13"; no dia 16, 6° 33' 23"; no dia 22, 6° 37' 35"; no dia 28, 6° 35' 8"; e no dia 31, 6° 30' 7".

## DIARIO METEOROLOGICO.

NOVEMBRO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	Var.	Var.	76,33	79.	80.	.	1	Var., e nevoa.
2	Var.	Var.	76,33	78,5	79,25	.	0,8	Nub., e nevoa.
3	Var.	S. E.	76,66	78.	79,62	.	1	Nub., nev., e relampagos.
4	N. O.	Var.	77,33	81,25	80,25	0,3	1,2	Var., nevoa, relampagos, e orvalho.
5	Var.	S. E.	78.	80.	80,75	.	1	Var.
6	Var.	S. E.	76,5	79,5	79,5	.	1	Nub., e relampagos.
7	Var.	S.	75.	76,5	76.	0,4	0,8	Var., nevoa, e orvalho.
8	Var.	S.	73,66	74.	74,65	2	.	Cob., nevoa, e chuva.
9	Var.	S. E.	74,33	75.	75.	2,5	.	Var., nevoa, e chuva.
10	L.	S. E.	74,5	76,5	78,9	.	1	Var., e nevoa.
11	Var.	Var.	77,33	79.	78,75	24	.	Var., nevoa, e chuva.
12	Var.	Var.	76.	77,5	78.	2,5	.	Var., e chuva.
13	N. O.	N. O.	75.	78.	81.	0,5	1,5	Var., relamp., e orvalho.
14	N. O.	N. O.	78,83	82.	82.	1	0,8	Var., trovões, e chuva.
15	Var.	S. E.	78,16	81.	82,12	.	2	Nub., nevoa, e relamp.
16	Var.	S. E.	77,16	78,5	80,22	0,6	1	Var., nevoa, e orvalho.
17	N. O.	S. E.	76,66	78,5	80,62	.	2	Var., nev., e relampagos.
18	Var.	S. E.	79,58	83.	85,5	.	2,5	Idem.
19	Var.	S. E.	82,75	88.	86,12	2	.	Var., trovões, e chuva.
20	Var.	S. E.	81,5	85.	85,12	11	.	Idem.
21	N. O.	S. E.	80,33	82.	82,44	5	.	Idem.
22	Var.	S.	79,91	81,5	81.	16	.	Idem.
23	Var.	S. E.	76,83	78.	78.	0,7	1	Var., e chuva.
24	Var.	S. E.	75,33	78.	80,87	.	1,5	Var., e nevoa.
25	Var.	Var.	79.	79.	77,12	5	.	Cob., nevoa, e chuva.
26	Var.	Var.	73,33	73.	73.	0,2	0,3	Idem.
27	Var.	S. E.	71,16	74.	76,25	.	0,5	Nub.
28	Var.	S. E.	74,16	77.	77,12	2	.	Var., nevoa, e chuva.
29	Var.	S. E.	71,33	73,75	74,12	0,7	0,4	Idem.
30	N. O.	S. E.	72.	73.	75.	4	.	Idem. O mar muito luminoso.

Bússola no dia 1, 6° 31' 10"; no dia 5, 6° 29' 2"; no dia 19, 6° 37' 12"; no dia 25, 6° 32' 25"; e no dia 30, 6° 35'.

DIARIO METEOROLOGICO.

DEZEMBRO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Cco.
	manh.	rarde.	manh.	meio dia.	rarde.			
1	Var.	S. E.	73,83	76.	78,37	0,5	1	Nub., trovões, e chuva.
2	N. O.	Var.	76,41	77,5	78.	30	.	Var., trovões, e chuva.
3	Var.	Var.	74,83	76.	76,5	0,4	0,5	Var., e chuva.
4	N. O.	S. E.	70,16	75,5	77.	.	1	Nub.
5	N. O.	S. E.	71,5	75.	77,37	.	1	Nub., e nevoa.
6	N. O.	S. E.	74,66	78.	78,12	.	0,8	Clar.
7	N. O.	S. E.	75,66	79.	80.	.	1	Nub.
8	Var.	S. O.	78,16	79.	79,5	.	0,8	Cob., e nev. O mar sumamente luminoso.
9	N. O.	S. E.	77,5	79.	80,22	.	1,5	Var., e nevoa.
10	Var.	S. E.	76,66	79.	80,76	.	1,6	Nub., e nevoa.
11	N. O.	S. E.	76,33	80.	81.	.	2	Nub.
12	Var.	S. E.	77,5	81.	80,75	.	2,5	Var.
13	Var.	S. O.	79,83	82.	81,75	42	.	Var., trovões, e chuva.
14	Var.	S. O.	67,83	69.	68,75	7	.	Cob., e chuva.
15	Var.	S.	66,66	67,5	67.	2	.	Idem.
16	Var.	S. E.	64,5	68.	69,62	.	0,4	Nub.
17	Var.	S. E.	66,83	69.	71,37	.	1	Idem.
18	N.	S. E.	70,16	73.	74,75	0,3	0,8	Var., e orvalho.
19	N.	S. E.	72,83	76.	78,25	.	1,5	Var., e relampagos.
20	Var.	S. E.	76,33	78,5	79,12	0,5	1	Var., nev., e orvalho.
21	N. O.	S. E.	76,5	79.	81,12	.	1,5	Nub., e relampagos.
22	N.	S. E.	80,33	84.	84.	.	2	Nub., e trovões. A Lua com sua corôa.
23	N.	S. E.	81,16	83,5	83.	.	2	Var., e relampagos.
24	Var.	Var.	79,83	82.	81,9	.	2	Var., e trovões ao longe.
25	Var.	S. E.	78,5	79,5	81,05	.	1,5	Nub., nevoa, e relamp.
26	N. O.	S. E.	78,16	80,5	82,5	5	.	Nub., trovões, e chuva.
27	N. O.	S. E.	79,83	84.	84,75	0,6	3	Var., trovões, e chuva.
28	N. O.	S. E.	80.	83.	83,5	.	2,5	Var.
29	N. O.	S. E.	76,33	80.	80,5	.	3	Idem.
30	Var.	S. E.	76,16	79.	81,5	0,3	3	Nub., nevoa, e orvalho. Aur. Aust. O mar muito luminoso.
31	N. O.	S. E.	80,83	87.	85,2	0,6	3	Var., trovões, e chuva.

Buffola no dia 5, 6° 30' 15"; no dia 9, 6° 36'; no dia 18, 6° 34' 13"; no dia 21, 6° 38' 20"; e no dia 31, 6° 33' 47".

## BAROMETRO.

TABOA I.	Elevação maxima.	Elevação minima.	Elevação media.	Elevação da manhã.	Elevação ao meio dia.	Elevação da tarde.
	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.
Agosto	28 6,1	28 1, 1	28 4,33	28 4,53	28 4,53	28 4,21
Setembro.	28 7,6	28 0,75	28 3,97	28 4,14	28 3,95	28 3,77
Outubro.	28 6	27 11, 6	28 3,53	28 3,61	28 3,59	28 3,39
Novembro.	28 4,8	27 10, 7	28 1, 7	28 1,81	28 1,78	28 1,52
Dezembro.	28 5,9	27 11, 2	28 2,68	28 2,87	28 2,65	28 2,52

## THERMOMETRO.

TABOA II.	Calor maximo	Calor minimo.	Calor medio do mez.	Calor medio da manhã.	Calor medio ao meio dia.	Calor medio da tarde.
Fevereiro.	94°	71,5°	80,25	78,35	80,69	81,71
Março.	87	71	78,21	76,07	78,68	79,87
Abril.	86,5	70,5	77,67	75,64	78,18	79,19
Maió.	80,5	63	70,76	68,87	71	72,41
Junho.	82	62,5	69,46	67,29	69,47	71,63
Julho.	82	55	68,47	65,37	68,63	71,32
Agosto.	80,5	58	68,54	66,44	69,39	69,81
Setembro.	80,5	58	69,73	67,75	69,51	69,96
Outubro.	85	62	72,44	70,61	73,25	73,47
Novembro.	88,5	68	78,13	76,51	78, 6	79,28
Dezembro.	88	61	77, 4	75,86	77,55	78,36

Calor medio de duas em duas horas.

TAB. III.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 hor. da manhã.	12 hor. da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	do dia.
Fevereiro.	77,43	78,17	79,47	80,69	81,65	82,25	81,27	80,17
Março.	75,1	76,01	77,15	78,68	79,7	80,37	79,67	78,1
Abril.	74,8	75,4	76,66	78,18	79,06	79,41	79,08	77,51
Maió.	68,3	68,72	69,58	71.	72.	72,79	72,48	70,7
Junho.	65,8	66,8	67,95	69,47	70,9	71,9	71,31	69,17
Julho.	64,25	64,9	67,14	68,73	70,71	72,56	71,35	68,58
Agosto.	65,3	66,08	68,03	69,39	69,45	70,41	69,53	68,31
Setembro.	67.	67,47	68,78	69,51	70.	70,2	69,53	68,93
Outubro.	69,96	70,51	71,8	73,25	73,62	73,76	73,23	72,4
Novembro.	75,77	76,77	77,5	78,6	79,37	80,2	79,26	78,3
Dezembro.	74,3	75,21	76,56	77,55	79,12	79,22	78,88	77,36

Número dos dias.

TABOA IV.	Clas-ros.	Vari-aveis	Nu-bla-dos.	Co-ber-tos.	Re-lam-pagos.	Tro-vões.	Chu-va.	Ne-voa.	Au-rora Auf-tral.	Luz-Zo-dia-cal.
Fevereiro.	5	11	10	3	12	9	10	3	*	1
Março.	3	14	9	5	4	3	10	14	*	*
Abril.	5	13	10	2	6	2	12	6	*	1
Maió.	5	15	7	4	*	*	11	7	*	2
Junho.	12	9	5	4	*	*	9	12	*	*
Julho.	6	16	6	3	1	4	9	9	2	5
Agosto.	5	20	1	5	1	1	11	6	1	1
Setembro.	1	7	10	12	2	4	18	21	*	1
Outubro.	*	14	11	6	10	4	13	29	*	1
Novembro.	*	19	8	3	7	5	19	19	*	*
Dezembro.	1	13	13	3	5	8	11	7	1	*

Quantidade de chuva, e vaporação.			Ventos dominantes.		
TABOA V.	Chuva.	Vapotação.	TABOA VI.	Manhã.	Tarde.
	Pol. Lin.	Pol. Lin.			
Fevereiro.	2 3,65	3 1,8	Fevereiro.	Variavel.	S. E.
Março.	2 5,4	2 9,3	Março.	Var.	S. E.
Abril.	2 7,4	1 8,9	Abril.	Var., e N. O.	S. E.
Maió.	5 3,2	0 7,2	Maió.	Var., e N. O.	S. E.
Junho.	3 3,9	0 8	Junho.	Var.	Var.
Julho.	2 5,6	0 9,3	Julho.	Var.	Var.
Agosto.	4 7	0 4,9	Agosto.	Var.	Var., e S. E.
Setembro.	8 2	0 5	Setembro.	Var.	Var., e S. E.
Outubro.	3 3,7	0 6,8	Outubro.	Var.	S. E.
Novembro.	8 0,4	1 9,8	Novembro.	Var.	S. E.
Dezembro.	8 9,2	3 7,4	Dezembro.	Var.	S. E.

*Influencia correspondente aos pontos Lunares.*

TABOA VII.	Calor medio.	Ventos dominantes.							
Pontos Lunares.		N.	N. E.	N. O.	S.	S. E.	S. O.	L.	O.
Lua em conjunção.	73,32	5	5	18	13	28	3	8	2
Lua em opposição.	74,16	5	6	15	8	19	8	6	13
I. Quarto.	73,83	9	7	15	4	29	4	4	7
II. Quarto.	75,5	6	10	27	6	24	1	1	3
Apogeu.	73,46	10	6	20	5	36	3	2	4
Perigeu.	72,58	4	9	18	8	38	2	4	5
Lunístico Austral.	73,64	1	7	20	3	32	2	13	7
Lunístico Boreal.	74,45	8	1	17	5	28	4	14	1
Equinoocio ascendente.	72,96	6	3	10	16	24	13	2	5
Equinoocio descendente.	74,02	12	8	14	12	33	*	5	3
I. Oitante.	72,91	8	6	25	6	22	5	5	2
II. Oitante.	74,45	6	4	16	7	26	3	6	19
III. Oitante.	73,71	3	*	22	8	34	8	10	3
IV. Oitante.	73,14	5	4	23	7	24	6	7	3

*Influencia correspondente aos pontos Lunares.*

TABOA VIII.		Numero dos dias.								
Pontos Lunares.	Claros.	Variaveis.	Nublados.	Cobertos.	Relampagos.	Trovoes.	Chuva.	Nevoa.	Aurora Austral.	Luz-Zodiacal.
Lua em conjunçãõ.	3	5	1	2	*	*	4	4	*	*
Lua em opposiçãõ.	*	5	4	2	*	3	5	6	*	*
I. Quarto.	*	5	6	*	1	1	2	4	*	*
II. Quarto.	2	7	2	*	3	2	4	4	*	2
Apogeu.	1	8	2	1	*	2	2	4	*	*
Perigeu.	3	6	3	*	1	1	4	6	*	*
Lunístico Austral.	3	5	3	1	1	2	6	4	*	*
Lunístico Boreal.	2	3	4	2	2	2	3	5	*	*
Equinoccio ascendente.	2	5	2	2	*	1	7	6	*	*
Equinoccio descendente.	3	8	1	*	4	1	3	4	*	*
I. Oitante.	*	5	4	2	2	*	4	4	*	*
II. Oitante.	*	9	2	1	1	3	5	5	*	*
III. Oitante.	1	3	6	2	*	2	4	4	1	*
IV. Oitante.	2	3	3	3	3	*	2	5	*	1

*Declinaçãõ Oriental d'Agulha-Magnética.*

TABOA IX.	Declinaçãõ maxima.	Declinaçãõ minima.	Declinaçãõ media do mez.	Declinaçãõ media da manhã.	Declinaçãõ media do meio dia.	Declinaçãõ media da tarde.
Fevereiro.	6° 55'	6° 25'	6° 38' 16"	6° 35' 59"	6° 41' 28"	6° 37' 20"
Março.	6 57	6 27	6 36 30	6 34 16	6 38 34	6 36 39
Abril.	6 52	6 28 30"	6 38 34	6 37 29	6 39 43	6 38 29
Maiõ.	6 52	6 34	6 39 55	6 39 21	6 41 3	6 39 22
Junho.	6 55	6 33	6 41 53	6 41 16	6 42 39	6 41 43
Julho.	6 52	6 30 30	6 39 19	6 38 58	6 39 31	6 39 28
Agosto.	6 43	6 27	6 35 26	6 35 46	6 35 19	6 35 13
Setembro.	6 48	6 33	6 39 27	6 39 10	6 39 54	6 39 16
Outubro.	6 46	6 23	6 36 43	6 35 5	6 37 54	6 38 11
Novembro.	6 39	6 26	6 33 43	6 32 42	6 33 59	6 34 28
Dezembro.	6 46	6 31	6 37 13	6 35 50	6 37 47	6 38 1

*Declinação media de duas em duas horas.*

TAB. X.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 horas da manhã.	12 horas da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	do dia.
Fever.	6° 35' 57"	6° 37' 21"	6° 38' 7"	6° 41' 28"	6° 39' 27"	6° 37' 11"	6° 35' 0"	6° 37' 47"
Março.	6° 33' 19"	6° 34' 12"	6° 35' 17"	6° 38' 34"	6° 37' 25"	6° 36' 34"	6° 35' 48"	6° 35' 54"
Abril.	6° 37' 28"	6° 37' 24"	6° 37' 15"	6° 39' 43"	6° 39' 8"	6° 38' 48"	6° 38' 30"	6° 38' 20"
Maió.	6° 39' 33"	6° 39' 42"	6° 38' 41"	6° 41' 3"	6° 40' 14"	6° 39' 22"	6° 38' 38"	6° 39' 36"
Junho.	6° 41' 6"	6° 41' 36"	6° 41' 3"	6° 42' 39"	6° 41' 52"	6° 41' 22"	6° 40' 44"	6° 41' 29"
Julho.	6° 38' 48"	6° 39' 10"	6° 38' 55"	6° 39' 31"	6° 39' 35"	6° 39' 44"	6° 38' 58"	6° 39' 14"
Agosto.	6° 36' 4"	6° 36' 2"	6° 35' 14"	6° 35' 19"	6° 35' 5"	6° 35' 25"	6° 35' 7"	6° 35' 28"
Setemb.	6° 39' 7"	6° 39' 20"	6° 38' 59"	6° 39' 54"	6° 39' 46"	6° 39' 22"	6° 39' 20"	6° 39' 24"
Outubr.	6° 32' 6"	6° 34' 42"	6° 35' 15"	6° 37' 54"	6° 39' 7"	6° 38' 5"	6° 37' 9"	6° 36' 20"
Nov.	6° 32' 58"	6° 32' 14"	6° 33' 7"	6° 33' 59"	6° 34' 31"	6° 34' 38"	6° 34' 26"	6° 33' 46"
Dez.	6° 35' 27"	6° 36' 2"	6° 36' 23"	6° 37' 47"	6° 38' 12"	6° 38' 15"	6° 37' 53"	6° 37' 26"

OBSER-

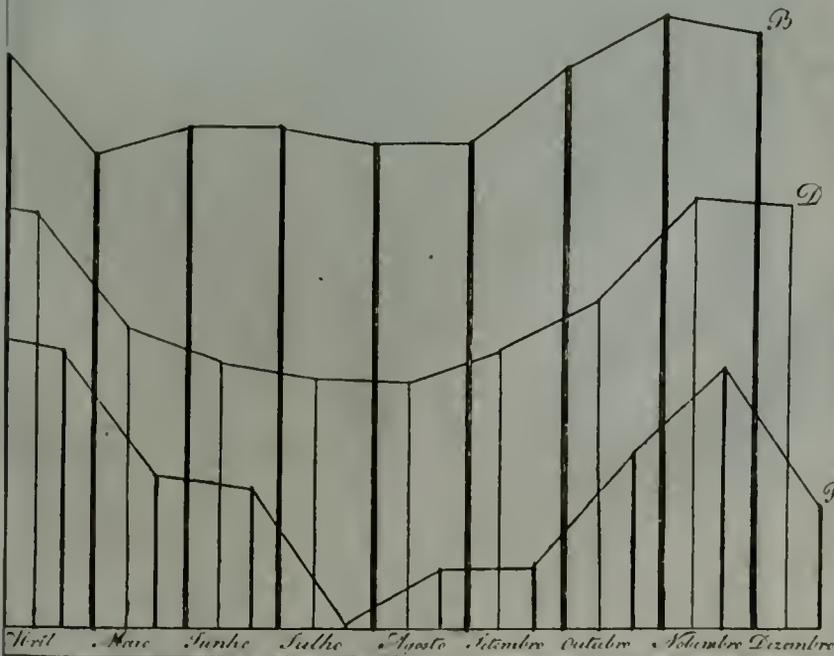
Anno 1785

Mem pag 369



Anno 1784

Mem. pag. 346



Anno 1785

Mem pag 369



Anno 1784

Mem pag 346



## OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS, E METEOROLOGICAS

*Feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de 1785*

POR BENTO SANCHES DORTA.

### *Resumo das Taboas das Observações.*

1 **O** Temperamento d'este anno, he quente, e humido: elle he notavel pela athmosfera se conservar tantas noites incendiada, principalmente em quasi todo o mez de Setembro: e pelas muitas nevoas permanentes de dia e de noite; havendo mezes, em que não pude descobrir Planetas, e Estrellas: de modo, que nos ultimos quatro mezes, havendo visiveis neste Meridiano 53 Eclipses dos Satellites de Jupiter, só observei 12.

2 O maior calor, que indicou o Thermometro de Fahrenheit, foi de 90° duas vezes neste anno: a 1.ª no primeiro dia de Fevereiro pelas 2<sup>h</sup> da tarde, estando o Ceo com algumas nuvens; e o vento correndo do N. E.: a 2.ª no dia 27 de Dezembro ás 4<sup>h</sup> da tarde; o Ceo achava-se nublado; o vento assoprava do S. E. Este gráo de calor he menor 4°, do que o anno preterito.

No dia 14 de Outubro ás 3<sup>h</sup> da tarde, expuz o Thermometro aos raios directos do Sol, e annunciou 114°.

3 O menor calor annunciado no mesmo instrumento he de 52°  $\frac{1}{2}$ ; no dia 3 de Julho ás 6<sup>h</sup> da manhã: o Ceo estava coberto com huma espessa nevoa; o vento vinha do N. O. Este he o maior frio, que tem aquí havido, depois que me occupo nestas observações.

Tom. II.

Aaaaa

A dif-

A differença do maximo ao minimo he de  $37^{\circ}\frac{1}{2}$ . Esta differença he menor, que a do anno passado  $1^{\circ}\frac{1}{2}$ .

4 O calor medio chegou a  $75^{\circ},22$ , somma de 2920 observações, ou 8 cada dia. Excedeu o do anno passado de  $1^{\circ},62$ .

5 Foi o calor medio da manhã  $72^{\circ},88$ : ao meio dia  $75^{\circ},1$ : da tarde  $76^{\circ},2$ .

Em todos os mezes d'este anno, exceptuando Novembro, e Dezembro sempre o maior calor do dia foi ás  $4^h$  da tarde: e nos mencionados mezes ás  $2^h$ .

As tres linhas curvas *AB*, *CD*, *EF* da estampa inclusa, deixaõ bem claramente vêr as variedades do calor que aquí soffremos. As Abcisas mostraõ o tempo, as Ordenadas a altura: a primeira vai dividida em grãos para servir de peti-pé.

6 A maior elevação do Mercurio no Barometro, foi observada de  $28^{\text{Pol. Lin.}} 7^{\text{Lin.}}$ ,35; a 23 de Agosto á meia noite: o Ceo estava com sua nevoa, o Thermometro mostrava  $73^{\circ}$ : o vento vinha do S. E.

7 A menor elevação foi de  $27^{\text{Pol. Lin.}} 10^{\text{Lin.}}$ ; a 25 de Outubro ás  $4^h$  da tarde: o Ceo estava nublado: o Thermometro em  $75^{\circ}$ : o vento era S. O.

A differença entre as alturas extremas do Azougue he de  $9^{\text{Lin.}}$ ,35.

8 A altura media do Barometro resultado de 2920 observações, ou 8 cada dia foi de  $28^{\text{Pol. Lin.}} 2^{\text{Lin.}}$ ,96.

9 A elevação media da manhã he de  $28^{\text{Pol. Lin.}} 3^{\text{Lin.}}$ ,1; ao meio dia  $28^{\text{Pol. Lin.}} 3^{\text{Lin.}}$ ,03; da tarde  $28^{\text{Pol. Lin.}} 2^{\text{Lin.}}$ ,83.

10 Neste anno houveraõ dias serenos 69; variaveis 146; nublados 87; cobertos de todo 63; de relampagos não se ouvindo trovões 47; de trovoada ao longe e ao perto 38; de chuva 150; de nevoas feccas, e molhadas 111; de Auroras Austraes 3; em fim de Luz-Zodiacal 9.

11 Choveu mais neste anno, do que em nenhum dos antecedentes, que se observáraõ, sendo a altura total da chuva  $55^{\text{Pol. Lin.}}$  0,63. Março foi o mez de mais chuva, Agosto de menos.

Na noite de 12 de Março choveu notavelmente, pois no espaço de  $3^{\text{h}}$   $\frac{1}{4}$  chegou a sua altura a  $4^{\text{Pol. Lin.}}$  2.

12 A vaporação chegou a  $35^{\text{Pol. Lin.}}$  2,29 : Janeiro foi o mez de maior vaporação, Junho da menor.

A chuva excedeu á vaporação  $19^{\text{Pol. Lin.}}$  8,34.

13 O Vento da manhã foi muitas vezes Variavel, e outras N. O.; de tarde dominou S. E. menos em Junho, e Setembro.

14 Ouviraõ-se trovões a 1, 3, 4, 9, 11, 16, e 17 de Janeiro; a 1, 2, 7, 10, 11, e 25 de Fevereiro, a 5, e 30 de Março; a 20 de Junho; a 8, 9, 10, e 18 de Setembro; a 13, 24, 25, e 29 de Outubro; a 4, 6, 13, 14, 15, 19, 20, 22, e 27 de Novembro; a 2, 3, 9, 16, e 24 de Dezembro.

15 Houve neste anno 3 Auroras Austraes, e funnamente radiantes, e todas no mez de Agosto a 20, 29, e 31: a de 29 começou muito luminosa, e espalhando-se por todo o Hemisferio, o incendiou de tal maneira, que todo elle parecia em fôgo: os Planetas que entaõ se achavaõ no Horizonte pareciaõ como ferro em braza: principiou esta Aurora ás  $2^{\text{h}}$  25' da manhã, findou com o dia. A' noite tornou a incendiar-se o Hemisferio todo; mas a sua inflammação em menor gráo do que a da manhã. A 31 do mesmo mez á  $1^{\text{h}}$  28' da manhã começou a apparecer a Aurora Austral muito avermelhada, e augmentando-se pouco a pouco, chegou a formar como huma grande fogueira na altura de  $30^{\circ}$  pouco mais ou menos; e assim se conservou por tempo de 20': depois foi diminuindo de inflammação, e acabou totalmente ás  $2^{\text{h}}$  20'. O Ceo estava muito obscurecido por toda a mais parte; po-  
rém

rém summamente tranquillo, pois não corria o menor vento.

Não houve só estes meteoros igneos; outro phenomeno muito mais admiravel pela sua raridade ví no Ceo no dia 15 de Fevereiro ás 6<sup>h</sup> 10' da manhã: consistia este em hum arco Iris correndo do S. O. ao N., todo de huma vivissima côr vermelha, sem mistura de outra alguma côr: durou até ás 6<sup>h</sup> 25'; depois tomou as mais côres do arco Iris ordinario. O Ceo achava-se ao mesmo tempo semeado de barras purpureas, e o intervallo do Ceo, que havia entre estas, parecia sanguineo.

16 Observou-se a Luz-Zodiacal a 22 de Janeiro; a 15, e 16 de Abril; a 5, e 8 de Junho; a 31 de Julho; a 23 de Setembro; a 1 de Outubro; e a 8 de Novembro. A de 15 de Abril, e 5 de Junho fôraõ muito brillantes, as outras pouco luzentes.

17 A influencia da Lua nos seus pontos observados, a respeito do maior gráo de calor, teve lugar no Lunifitico Boreal, e Perigeu: e o menor no II. Quarto. Pelo que pertence á elevação do Barometro, concorreu a maxima no I. Quarto, e I. Oitante: a minima no II. Oitante.

18 A Lua em todos os pontos concorreu com a chuva quasi igualmente, exceptuando o I. Quarto, pois este ponto foi, em que menos choveu.

19 Treze vezes se offereceu neste anno a Lua aos meus olhos com sua corõa: humas brancas, outras alguma ceufa amarellas: neste phenomeno excedeu aos mais annos, que tenho observado; porque no anno de 1784 ví 7; no de 83 ví 6; e no de 82 ví 5.

20 A maior declinação Oriental, que se observou na Agulha-Magnetica este anno foi de 6° 46' no dia 19 de Dezembro ao meio dia: o Ceo estava coberto; o Barometro achava-se na altura de 27<sup>Pel.</sup> 11<sup>Lin.</sup> ,4; e o Thermometro em 78°: o vento assoprava S.

21 A menor declinação foi de  $6^{\circ} 20'$  duas vezes neste anno: a 1.<sup>a</sup> no dia 28 de Janeiro ás  $6^h$  da manhã: achava-se o Ceo nublado, o Barometro na elevação de  $28^{Pol.}$

$3^{Lin.}$ , 1; o Thermometro annunciava  $80^{\circ}$ : o vento corria de L.: a 2.<sup>a</sup> a 2 de Junho ás  $2^h$  da tarde, tempo em que o Ceo estava coberto, e chovia: o Barometro na altura de

$28^{Pol. Lin.}$  5, 3; o Thermometro  $71^{\circ}, 5$ : o vento vinha de L.

A differença da maior declinação, á menor he de  $26'$ .

22 A declinação media de todo o anno somma de 2920 observações he de  $6^{\circ} 34'$ . Parece constante ir sendo a declinação da Agulha menor neste Meridiano.

23 Foi a declinação media da manhã  $6^{\circ} 35' 4''$ : ao meio dia  $6^{\circ} 34' 58''$ : da tarde  $6^{\circ} 34' 26''$ .

Eis-aquí agora as variedades da athmosfera desde 18 de Abril de 1784, até 18 de Abril de 1785, na Ilha da Trindade situada na Latitude Austral de  $20^{\circ} 30'$ : e na Longitude approximada de  $348^{\circ} 25'$  contados da Ponta mais Occidental da Ilha do Ferro, a qual Ilha nós povoámos no principio do anno de 1783.

Dias nublados 270; cobertos 76; variaveis 25; chuvosos 124; e por consequencia nem hum só dia houve claro.

Na noite do 1.<sup>o</sup> de Março de 1785 sentiaõ-se dous tremores de terra, com direcção segundo pareceu do Occidente para o Oriente; o 1.<sup>o</sup> ás  $9^h$ ; e o 2.<sup>o</sup> mais sensivel ás  $9^h 20'$ : ambos instantaneos.

No dia 26 do mesmo mez de Março pela tarde descarregou-se sobre a Ilha huma tromba d'agoa.

Estas observações communicou-m'as hum Official de Artilheria d'esta Praça, que esteve de guarnição nesta Ilha todo este tempo.

*Observações dos Eclipses dos Satellites de Jupiter, feitas com hum Oculo achromatico de Dolond de 17 pollegadas de fôco, que augmenta os objectos quasi 70 vezes.*

Anno 1785		Satel- lites.	Tempo verda- deiro.		Circunstancias das Observações.
			H.	M. S.	
Abril.	25	3. <sup>o</sup>	16	42 58 Im.	Ceo sereno.
Maio.	26	2. <sup>o</sup>	15	26 12 Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta visiveis : havia Luar claro.
	28	1. <sup>o</sup>	16	9 51 Im.	Idem.
	31	3. <sup>o</sup>	15	33 52 Em.	Ceo muito sereno.
Junho.	4	1. <sup>o</sup>	18	2 6 Im.	. . . . pouco sereno.
	13	1. <sup>o</sup>	14	23 2 Im.	. . . . muito sereno.
Julho.	6	1. <sup>o</sup>	14	27 40 Im.	. . . . pouco sereno.
	13	3. <sup>o</sup>	15	24 28 Em.	. . . . muito sereno.
	13	1. <sup>o</sup>	16	20 31 Im.	Idem.
	20	3. <sup>o</sup>	16	47 46 Im.	Ceo sereno.
	20	1. <sup>o</sup>	18	13 35 Im.	Idem.
Agosto.	5	1. <sup>o</sup>	16	30 11 Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta bem distinctas.
	5	2. <sup>o</sup>	17	30 13 Im.	Idem.
	6	4. <sup>o</sup>	15	28 52 Im.	Idem.
	6	4. <sup>o</sup>	17	34 21 Em.	Idem.
	7	1. <sup>o</sup>	10	58 27 Im.	Ceo muito pouco sereno, as faxas do Planeta mal se percebiao.
	14	1. <sup>o</sup>	12	53 58 Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta visiveis.
	21	1. <sup>o</sup>	14	49 20 Im.	Idem.
	23	4. <sup>o</sup>	11	43 19 Em.	Idem.
	23	2. <sup>o</sup>	12	8 24 Im.	Idem.
	25	3. <sup>o</sup>	12	58 11 Im.	Idem.
	25	3. <sup>o</sup>	15	26 37 Em.	Idem.
	28	1. <sup>o</sup>	16	44 54 Im.	Idem.
Setembro.	1	3. <sup>o</sup>	16	59 34 Im.	Ceo pouco sereno.
	6	1. <sup>o</sup>	13	10 9 Im.	Idem.
	13	1. <sup>o</sup>	15	6 55 Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta percebiao-se perfectamente.
	22	1. <sup>o</sup>	11	32 47 Im.	Idem.

Anno 1785	Satel- lites.	Tempo verda- deiro.		Circunstancias das Observações.
		H.	M. S.	
Outubro.	1	1. <sup>o</sup>	7 58 33 Im.	Ceo sereno. O Satellite muito proximo do Planeta. Duvidosa.
	10	1. <sup>o</sup>	6 35 15 Em.	Ceo pouco sereno, e forte crepulo.
	12	2. <sup>o</sup>	9 19 46 Em.	Ceo pouco sereno, as faxas do Planeta não se divisavao. Duvidosa.
	26	2. <sup>o</sup>	14 35 16 Em.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta bellamente visiveis.
Novembro.	5	3. <sup>o</sup>	7 46 56 Em.	Ceo sereno.
Dezembro.	2	1. <sup>o</sup>	8 57 34 Em.	Ceo pouco sereno. Duvidosa.
	25	1. <sup>o</sup>	9 2 56 Em.	Ceo sereno.
	25	3. <sup>o</sup>	9 33 45 Im.	Ceo pouco sereno.

O tempo verdadeiro d'estas observações, e de todas as dos outros annos passados, he determinado pelas alturas correspondentes, tomadas tres dias consecutivos: a saber, antes do dia da observação, no dia da observação, e no dia depois da observação. A Pendula he excellente, porém ella padece alterações bem sensiveis, por causa da continua variedade da atmosfera, pelo que pertence ao calor; influindo muito na dilatação dos metaes.

Não tendo eu este anno de 1785, outras Ephemerides por onde me guiasse nas mesmas observações, mais do que o *Connoissance des temps*; e vendo que no seu annuncio do Eclipse do Sol a 9 de Fevereiro, só o fazia visivel na Africa, e Asia; procurei saber se tambem o seria neste Meridiano; e com effeito depois de se ter calculado graficamente com toda a exactidão, achou-se ser tambem aqui visivel.

Eis-aquí a sua determinação.

Principio do Eclipse do Sol a 9 de Fevereiro ás 7<sup>h</sup> 0' da manhã.  
 Meio . . . . . ás 8<sup>h</sup> 10' da . . . .  
 Fim . . . . . ás 9<sup>h</sup> 26' da . . . .  
 Grandeza . . . . . 10<sup>d</sup> 40'

Eu me dispuz a observar este Eclipse ao Oculo do Quadrante, seguindo o conselho de Mr. de la Lande §. 2485: cujas observações são as seguintes.

*Observações do Eclipse do Sol no dia 9 de Fevereiro de 1785.*

Tempo verdadeiro.			
h.	m.	s.	
7	40	47	O principio do Eclipse não foi visto, por estar o Ceo com huma espedta nevoa.
7	42	0	Passagem do limbo precedente do Sol ao fio vertical do oculo do Quadrante.
7	42	10	..... da 1. <sup>a</sup> ponta da Lua ao fio horizontal.
7	42	53	..... da 1. <sup>a</sup> ponta da Lua ao fio vertical.
7	47	46	..... do limbo superior do Sol ao fio horizontal.
7	48	0	Principio da Immerção de huma grande mancha do Sol.
7	48	0	Passagem do limbo seguinte da Lua ao fio vertical.
7	48	0	..... da 2. <sup>a</sup> ponta da Lua ao fio horizontal.
7	48	24	Immerção total da mancha do Sol.
7	52	0	Passagem do limbo precedente do Sol ao fio vertical.
7	52	22	..... da 1. <sup>a</sup> ponta da Lua ao horizontal.
7	53	12	..... do limbo precedente da Lua ao vertical.
7	54	31	..... do limbo inferior do Sol ao horizontal.
7	58	4	..... do limbo seguinte do Sol ao vertical.
7	58	4	..... da 2. <sup>a</sup> ponta da Lua ao vertical.
7	58	57	..... do limbo precedente do Sol ao vertical.
7	59	27	..... da 1. <sup>a</sup> ponta da Lua ao vertical.
8	0	5	..... do limbo precedente da Lua ao vertical.
8	1	30	..... do limbo superior da Lua ao horizontal.
8	1	41	..... do limbo superior do Sol ao horizontal.
8	18	12	..... do limbo precedente do Sol ao vertical.
8	18	45	..... do limbo superior da Lua ao horizontal.
8	19	0	..... da 1. <sup>a</sup> ponta da Lua ao horizontal.
8	19	25	..... da 2. <sup>a</sup> ponta da Lua ao vertical.
8	20	32	..... do limbo precedente do Sol ao vertical.
8	21	12	..... do limbo inferior do Sol ao horizontal.
8	21	25	..... do limbo precedente da Lua ao vertical.
8	23	27	..... do limbo precedente do Sol ao vertical.
8	23	47	..... do limbo inferior do Sol ao horizontal.
8	24	16	..... do limbo inferior da Lua ao horizontal.
8	24	22	..... do limbo precedente da Lua ao vertical.

Não se observou o fim do Eclipse, porque o Ceo tornou a cubrir-se de nevoa espedta, como no principio.

Todos os limbos, de que observei as passagens verticaes, e horizontaes, são apparentes, porque o oculo do Quadrante inverte os objectos.

*Determinação da differença de Longitude de Lisboa ao Rio de Janeiro, pelas Observações correspondentes dos Satellites de Jupiter, e Eclipse da Lua.*

Anno 1781.	Observações feitas no Rio de Janeiro.	Observações feitas ou reduzidas em Lisboa.	Differença em tempo entre os dous Meridianos.	Tempo verdadeiro.		
				H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.
Agoſto 17	6 4 20	8 20 59	2 16 39	Emerſão do 1.º Satellite. Emerſ. do 1.º Sat. Immerſão do 1.º Satel.		
20	6 36 20	8 52 33	2 16 13			
1782.						
Março 17	12 49 2	15 5 9	2 16 7	Immerſ. do 1.º Satel: Observação reduzida a de 18 em Lisboa. Emerſ. do 1.º Satel. Observação reduzida a de 5 em Lisboa. Emerſ. do 1.º Satel. Emerſ. do 1.º Satel.		
Maió 25	13 27 29	15 44 5	2 16 36			
Julho 3	14 0 50	16 17 40	2 16 30	Principio do Eclipse da Lua. Fim do Eclipse da Lua. Immerſ. do 1.º Satel. Immerſ. do 1.º Satel.		
28	8 41 40	10 58 32	2 16 52			
Agoſto 13	7 3 48	9 20 10	2 16 22	Immerſ. do 1.º Satel. Observação reduzida a de 6 em Lisboa. Immerſ. do 1.º Satel. Observação reduzida a de 22 de Lisboa. Immerſ. do 1.º Satel. Immerſ. do 1.º Satel. Immerſ. do 1.º Satel. Observação reduzida a de 23 de Lisboa. Immerſ. do 2.º Satel.		
1784.						
Março 6	11 22 5	13 38 49	2 16 44	Differença media dos meridianos de Lisboa, e Rio de Janeiro.		
6	13 48 0	16 4 19	2 16 19			
Junho 17	12 39 14	14 55 13	2 15 59			
Julho 3	10 51 13	13 7 41	2 16 28			
1785.						
Junho 4	18 2 6	20 18 31	2 16 25			
Julho 20	18 13 35	20 29 56	2 16 21			
Agoſto 7	10 58 27	13 15 20	2 16 53			
14	12 53 58	15 10 4	2 16 6			
21	14 49 20	17 5 37	2 16 17			
23	12 8 24	14 25 5	2 16 41			
				H. M. S. T.		
				2 16 27 16		

## N O T A.

Todas as Observações de Lisboa foram feitas pelos Senhores Ciera pai, e filho. Entre muitas, que estes Senhores nos remetterão, achei correspondentes ás minhas, como se vê na Taboa presente.

Como não tenho correspondente á minha Observação de 25 de Maio de 1782; eu empreguei a Observação feita em Lisboa a 18 do mesmo mez, accrescentando-lhe quatro revoluções do 1.<sup>o</sup> Satellite, conforme as Taboas 7<sup>a</sup>, 1<sup>b</sup>, 54', 24'' (Astron. de la Lande), que dá a Observação em Lisboa a 25 de Maio ás 15<sup>h</sup>, 44', 5'' correspondentes á do Rio de Janeiro.

Igualmente não achei correspondente á minha Observação de 3 de Julho de 1782; pelo que vali-me da feita em Lisboa a 5 do mesmo mez, diminuindo-lhe huma revolução do 1.<sup>o</sup> Satellite tirada das mesmas Taboas 1<sup>a</sup>, 18<sup>b</sup>, 28', 36'', de que resulta a Observação em Lisboa a 3 de Julho ás 16<sup>h</sup>, 17', 40'' correspondente á do Rio de Janeiro feita no mesmo dia.

O mesmo succedeo ás outras minhas Observações de 4 de Junho; 20 de Julho; e 21 de Agosto de 1785: pelo que romei as feitas em Lisboa a 6 de Junho, 22 de Julho, e 23 de Agosto de 1785; e diminuindo-lhes em cada Observação huma revolução do 1.<sup>o</sup> Satellite, por este artificio ficárao sendo correspondentes ás minhas.

Eu faço uso destas Observações reduzidas, bem persuadido que hum número grande de factos, dá huma maior quantidade de relações, e segura summamente as consequencias.

Se algum dia chegarem á minha mão mais algumas Observações feitas no nosso Meridiano de Lisboa, ou em outro qualquer, não duvido fazer nova combinação: por agora devo seguir o resultado, que estas me apresentão.

DIA-

## DIARIO METEOROLOGICO.

7 A N E I R O de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	N.	S. O.	77,66	80.	79.	7	.	Coberto, chuva, e trovões.
2	Var.	S. E.	77,33	79.	79,87	.	1,5	Variavel.
3	Var.	S. E.	75,16	78.	80,75	.	2	Var., e trovões de noite.
4	N. O.	S. E.	79,41	82.	81,94	0,3	0,5	Nub., trovões, e chuva.
5	N. O.	S. E.	79,83	80.	79.	0,25	0,5	Cob., nev. com seu orvalho.
6	N. O.	S. E.	77.	78,5	80,12	5	.	Cob., nev. de manhã, de tarde chuva.
7	Var.	S. E.	78,16	80.	80,25	.	1,5	Var., e nev. de manhã.
8	Var.	S. E.	77.	79,5	80,62	0,25	0,5	Nub., orv., e relamp. O mar algum tanto luminoso.
9	N. O.	S. E.	78,33	81.	80.	0,17	0,8	Nub., trovões, e orv.
10	S.	S. E.	77,66	78,5	80.	0,17	0,5	Var., orv., e relamp.
11	Var.	S. E.	79,41	82.	80,4	27	.	Var., trovões, e chuva.
12	O.	S. E.	75,75	77,5	76,12	7	.	Cob., e chuva. Mar muito luminoso.
13	Var.	S. E.	74,33	75,5	77,75	0,2	1	Cob., e orv.
14	N. O.	S. E.	77,66	82.	86.	.	2,5	Nub., nev., e relampagos.
15	Var.	S. E.	81,33	85.	85,4	.	3	Nub., e relampagos.
16	N. O.	S. E.	80,16	84,5	87,4	.	5	Var., e relampagos.
17	Var.	Var.	82,83	84,5	84,12	4	.	Var., trov., e chuva.
18	Var.	S. E.	79,33	80.	80,75	5	.	Idem.
19	Var.	S. E.	78,16	81.	82,75	.	1,5	Nub.
20	Var.	S. E.	78,83	83.	84.	.	5	Idem.
21	Var.	Var.	81,5	85.	82,5	0,2	1,8	Var., e algum orv.
22	Var.	S. E.	80,33	83.	87,62	.	5	Nub. Luz-Zodiacal ás 3 <sup>h</sup> da manhã, á noite relampag.
23	N. O.	S. E.	81,5	86.	86.	.	4	Nub.
24	Var.	S. E.	81,83	84.	84,37	.	2	Idem.
25	Var.	S. E.	80,16	82,5	84,62	.	3	Sereno.
26	N. O.	S. E.	80,25	82,5	85,4	.	4,5	Idem.
27	N.	S. E.	81,5	85.	86.	.	2	Var. De noite o Ceo algum tanto avermelhado. O Mar hum pouco luminoso.
28	Var.	Var.	80,66	83.	83,62	.	2,8	Nub., e relampagos. Mar luminoso.
29	N. O.	S. E.	79.	82.	83,4	.	4	Nub., e relampagos.
30	Var.	S. E.	79,16	84.	86,12	.	3	Nub. Mar muito luminoso.
31	Var.	S. E.	81,16	84,5	88,31	.	5	Sereno.

## DIARIO METEOROLOGICO.

FEBREIRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	Var.	Var.	82,83	86.	87.	0,3	3,5	Var., trovões, e chuva. O mar luminoso.
2	N. E.	S. E.	81.	85.	84,25	0,25	4,6	Var., trovões, e algum orv.
3	N. O.	S. E.	79,16	81,5	80,9	7	.	Cob., e chuva.
4	Var.	S. E.	76,66	77,5	78,02	0,2	1	Cob., nevoa, e orvalho.
5	N. O.	S.	77,16	79,5	80.	.	1	Cob., e nevoa.
6	Var.	O.	78.	79,5	81,25	2	.	Cob., nevoa de manhã, de tarde chuva.
7	Var.	Var.	79,5	82.	82,9	.	3	Var., nevoa, e trovoada.
8	L.	S. O.	79,83	80,5	80,75	0,3	1,5	Var., nev. com feu orvalho.
9	N. O.	N. O.	79,16	81,5	82.	.	4,5	Nub., nev., e relampagos.
10	N. O.	S. E.	78,5	80.	81,6	4	.	Var., nev., depois trovões, e chuva.
11	S. E.	S. E.	78,5	80.	80,5	4	.	Idem.
12	N. O.	Var.	76,83	78.	78.	4	.	Cob., nevoa de manhã, depois chuva.
13	N. O.	S. E.	76.	76.	76,4	6	.	Idem.
14	N.	S. E.	75,16	77.	78,6	.	1	Nub., e nev. de manhã.
15	Var.	S. E.	77,33	81.	81,75	0,3	0,5	Var., nev., e orv. Neste dia apparecco hum phenomeno, que descreverei em outra parte.
16	N. O.	S. E.	78.	80,5	82,25	.	2	Nub. A Lua com sua corôa amarela.
17	N. O.	S. E.	78.	80,5	82.	.	2	Cob:
18	N. O.	S. E.	77,5	80,5	82,75	.	2,5	Ser.
19	N. O.	S. E.	79.	82.	84.	.	4	Ser. De noite relampagos.
20	N. O.	N.	80.	83.	83.	0,25	0,8	Var. com feu orv.
21	N. O.	Var.	77.	78.	79,4	2	.	Var., e chuva.
22	N. O.	S. E.	79,5	83,5	83,25	.	1,5	Nub. A Lua com corôa blanc.
23	N. O.	S. E.	79.	81,5	82,75	.	2	Var.
24	N. O.	Var.	80.	83,5	83,75	.	3,5	Ser. De noite relampagos.
25	N. O.	S. O.	80,41	84.	83.	.	4	Nub. De tarde trovoada.
26	N. O.	Var.	78,33	81.	80,9	9	.	Cob., nev., e chuva. O mar muito levantado.
27	S. O.	S. O.	78,33	78,5	78.	13	.	Cob., e chuva.
28	Var.	S. O.	77.	78,5	78,6	18	.	Nub., e chuva.

## DIARIO METEOROLOGICO.

MARÇO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quan- tidade de chuva.	Quan- tidade de vapor.	Estado do Coo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	Var.	S. E.	76,5	77,5	78,5	0,17	0,5	Cob., orvalho.
2	Var.	S. E.	77.	79,5	80,25	.	3	Nub.
3	N. O.	S. E.	77,8	80.	79,25	0,25	0,4	Var., orv., e relampagos.
4	N. O.	S. E.	76,83	79.	80.	3	0,3	Var., chuv., e relampagos.
5	Var.	S.	78,66	80,5	81,25	4	.	Var., chuva, e trovões.
6	O.	S.	77,5	78	79,5	.	1	Cob., e relampagos.
7	N. O.	S. E.	77,83	80,5	80.	.	2	Var., e relampagos.
8	Var.	S. E.	77,83	80.	80.	1	.	Var., chuva, e relampagos.
9	Var.	S. E.	76,66	79.	79,61	2	.	Idem.
10	Var.	S. E.	76,5	73.	73,87	2,5	.	Idem.
11	N. O.	S. E.	75,5	76.	77,75	10	.	Idem.
12	N. O.	O.	76,5	77.	76,4	47	.	Cob., e chuva.
13	Var.	S. E.	75.	75,5	75.	5,5	.	Idem.
14	Var.	Var.	73,33	75.	74.	7	.	Nub., e chuva.
15	Var.	S.	74,5	75,5	74.	3	.	Cob., e chuva.
16	Var.	Var.	71,66	74.	74,1	2	.	Var., e chuva.
17	Var.	L.	70,83	73,5	73,5	2,5	.	Idem.
18	Var.	S. E.	73.	73,5	74.	1	.	Idem.
19	Var.	S. O.	71,33	72,5	72,4	0,5	.	Cob., e chuva.
20	N. O.	S. E.	72,5	73.	73,25	2,5	.	Nub., e chuva.
21	N. O.	S. O.	73,66	74.	75.	1	.	Cob., e chuva.
22	S.	S.	73,5	75.	74,5	1,5	.	Idem.
23	L.	S.	73,66	75,5	76.	0,5	.	Nub., e chuva.
24	S. E.	S. E.	75,33	76.	76.	0,25	.	Var., e chuva.
25	Var.	S. E.	74,33	75.	75,5	0,33	0,2	Idem.
26	Var.	S. E.	75.	76,5	77,5	.	0,8	Nub.
27	N. O.	S. E.	75,33	77,5	78.	.	1	Idem.
28	N. O.	S. E.	77,5	79,5	79,75	.	1,5	Nub., nev., e relampagos.
29	Var.	S. O.	77,66	79.	77,75	1	.	Var., nev., e chuva.
30	Var.	S. E.	76,16	78.	77,9	49	.	Var., trovoada, e chuva.
31	S. E.	S. E.	76,66	77,5	78,4	.	0,8	Nub., e relampagos.

## DIARIO METEOROLOGICO.

A B R I L de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quan- tidade de chuva.	Quan- tidade de vapor.	Estado do Cco.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	N. O.	S. E.	76,5	78.	78.	.	1	Nub., nev., e relampagos.
2	L.	S. O.	76,16	76,5	75.	18	.	Cob., e chuva.
3	L.	S.	72,16	72,5	72,75	4	.	Gob., nevoa, e chuva.
4	N. O.	S. E.	72,33	74,5	75,12	0,13	.	Var., e chuva.
5	Var.	N.	75,33	78.	81,75	.	0,3	Nub.
6	Var.	S.	78,5	81.	80.	24	1,5	Nub. De noite chuva.
7	L.	S. O.	76,16	77.	77.	10	.	Var., e chuva.
8	O.	S.	72.	73.	74.	3,5	.	Idem.
9	Var.	S. E.	73,16	75.	76.	2,5	.	Idem.
10	Var.	Var.	73,33	74,5	74,62	.	0,5	Nub.
11	N. O.	S. E.	72,16	74.	75,5	.	0,5	Nub., e nevoa.
12	N. O.	S. E.	72,66	74.	76,25	.	0,8	Idem.
13	N. O.	S. E.	73,83	77.	78,62	.	1	Ser.
14	N. O.	S. E.	75,16	78,5	80,25	.	0,8	Ser., nev., e relamp.
15	N.	N.	76,33	77.	78,5	.	1	Var. Luz Zodiacal mui ra- diante ás 7 <sup>h</sup> $\frac{1}{4}$ da noite.
16	L.	S. E.	75,5	78.	79,75	.	1	Ser. Luz Zodiacal ás 7 <sup>h</sup> da noire.
17	Var.	S. E.	76,5	80.	82,4	.	1,5	Ser., e nevoa.
18	N. O.	Var.	77,66	81,5	84,15	.	0,8	Ser.
19	N. O.	S. E.	79.	81.	83,15	.	0,7	Var., e relampagos.
20	O.	S.	77,66	81.	80,15	0,25	1	Var., relamp., e chuva.
21	N. O.	S. E.	75,66	78.	79.	.	0,9	Var.
22	N. O.	S. E.	77,33	79.	81.	.	0,5	Var., e relampagos.
23	Var.	S. E.	76,5	78.	79,75	.	2	Var., e nevoa.
24	N.	S. E.	75,33	77,5	79,75	.	1	Idem.
25	N. O.	S. E.	73,66	77,5	79,5	.	0,8	Ser.
26	N. O.	S. E.	74,5	77,5	79,75	.	0,5	Idem.
27	N. O.	S. E.	76,15	79.	81,25	.	0,8	Ser., e nevoa.
28	N. O.	S. O.	77.	80.	78,4	12	.	Var., e chuva.
29	S. O.	S. E.	69,83	71.	71,25	0,25	0,3	Idem.
30	N. O.	S. E.	66,83	69.	71,4	.	0,4	Nub.

DIARIO METEOROLOGICO.

M A I O de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	N.	S. E.	69,66	72.	74.	.	0,5	Nub., e nevoa.
2	N. O.	Var.	70,5	74.	75.	.	0,4	Var.
3	Var.	S. E.	72.	72.	73.	0,17	.	Cob., e orvalho.
4	N. O.	S. E.	70.	70,5	72,75	.	0,4	Var.
5	N. O.	S. E.	69,5	71.	73.	.	0,5	Nub.
6	Var.	S. E.	68,16	71.	73,25	.	0,6	Nub., e nevoa.
7	N. O.	S. E.	70,5	73.	75.	.	1	Ser., e nevoa.
8	N. O.	Var.	72,66	75,5	77,6	.	1	Nub., e nevoa.
9	Var.	Var.	74,33	77.	75,6	2	.	Cob., e chuva.
10	Var.	Var.	72,66	71,5	71.	12	.	Idem.
11	S. O.	S. E.	68,5	69.	70,5	4	.	Var., e chuva.
12	N. O.	S. E.	69,33	70,5	73.	3	.	Var., nevoa, e chuva.
13	N. O.	N. O.	70.	69,5	69,6	4	.	Cob.
14	N. O.	S. E.	67,33	69.	70,75	.	0,3	Var.
15	N. O.	S. E.	66,83	68,5	69,25	0,13	0,2	Nub., nev. com feu orvalho.
16	N. O.	S. E.	68,33	70.	71,75	.	0,5	Var.
17	N. O.	S. E.	66,5	69.	71,5	.	0,5	Ser., e nevoa.
18	N. O.	S. E.	68,5	70.	72,5	.	0,25	Ser. A Lua no principio da noite com sua corôa amarella, e depois branca.
19	Var.	Var.	68,66	73.	73,63	.	0,5	Nub., e nev. A Lua com corôa branca.
20	N. O.	N.	68.	71.	73,5	.	0,8	Nub., e nevoa.
21	Var.	S. E.	68.	70,5	73.	.	0,5	Ser., e nevoa.
22	Var.	S. E.	68.	70,5	73,5	.	0,8	Ser.
23	O.	S. E.	68.	70,5	75,62	.	0,5	Ser., e nevoa.
24	Var.	S. E.	70.	72.	75.	.	1	Idem.
25	N.	Var.	72,5	73,5	76.	.	1	Var., e nevoa.
26	N. E.	S. E.	72,5	73.	76.	.	0,4	Ser., e nevoa.
27	N.	S. E.	71,5	72,5	73,6	.	0,5	Ser.
28	Var.	Var.	69,16	70,5	74,5	.	0,4	Ser., e nevoa.
29	N. O.	S. E.	68.	70,5	73.	.	0,4	Ser.
30	N.	S. E.	67,5	69,5	72.	.	0,6	Ser., e nevoa.
31	Var.	S. E.	67.	69.	72.	.	0,5	Idem.

## DIARIO METEOROLOGICO.

JUNHO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	Var.	Var.	69,33	69,5	71.	1,5	.	Var., nevoa, e chuva.
2	Var.	Var.	69,5	71.	71,62	.	0,4	Var., e nevoa.
3	N.	S. E.	70.	72.	74.	.	2	Idem.
4	O.	N.	70.	71,5	73,75	.	0,4	Sereno.
5	Var.	S. O.	69,66	71,5	72.	.	0,2	Var., e nev. Luz-Zodiacal mui resplandecente, ás 5 <sup>h</sup> $\frac{1}{2}$ da manhã.
6	Var.	S. E.	69,16	70.	71.	.	0,2	Var.
7	Var.	S. E.	68,16	69,5	70,75	.	0,3	Ser., e nevoa.
8	S. O.	S. E.	66,83	69.	71,4	.	0,2	Ser. Luz-Zodiacal ás 4 <sup>h</sup> $\frac{1}{4}$ da manhã.
9	N. O.	S. E.	67.	67,5	70,4	.	0,3	Ser., e nevoa.
10	N. O.	S. E.	67.	68.	71.	.	0,25	Idem.
11	Var.	S. E.	62,66	69.	72,6	.	0,35	Idem.
12	N. O.	S. E.	68,5	70.	72,4	.	0,18	Idem.
13	N. O.	S. E.	68.	70.	72,4	.	0,26	Idem.
14	N. O.	Var.	65,66	70.	74,62	.	0,3	Idem.
15	Var.	N. O.	72,33	76,5	79,5	.	1	Nub., e relampagos.
16	N. O.	S.	74,16	73,75	76,62	0,13	0,5	Var., orv., e relamp.
17	Var.	S. E.	69.	72.	71,12	.	0,4	Ser., e nevoa.
18	Var.	N. O.	74.	76.	81,25	.	1,6	Var., e relampagos.
19	N. O.	Var.	73.	76.	80,25	.	0,8	Var.
20	N. O.	S. O.	72,83	75.	76,88	1	.	Var., trovoadas, e chuva.
21	S.	Var.	71,66	71.	69,9	2	.	Cob., nev., e chuveiros.
22	Var.	S. E.	65,66	65.	66.	4	.	Cob., e chuva.
23	O.	S. E.	60.	64.	66.	.	0,4	Nub.
24	N. O.	S. E.	59.	60.	61,25	.	0,2	Nub., e nevoa.
25	Var.	Var.	58,91	64.	66,75	.	0,2	Ser., e nevoa.
26	Var.	S. E.	63,66	65.	61.	2,5	.	Cob., nevoa, e chuva.
27	O.	O.	57.	60,5	60,12	2	.	Var., e chuveiros.
28	N. O.	S. E.	60.	62,5	63,25	.	0,2	Var.
29	Var.	N. E.	57,66	62.	60,25	2	.	Ser., e chuva de noite.
30	Var.	S.	56,8	61.	59,4	4	.	Var., e chuveiros.

DIARIO METEOROLOGICO.

JULHO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	Var.	S.	56,8	60.	62.	0,5	.	Var. , e chuva.
2	N. O.	S. E.	58,16	62.	63,6	.	0,2	Ser. , e nevoa.
3	N. O.	S. E.	55,91	60.	62,75	.	0,3	Idem.
4	Var.	Var.	62.	65.	62,75	1,5	.	Cob. , e chuva.
5	N. O.	S. E.	61,33	62.	62.	1	.	Idem.
6	N. O.	S. E.	61,5	64.	65,87	1,5	.	Nub. , e chuva.
7	N. O.	S. E.	62.	65.	65,75	.	0,3	Nub. , e nevoa.
8	N. O.	S. E.	62,33	66.	68,25	.	0,3	Idem.
9	N. O.	S. E.	66.	67.	69,5	.	0,2	Var.
10	N. O.	S. E.	66,66	69,5	70,12	.	0,5	Ser.
11	N. O.	S. E.	62,83	66,5	69,25	.	0,5	Nub. , e nevoa.
12	S. O.	S. E.	65.	67.	66,5	0,14	0,6	Var. , e nevoa com seu orv.
13	N. O.	S. E.	64,66	67,5	70,25	.	0,3	Nub. , e nevoa. A Lua com duas corôas na mesma noite.
14	N. O.	S. E.	63.	67,5	70.	.	0,4	Ser.
15	Var.	S. E.	65,66	68.	70.	.	0,5	Nub. , e nevoa.
16	N. O.	S. E.	66.	68.	69,75	.	0,5	Idem.
17	Var.	S. E.	67.	69.	74,62	.	0,8	Var. ; e nevoa.
18	N.	S. O.	70,66	71.	71,12	.	0,7	Sereno.
19	N. O.	S. E.	67.	68,5	70.	.	0,3	Nub. , e nevoa.
20	Var.	S. E.	62.	67,5	70,62	.	0,5	Idem.
21	N. O.	S. E.	68.	72.	72,5	.	0,5	Nub. , e nevoa.
22	N. O.	S. O.	68,5	73,5	78,25	.	0,8	Idem.
23	Var.	S. O.	71,33	71.	68,75	0,2	.	Cob. , e orvalho.
24	Var.	L.	67.	69.	69,75	.	0,3	Var.
25	N. O.	S. E.	66,83	69.	72,5	.	0,6	Nub. , e nevoa.
26	N. O.	S. E.	70,16	71.	74,5	.	0,8	Ser. , e nevoa.
27	N. O.	S. E.	70,83	72.	75,25	.	0,7	Idem.
28	N. O.	S. E.	72.	74,5	76,5	.	0,8	Ser.
29	N. O.	S. E.	70.	72.	73,25	.	0,8	Ser. , e nevoa.
30	N. O.	S. E.	69.	71.	73,5	.	0,6	Idem.
31	N. O.	S. E.	69,5	72.	75,5	.	0,8	Ser. Luz-Zodiacal pouco luminosa ás 8 <sup>h</sup> , e 10 <sup>h</sup> da noit.

## DIARIO METEOROLOGICO.

AGOSTO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
				°	°	Linh.	Linh.	
1	N. O.	N. O.	70,83	74.	77,75	.	0,5	Ser.
2	N.	S. O.	72,66	75,5	75.	.	0,8	Var.
3	Var.	S. E.	70,66	73.	74,62	.	0,7	Var.
4	Var.	S. E.	72.	73,5	72,62	.	1	Nub., e nevoa.
5	N.	S. E.	70,33	71,5	74.	.	1,5	Idem.
6	N. O.	S. E.	68,5	70,5	72,87	.	0,8	Nub.
7	Var.	Var.	67,87	71.	74.	.	1,3	Ser.
8	N. O.	S.	71,16	73.	74,12	.	0,8	Nub.
9	Var.	Var.	68,83	72,5	74,37	.	1	Nub. A Lua com sua corôa.
10	N. O.	Var.	69.	74.	77.	.	1,5	Nub.
11	Var.	S. E.	73.	75,5	76,12	.	1,3	Nub.
12	Var.	S. O.	71,5	74.	74.	.	0,4	Var., nev., com seu orv.
13	O.	S.	70.	71.	71.	0,17	0,4	Var., e nevoa.
14	N. O.	Var.	68,83	71.	74,25	.	0,5	Ser.
15	Var.	S. E.	69,5	73.	77.	.	0,6	Var.
16	N. O.	N. O.	71.	74.	77,75	.	1	Ser., e nevoa. A Lua com sua corôa.
17	Var.	Var.	72,5	74,5	74.	.	0,5	Nub., e nevoa.
18	Var.	S. O.	71,66	71,5	72,75	0,33	0,1	Var., com seu orvalho.
19	L.	S. E.	70,5	73.	73,12	.	0,3	Var.
20	Var.	Var.	67,83	72.	75,5	.	0,4	Ser., e nevoa.
21	N. O.	N. O.	71,33	74.	76.	.	0,5	Idem. Aurora Aufst. mui radiante começou ás 4 <sup>h</sup> 10', findou com a manhã.
22	Var.	S. E.	70,66	72.	73,62	.	0,3	Nub., e nevoa.
23	N. O.	S. E.	70,16	73.	73,25	.	0,5	Idem.
24	N. O.	S. E.	70,16	71,5	72,12	.	0,7	Ser., e nevoa.
25	Var.	S. E.	67,33	70.	71.	.	0,4	Idem.
26	N. O.	S. E.	67,66	69.	70,62	.	0,7	Idem.
27	N. O.	S. E.	66,66	69.	74,5	.	1	Ser.
28	Var.	S. E.	66,83	71,5	72.	.	0,8	Ser.
29	Var.	N.	67,16	72.	76,25	.	0,8	Ser., e nev. Aurora Aufst. summamente luminosa.
30	Var.	S. E.	69,83	74.	74,45	.	1	Nevoa todo o dia.
31	Var.	S.	72,16	74,5	76,25	.	1,3	Nev. todo o dia. Aur. Aufst. mui incendiada.

## DIARIO METEOROLOGICO.

S E T E M B R O de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	N. O.	N. O.	73,83	78,5	82,5	.	2,5	Nevoa rodo o dia.
2	Var.	N. O.	74,33	77.	81,5	.	2,25	Nevoa rodo o dia, de noite o Ceo avermelhado como ferro em braza.
3	N. O.	S.	76,83	78.	78.	.	1,8	Idem.
4	Var.	S. E.	74,16	75,5	74,25	.	2	Cob., e nevoa.
5	Var.	S. E.	71,5	74.	72,5	.	1,4	Var., e nevoa.
6	Var.	S. E.	72.	74,5	74,75	.	1	Nub., nev., e relamp. O Ceo rodo incendiado.
7	N. O.	N. O.	73,33	75,5	78,37	.	1	Nub., e nev. O Ceo incendiado toda a noite. A Lua com sua corôa.
8	Var.	S. E.	74,83	78.	80,12	.	1,5	Nub., nev., e trov. O Ceo como no dia antecedente.
9	Var.	S. E.	77,16	82,5	80,75	0,2	1,3	Cob., e nev. De noite o Ceo muito incendiado; e depois trovões, e chuva.
10	S.	S. O.	74,33	73.	73,62	4	.	Cob., trov., e chuva: parece da noite esteve o Ceo incendiado.
11	S. E.	Var.	70,66	71,5	71,25	1,5	.	Cob., e chuva.
12	Var.	Var.	70,33	71.	69.	4,5	.	Idem.
13	Var.	Var.	66,66	69,5	69.	.	0,4	Var.
14	Var.	Var.	67,33	69,5	71,25	.	0,3	Var.
15	Var.	S.	69,5	71,5	71.	0,1	0,2	Var., com seu orvalho.
16	Var.	S. O.	70,16	71.	71.	3	.	Cob., e chuva.
17	N. O.	Var.	74.	78.	77,25	.	0,7	Nub. A Lua com sua corôa.
18	S. E.	S. E.	73,82	76,5	77,25	5	.	Var., trovoad, e chuva.
19	Var.	S.	72,83	74.	72,75	3	.	Idem.
20	S. O.	S.	67,83	70,5	70,75	.	0,6	Nub.
21	N.	L.	68,83	72.	70,25	.	0,4	Var.
22	Var.	Var.	69.	73.	74.	.	0,5	Nub.
23	N. O.	S. E.	67,83	72.	73,25	.	0,8	Ser. Luz Zodiacal ás 8 <sup>h</sup> 15' da noite.
24	N. O.	N. E.	69,16	74.	78,38	2,5	1,2	Nub. A atmosfera muito incendiada.
25	S. O.	S. O.	68,16	68.	65,75	2	.	Cob., e chuva.
26	Var.	S. E.	65.	67.	65,5	0,1	0,35	Cob., e orvalho.
27	Var.	S. E.	65,5	68.	67,12	1,5	.	Cob., e chuva.
28	N. O.	S.	67,16	71.	68,75	4,5	.	Cob., nevoa, e chuva.
29	N. E.	Var.	67,33	69,5	69,33	2	.	Var., e chuva.
30	N. E.	S. E.	67,66	71.	71.	.	0,5	Var.

## DIARIO METEOROLOGICO.

O U T U B R O de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	Var.	S. E.	69,33	72,5	73,75	.	0,8	Var. Luz-Zodiacal ás 7 <sup>h</sup> 40' da noite.
2	Var.	S. E.	71,73	74.	74,75	.	1	Nub.
3	N.	S. E.	71,5	73,5	74.	.	0,5	Nub.
4	Var.	S. E.	70,5	73.	73.	.	0,8	Nub.
5	Var.	S. E.	70,33	72,5	73,25	.	0,5	Var.
6	N.	S. E.	71,16	74,5	74,4	.	1,3	Ser.
7	Var.	S. E.	71,5	74,5	74,4	.	1,5	Var., e nevoa.
8	L.	S. E.	73.	75.	75,75	.	1,5	Nub., e nevoa.
9	S. O.	S. E.	71,5	72,5	74,12	0,1	1	Var., nev. com feu orvalho.
10	N. O.	S. E.	70,66	75.	75.	.	1,3	Var.
11	N. O.	S. E.	73.	77.	77.	.	2	Var.
12	Var.	Var.	72,58	79.	81,12	.	2,4	Var.
13	N. O.	Var.	75.	80.	83.	4	2,8	Nub., trovões, e chuva.
14	Var.	S. E.	78,67	83.	82,75	.	2	Var., e relampagos. A Lua com sua corôa branca.
15	Var.	S. E.	77,33	79.	80,62	.	1,5	Nub., nev., e relampagos.
16	Var.	S.	77,92	79,5	78,75	0,2	1	Cob., e orvalho. A Lua com sua corôa branca.
17	Var.	S. E.	75.	76.	74,87	.	0,6	Var.
18	Var.	S.	71,5	73,5	71,75	4	.	Cob., e chuva.
19	Var.	S. E.	71,5	72.	69,5	0,5	2	Idem.
20	Var.	S. E.	69,16	73.	73,62	.	2	Var.
21	Var.	S. E.	71,66	74,5	75,25	.	3	Var.
22	Var.	S. E.	70,33	74.	71,66	.	3	Var., e nevoa.
23	Var.	S. E.	70,16	73.	73,67	0,1	1,5	Nub. com feu orvalho.
24	Var.	S. E.	71,33	75,5	77,75	0,1	2,5	Var., trovões, e orvalho.
25	N. O.	Var.	73,16	75,75	74.	9,5	.	Nub., trovões, e chuva.
26	Var.	Var.	68,66	72.	73,06	.	2,5	Nub.
27	Var.	S. E.	68.	73.	74,87	.	1,75	Ser.
28	N. O.	S. E.	70.	74.	75,25	.	1	Ser.
29	Var.	S. E.	73,5	77.	77,87	5	0,5	Nub., nev., trovões, e chuva.
30	Var.	Var.	75,5	76.	77,5	4,5	.	Cob., e chuva.
31	Var.	S. E.	73,08	74.	71,37	5,25	.	Idem.

DIARIO METEOROLOGICO.

NOVEMBRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	S. E.	71.	74.	74,87	.	1	Nub.
2	Var.	S. E.	72.	76.	75,83	.	3	Var. , e relampagos.
3	Var.	S. E.	74,83	77,5	77,87	.	3	Idem.
4	Var.	S. E.	75,5	80.	77,88	1	1	Var. , trovões , e chuva.
5	S.	Var.	74,83	76,5	76,25	.	2	Var.
6	Var.	Var.	74,33	77,5	77,5	0,2	1,5	Var. , trovões , e chuva.
7	Var.	S. O.	75,33	81.	77.	0,1	1	Nub. , com miudo orvalho.
8	Var.	S. E.	73,5	75,5	74,37	0,05	3	Var. , com miudo orvalho. Luz Zodiacal Iuzente às 7 <sup>h</sup> 40' da noire.
9	Var.	Var.	72,66	75.	74,87	.	2	Var.
10	Var.	S. E.	71,83	76.	79,12	.	1,25	Var. A Lua com corôa.
11	Var.	S. E.	75,16	76.	77.	4	.	Var. , nevoa , e chuva.
12	Var.	N. O.	75.	75.	74,87	2,5	.	Cob. , e chuva.
13	Var.	S. E.	74.	76.	75,25	1,5	.	Var. , trovões , e chuva.
14	N. O.	N.	74,83	79.	80,25	0,5	.	Idem.
15	Var.	Var.	76,66	81.	80,87	5	2	Nub. , trovões , e chuva.
16	Var.	S.	75,66	78.	77.	1	.	Cob. , e chuva.
17	Var.	S.	76.	78,5	78.	.	2,25	Var.
18	Var.	S. E.	74,33	77,5	77.	.	2,4	Var. , e relampagos.
19	Var.	S. E.	78.	82.	80,37	0,5	2,25	Var. , trovões , e chuva.
20	Var.	S. O.	76,5	77.	73,5	0,2	1	Idem.
21	Var.	S. E.	71,08	75,5	76,12	.	1,8	Nub.
22	Var.	S. E.	72,33	76.	77,75	0,5	2	Var. , trovões , e chuva.
23	Var.	S. E.	76.	80,5	80,37	0,25	3	Var. , relamp. , e chuva.
24	Var.	S. E.	76,83	79.	78,87	0,1	2,25	Var. , com miudo orvalho.
25	S. E.	S. E.	76,66	80.	79,87	0,1	2	Idem.
26	N.	N.	76,66	78.	77,37	7,5	.	Cob. , e chuva.
27	Var.	Var.	77,33	81,5	84,5	6,25	2,25	Var. , trovões , e chuva.
28	Var.	S. O.	77,16	78.	75,5	16	.	Var. , e chuva.
29	Var.	N. E.	74,08	76.	74,5	0,3	1	Cob. , e orvalho.
30	S. E.	Var.	74,33	77.	75,75	0,4	1,5	Var. , e orvalho.

## DIARIO METEOROLOGICO.

DEZEMBRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Coo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
1	N. O.	S. E.	74,66	78.	78,25	0,2	2,25	Var. , e chuva.
2	Var.	Var.	75,66	78.	80,75	3	.	Var. , trovões , e chuva.
3	Var.	S. E.	77,75	82.	78,12	3,4	.	Idem.
4	N. E.	S. E.	75,5	77.	76,94	0,5	1	Var. , e seu orvalho.
5	N. E.	S. E.	75.	77,5	77,75	0,25	3	Nub. , relamp. , e chuva.
6	Var.	S. E.	76,33	80.	80,5	0,1	2,6	Var. , e orv. muito miudo.
7	O.	S. E.	76,66	79,5	76,62	9	.	Cob. , e chuva.
8	Var.	S.	74,66	76,5	75,25	.	2	Var.
9	N. O.	S. E.	74,33	78.	79,75	.	3	Nub. , e trovões. A Lua com sua corôa.
10	N. O.	S. E.	77.	80.	80,31	0,2	2,25	Nub. , e orvalho.
11	Var.	S.	77,16	79.	78.	2	2,5	Var. , e chuva.
12	N. O.	S. E.	75,33	79,5	78,37	.	1,5	Var.
13	Var.	S. E.	77,5	80.	80,25	.	1	Var.
14	N. O.	S.	78.	82.	81,25	.	1,8	Var. , e relampagos.
15	Var.	S. E.	79.	83.	82,37	1	2	Nub. , e chuva.
16	Var.	S. E.	79.	82.	81,25	8	1,3	Cob. , trovões , e chuva.
17	L.	S. E.	77,16	79.	78,5	0,5	.	Cob. , e chuva.
18	N. O.	S.	75,83	78.	77,87	0,75	.	Idem.
19	N. O.	Var.	76.	78.	76,88	4,5	.	Idem.
20	Var.	S.	75,66	75.	73,33	2,5	.	Idem.
21	Var.	S.	72.	76.	74,37	.	0,4	Var.
22	N. O.	Var.	73.	76,5	76,75	.	2	Var.
23	N.	S. E.	75,33	79.	80,5	.	2,25	Ser. , e relampagos.
24	Var.	Var.	79.	83.	81,37	0,5	2,5	Var. , nevoa , trovões , e chuva.
25	N. O.	S. E.	78,33	84,5	84,37	.	3	Nub. , nevoa , e relamp.
26	Var.	S. E.	81,33	85.	85,75	.	3	Nub. , e relampagos.
27	Var.	S. E.	81,33	86,25	88,12	.	4,4	Var. , e relamp. O mar luminoso.
28	Var.	S. O.	84,5	89,5	84,87	0,3	3	Var. , com seu orvalho.
29	N. O.	S.	78,66	78.	76,25	1	.	Cob. , e chuva.
30	N. O.	S. E.	74,66	77,5	76,75	.	1,3	Cob.
31	N. O.	S. E.	74,83	79.	81,87	.	1,5	Ser. , e relampagos.

DIARIO METEOROLOGICO.

JANEIRO de 1785.

FEVEREIRO de 1785.

Dias do mez	BAROMETRO.				Bullola.	Dias do mez	BAROMETRO.				Bullola.
	Manhã.	Meio dia.	Tarde.	G. M. S.			Manhã.	Meio dia.	Tarde.	G. M. S.	
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.				Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.		
1	28 2,26	28 2,8	28 2,32	6 34 47	1	28 1,95	28 1,8	28 1,85	6 32 23		
2	28 1,43	28 1,3	28 1,55	6 33 47	2	28 1,65	28 1,6	28 1,4	6 34 30		
3	28 1,61	28 0,9	28 0,85	6 36 25	3	28 1,35	28 1,3	28 1,32	6 31 10		
4	28 1,1	28 0,65	28 0,81	6 36 18	4	28 1,56	28 1,75	28 1,51	6 33 20		
5	28 1,61	28 1,7	28 1,47	6 35 6	5	28 1,85	28 1,8	28 1,56	6 34 0		
6	28 1,41	28 1,5	28 1,8	6 36 40	6	28 2,21	28 2,1	28 1,7	6 33 27		
7	28 1,97	28 1,9	28 1,97	6 36 0	7	28 2,03	28 2.	28 1,81	6 34 12		
8	28 1,73	28 1,4	28 0,9	6 35 28	8	28 2,58	28 2,6	28 2,37	6 31 55		
9	28 0,03	27 11,7	27 11,8	6 34 45	9	28 3,1	28 3,6	28 3,15	6 32 0		
10	27 11,65	27 11,6	27 11,02	6 34 50	10	28 3,1	28 2,6	28 2,75	6 34 25		
11	27 11,33	27 11,6	27 11,75	6 36 37	11	28 2,8	28 2,2	28 1,85	6 32 18		
12	28 1,7	28 2,2	28 2,65	6 34 2	12	28 1,35	28 1,4	28 1,02	6 34 20		
13	28 2,75	28 3,1	28 2,47	6 35 0	13	28 1,6	28 1,8	28 0,97	6 34 53		
14	28 2,93	28 2,5	28 2,2	6 34 2	14	28 1,33	28 1,4	28 1,0	6 37 40		
15	28 2,76	28 2,6	28 1,92	6 35 28	15	28 1,8	28 1,8	28 1,72	6 34 40		
16	28 1,51	28 1,3	28 0,92	6 34 16	16	28 2,43	28 2,3	28 2.	6 33 2		
17	28 1,51	28 2,25	28 2,17	6 34 40	17	28 2,5	28 2,6	28 1,95	6 32 0		
18	28 2,16	28 3,1	28 2,72	6 34 20	18	28 2,98	28 2,6	28 2,37	6 34 46		
19	28 3,03	28 2,6	28 1,77	6 31 13	19	28 1,83	28 2,6	28 2,37	6 33 43		
20	28 2,3	28 1,3	28 0,98	6 31 0	20	28 2,66	28 2,7	28 2,27	6 32 53		
21	28 1,48	28 1,25	28 1,37	6 30 0	21	28 2,31	28 1,8	28 1,17	6 36 8		
22	28 2,2	28 2,2	28 1,77	6 35 15	22	28 0,83	28 0,5	28 0,9	6 32 10		
23	28 3,15	28 2,9	28 2,82	6 32 35	23	28 0,1	28 0,25	28 0,11	6 36 40		
24	28 3,33	28 3,4	28 3,05	6 34 0	24	28 0,1	28 0,0	28 0,4	6 37 47		
25	28 3,32	28 3,1	28 2,6	6 32 25	25	28 0,36	28 0,7	28 0,8	6 37 10		
26	28 3,4	28 3,3	28 2,7	6 32 40	26	28 1,6	28 1,8	28 1,57	6 36 53		
27	28 3,23	28 3.	28 2,82	6 33 0	27	28 1,58	28 1,6	28 1,72	6 36 22		
28	28 3,3	28 3,2	28 2,8	6 29 40	28	28 2,27	28 2,9	28 2,75	6 38 15		
29	28 2,63	28 2,4	28 1,9	6 32 10							
30	28 2,22	28 2.	28 1,75	6 31 53							
31	28 2,05	28 2,1	28 1,45	6 31 51							

DIARIO METEOROLOGICO.

MARÇO de 1785.

ABRIL de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			Buffola.	Dias do mez.	BAROMETRO.			Buffola.
	Manhã.	Meio dia.	Tarde.			Manhã.	Meio dia.	Tarde.	
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.			Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	
1	28 2,43	28 2,4	28 2,25	6 34 5	1	28 2,3	28 2,2	28 2,32	6 32 35
2	28 2,1	28 2,1	28 2,12	6 35 7	2	28 3,1	28 3,2	28 4,16	6 34 0
3	28 2,5	28 2,5	28 2,02	6 35 32	3	28 5,16	28 5.	28 5,01	6 34 38
4	28 1,5	28 1,8	28 1,54	6 33 53	4	28 4,1	28 3,8	28 3,42	6 34 2
5	28 2,33	28 2,4	28 2,55	6 35 27	5	28 2,13	28 1,7	28 1,65	6 33 37
6	28 2,55	28 3,8	28 3,47	6 36 20	6	28 2,76	28 2,8	28 3,02	6 34 9
7	28 4,2	28 2,93	28 3,35	6 32 30	7	28 3,93	28 3,5	28 3,6	6 32 50
8	28 3,63	28 4.	28 2,6	6 35 23	8	28 3,96	28 4.	28 4.	6 34 33
9	28 2,56	28 2,2	28 2,1	6 35 50	9	28 4,5	28 4,5	28 4,45	6 32 53
10	28 1,73	28 1,7	28 1,55	6 38 0	10	28 4.	28 3,5	28 3,67	6 35 20
11	28 1,5	28 1,35	28 0,75	6 36 7	11	28 4,2	28 3,9	28 3,42	6 34 27
12	28 0,41	28 0,4	28 0,0	6 33 50	12	28 3,2	28 3.	28 2,72	6 33 13
13	28 1,23	28 1,2	28 1,2	6 36 27	13	28 2,8	28 3.	28 2,75	6 32 53
14	28 1,46	28 1,5	28 0,9	6 36 10	14	28 2,93	28 2,7	28 2,55	6 32 51
15	28 1,6	28 1,8	28 2,1	6 35 47	15	28 3,1	28 3,2	28 3,47	6 33 13
16	28 3,1	28 3,2	28 3,25	6 33 27	16	28 4.	28 3,2	28 3,37	6 34 40
17	28 4,1	28 4.	28 4,2	6 36 52	17	28 3,66	28 3,4	28 2,82	6 34 27
18	28 4,4	28 4,3	28 4,4	6 37 18	18	28 3,5	28 3,1	28 2,97	6 33 50
19	28 4,46	28 4,3	28 4,07	6 40 7	19	28 3,2	28 2,5	28 2,3	6 35 13
20	28 4,4	28 4,6	28 4.	6 37 55	20	28 3,66	28 3,8	28 4.	6 33 5
21	28 3,9	28 4.	28 3,27	6 35 40	21	28 4,26	28 4,3	28 4.	6 31 58
22	28 3,53	28 3,4	28 2,93	6 35 30	22	28 3,86	28 3,5	28 3,13	6 33 57
23	28 3,33	28 3,2	28 3,1	6 34 0	23	28 3,36	28 3,1	28 3,5	6 32 15
24	28 3,86	28 3,9	28 3,75	6 37 55	24	28 3,9	28 3,5	28 3,25	6 32 52
25	28 3,33	28 3,6	28 2,75	6 35 27	25	28 3,26	28 3,1	28 3,27	6 32 45
26	28 3,48	28 3.	28 2,87	6 35 12	26	28 3,56	28 3,3	28 3,05	6 28 40
27	28 3,33	28 3,3	28 2,97	6 35 57	27	28 3,22	28 2,8	28 2,4	6 28 0
28	28 3,06	28 3,6	28 3,2	6 35 40	28	28 2,3	28 2,7	28 2,92	6 31 30
29	28 2,5	28 2,8	28 2,5	6 35 7	29	28 4,86	28 4,6	28 4,37	6 31 22
30	28 3,32	28 3,5	28 2,7	6 35 40	30	28 4,63	28 4,6	28 4,4	6 32 45
31	28 2,93	28 2,7	28 2,5	6 35 32					

DIARIO METEOROLOGICO.

M A I O de 1785.

J U N H O de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			Buffola.	Dias do mez.	BAROMETRO.			Buffola.
	Manhã.	Meio dia.	Tarde.			Manhã.	Meio dia.	Tarde.	
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.			G. M. S.	Pol. L.	Pol. L.	
1	28 4,1	28 3,8	28 3,75	6 31 17	1	28 5,73	28 5,9	28 5,46	6 33 25
2	28 3,33	28 2,5	28 2,45	6 32 35	2	28 6,2	28 5,8	28 5,65	6 26 0
3	28 3,33	28 3,7	28 3,97	6 30 0	3	28 5,58	28 5,1	28 5.	6 28 20
4	28 5,33	28 5,4	28 5,3	6 34 30	4	28 5,03	28 4,5	28 4,62	6 33 5
5	28 5,43	28 4,7	28 4,72	6 35 5	5	28 4.	28 4,3	28 4,4	6 33 56
6	28 4,35	28 3,8	28 3,45	6 33 38	6	28 5,65	28 5,7	28 5,67	6 27 3
7	28 3,1	28 2,8	28 2,5	6 33 47	7	28 5,9	28 5,7	28 5,29	6 30 40
8	28 1,83	28 1,3	28 1,32	6 34 2	8	28 5,33	28 5,35	28 5,5	6 31 13
9	28 1,86	28 2,2	28 2,4	6 34 25	9	28 5,36	28 5,5	28 5,45	6 28 40
10	28 4,06	28 4.	28 3,85	6 39 25	10	28 5,5	28 5,3	28 5.	6 32 22
11	28 3,66	28 3,1	28 3,55	6 35 22	11	28 5,2	28 5,2	28 4,47	6 34 2
12	28 3,86	28 3,8	28 4,1	6 39 2	12	28 4,8	28 4,7	28 4,58	6 33 13
13	28 5,25	28 5,3	28 5,42	6 39 52	13	28 5,3	28 5.	28 4,59	6 33 58
14	28 5,9	28 6.	28 5,65	6 34 40	14	28 4,23	28 4.	28 3,76	6 35 40
15	28 6,18	28 6.	28 5,75	6 39 43	15	28 3,5	28 3,3	28 3,02	6 31 33
16	28 5,9	28 5,7	28 5,9	6 37 48	16	28 3,52	28 3,1	28 2,77	6 30 42
17	28 5,73	28 5,5	28 5,3	6 35 27	17	28 2,2	28 2,6	28 1,91	6 32 57
18	28 5,03	28 4,7	28 4,62	6 35 47	18	28 1,8	28 2,37	28 2,1	6 35 15
19	28 5,06	28 4,9	28 4,67	6 35 55	19	28 2.	28 2,2	28 1,6	6 34 40
20	28 4,93	28 4,9	28 4,35	6 37 29	20	28 3,1	28 3,33	28 3,9	6 31 50
21	28 3,93	28 3,4	28 3,15	6 38 33	21	28 4,6	28 4,37	28 4,6	6 33 45
22	28 2,6	28 2,4	28 2,12	6 38 0	22	28 6,2	28 6,07	28 5,87	6 35 18
23	28 2,9	28 2,9	28 3,27	6 35 43	23	28 5,6	28 6.	28 5,4	6 34 25
24	28 4,41	28 4,7	28 4,8	6 36 20	24	28 6,2	28 5,93	28 6,05	6 35 0
25	28 5,13	28 5.	28 4,55	6 35 20	25	28 2,6	28 3,37	28 2,01	6 32 58
26	28 5,13	28 5,2	28 4,6	6 35 16	26	28 1,7	28 1,63	28 1,2	6 37 3
27	28 4,4	28 4,3	28 3,95	6 35 0	27	28 3,3	28 3,1	28 3,47	6 31 13
28	28 4,63	28 4,5	28 4,2	6 32 25	28	28 4,5	28 4,4	28 4.	6 31 58
29	28 4,71	28 4,5	28 4,57	6 33 27	29	28 3,4	28 3,63	28 3,5	6 32 40
30	28 5,4	28 5,3	28 5,19	6 26 40	30	28 4,6	28 4,26	28 4,6	6 30 0
31	28 5,73	28 5,9	28 5,46	6 29 57					

DIARIO METEOROLOGICO.

JULHO de 1785.

AGOSTO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			Buffola.	Dias do mez.	BAROMETRO.			Buffola.
	Manhã.	Meio dia.	Tarde.			Manhã.	Meio dia.	Tarde.	
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.		Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 5,3	28 5,4	28 5,72	6 31 48	1	28 4,36	28 4,2	28 3,95	6 34 4
2	28 5,83	28 5,8	28 5,34	6 34 23	2	28 4,5	28 5,2	28 5,35	6 38 38
3	28 5.	28 4,5	28 4,72	6 32 30	3	28 6,06	28 6.	28 5,27	6 32 10
4	28 5,63	28 5,7	28 5,52	6 29 32	4	28 5,8	28 5,7	28 5,7	6 30 0
5	28 4,72	28 4,4	28 3,31	6 36 37	5	28 5,8	28 5,1	28 5,1	6 33 33
6	28 4,06	28 4,3	28 4,57	6 34 40	6	28 5,23	28 5.	28 4,5	6 35 0
7	28 5,63	28 5,7	28 4,98	6 35 0	7	28 4,65	28 4,65	28 4,2	6 35 48
8	28 4,6	28 4,9	28 3,6	6 35 0	8	28 4,83	28 4,7	28 4,47	6 33 0
9	28 3,53	28 3,6	28 3,68	6 37 27	9	28 3,86	28 3,9	28 3,42	6 36 30
10	28 4,63	28 4,8	28 4,54	6 34 57	10	28 3,33	28 3.	28 2,38	6 33 17
11	28 4,85	28 5,4	28 5,38	6 32 50	11	28 2,83	28 2,9	28 2,77	6 35 18
12	28 6,25	28 6,3	28 5,82	6 34 27	12	28 2,03	28 2,1	28 3,17	6 34 46
13	28 5,66	28 5.	28 4,35	6 38 18	13	28 5,6	28 5,6	28 5,85	6 31 28
14	28 4,06	28 3,9	28 3,5	6 36 13	14	28 6,16	28 5,8	28 5,38	6 37 10
15	28 3,93	28 4,1	28 3,78	6 32 50	15	28 4,7	28 4,4	28 3,97	6 34 57
16	28 4,06	28 4.	28 3,11	6 35 0	16	28 3,83	28 4.	28 3,85	6 32 18
17	28 1,33	28 0,6	28 0,4	6 35 0	17	28 4,56	28 4,8	28 5,2	6 33 27
18	28 4,06	28 4,6	28 4,29	6 33 3	18	28 5,96	28 6,7	28 5,91	6 34 25
19	28 6,1	28 5,7	28 5,02	6 34 22	19	28 6,2	28 5,5	28 4,9	6 30 29
20	28 4,16	28 4,2	28 3,94	6 36 38	20	28 4,03	28 3,9	28 3,12	6 31 25
21	28 3,86	28 4.	28 4,06	6 33 18	21	28 3,23	28 3,2	28 3,5	6 33 13
22	28 2,6	28 2,4	28 2,9	6 33 13	22	28 5,18	28 5,4	28 5,9	6 32 25
23	28 4,38	28 4,85	28 4,42	6 33 18	23	28 6,8	28 6,75	28 6,6	6 34 33
24	28 4,26	28 4,1	28 4,05	6 34 33	24	28 6,83	28 6,7	28 6,42	6 29 40
25	28 3,4	28 3,4	28 3,17	6 33 53	25	28 6,23	28 6,2	28 6,15	6 31 20
26	28 3,46	28 3,2	28 3,02	6 35 28	26	28 6,33	28 6,1	28 5,82	6 32 47
27	28 3,66	28 3,4	28 3,2	6 33 47	27	28 5,1	28 4,9	28 3,7	6 32 58
28	28 3,26	28 3,1	28 3,02	6 32 30	28	28 3,71	28 3,3	28 2,85	6 34 13
29	28 3,66	28 3,9	28 3,6	6 37 33	29	28 2,8	28 2,7	28 2,62	6 32 15
30	28 3,9	28 3,9	28 3,3	6 35 0	30	28 3,43	28 3,6	28 3,45	6 32 15
31	28 4,16	28 4,3	28 3,97	6 36 32	31	28 3,63	28 3,2	28 2,35	6 32 20

DIARIO METEOROLOGICO.

SETEMBRO de 1785.

OUTUBRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			Buffola.	Dias do mez.	BAROMETRO.			Buffola.
	Manhã.	Meio dia.	Tarde.			Manhã.	Meio dia.	Tarde.	
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.			Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	
1	28 2,21	28 1,85	28 1,52	6 32 52	1	28 3,87	28 4.	28 3,95	6 34 18
2	28 2,26	28 2,25	28 1,75	6 35 35	2	28 4, 4	28 4,6	28 4,05	6 35 33
3	28 3,85	28 3,7	28 4,25	6 34 0	3	28 4,25	28 3,9	28 3,98	6 32 40
4	28 5,35	28 5,3	28 5,32	6 34 43	4	28 3,83	28 3,8	28 3,56	6 34 27
5	28 4,8	28 4,6	28 3,82	6 29 33	5	28 3,72	28 3,6	28 3,31	6 38 10
6	28 4,43	28 4,5	28 3,95	6 30 18	6	28 3,1	28 2,6	28 2,19	6 38 17
7	28 2,76	28 2,5	28 2.	6 31 25	7	28 3,38	28 3,7	28 3,76	6 32 35
8	28 1,63	28 0,8	28 0,61	6 33 28	8	28 4,27	28 3,9	28 3,5	6 35 14
9	28 0,97	28 1,6	28 2,15	6 34 50	9	28 3,45	28 3,2	28 3,17	6 34 48
10	28 3,5	28 3,8	28 3,76	6 33 58	10	28 3,55	28 3,2	28 2,82	6 34 5
11	28 4,76	28 4,7	28 4,05	6 30 40	11	28 3,55	28 3,2	28 2,5	6 32 27
12	28 4,26	28 4,4	28 4,57	6 33 32	12	28 2,41	28 2,6	28 1,65	6 34 27
13	28 4,87	28 4,6	28 4,35	6 31 58	13	28 1,2	28 0,7	28 0,32	6 32 50
14	28 4.	28 3,8	28 3,37	6 35 57	14	28 0,76	28 0,7	28 0,74	6 31 33
15	28 3,33	28 2,9	28 2,5	6 36 22	15	28 0,52	27 11,7	27 11,64	6 31 2
16	28 1,77	28 1,2	28 0,5	6 34 8	16	27 11,77	28 0,5	28 0,24	6 33 55
17	28 0,18	28 0,7	28 0,86	6 37 45	17	28 1.	28 1,4	28 1,25	6 34 20
18	28 2,9	28 3,4	28 2,55	6 38 27	18	28 2,3	28 2,2	28 2,17	6 30 55
19	28 3,03	28 2,5	28 2,86	6 36 8	19	28 3.	28 3,2	28 3,14	6 31 40
20	28 4,66	28 5,2	28 5.	6 34 40	20	28 3,2	28 3,2	28 3,17	6 32 45
21	28 5,32	28 5,25	28 5,4	6 34 53	21	28 3,4	28 3,7	28 3,7	6 34 40
22	28 5,72	28 5,4	28 5,1	6 33 23	22	28 4,65	28 4,35	28 4,06	6 36 45
23	28 5,1	28 4,6	28 4,11	6 33 25	23	28 3,56	28 3.	28 3,9	6 33 25
24	28 2,9	28 2,3	28 1,98	6 31 27	24	28 1,1	28 0,4	27 11,66	6 31 33
25	28 4,75	28 5,7	28 6,08	6 34 37	25	27 10,83	27 11.	27 10,75	6 33 15
26	28 6,7	28 7.	28 6,53	6 31 45	26	27 11,86	27 11,5	28 0,02	6 36 27
27	28 6,9	28 6,8	28 6,71	6 33 3	27	28 0,76	28 0,5	28 1,02	6 35 20
28	28 6,13	28 6,3	28 5,3	6 34 33	28	28 2,47	28 2,1	28 1,9	6 35 40
29	28 5.	28 4,6	28 4,66	6 30 3	29	28 1, 8	28 1,2	28 0,31	6 34 33
30	28 4,5.	28 4,4	28 4.	6 36 12	30	28 0, 8	28 0,4	28 0,31	6 34 13
31					31	28 0,66	28 0,9	28 1,08	6 35 25

## DIARIO METEOROLOGICO.

NOVEMBRO de 1785.

DEZEMBRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			Buffala.	Dias do mez.	BAROMETRO.			Buffala.
	Manhã.	Meio dia.	Tarde.			Manhã.	Meio dia.	Tarde.	
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.			Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	
1	28 0,98	28 1,4	28 1,34	6 35 7	1	28 2, 4	28 2,6	28 2,02	6 35 38
2	28 1,65	28 1,9	28 1,57	6 37 58	2	28 0,76	28 0,6	28 0,45	6 36 30
3	28 1,35	28 0,9	28 1,18	6 35 0	3	28 1,06	28 1,1	28 0,97	6 39 40
4	28 1,53	28 1,2	28 1,27	6 36 20	4	28 1,73	28 2,5	28 1,87	6 37 13
5	28 2,43	28 2,8	28 2,75	6 36 10	5	28 2,03	28 2.	28 1,4	6 38 45
6	28 1,98	28 1,8	28 1,78	6 36 28	6	28 1,36	28 1,3	28 1,62	6 32 5
7	28 1,3	28 1,9	28 2,55	6 36 57	7	28 1,68	28 1,9	28 1,76	6 32 33
8	28 3,2	28 3,3	28 3,71	6 34 42	8	28 1,42	28 1,6	28 1,29	6 32 3
9	28 3,71	28 3,4	28 2,85	6 33 7	9	28 0,65	28 0,7	28 0,45	6 28 53
10	28 2,23	28 1,8	28 1,1	6 33 18	10	28 0,4	28 0,2	28 0,67	6 33 20
11	28 1,48	28 1,8	28 1.	6 34 17	11	28 1,53	28 1,7	28 1,7	6 30 40
12	28 0,4	28 0,4	27 11,62	6 34 20	12	28 1,66	28 1,9	28 1,71	6 33 40
13	27 11,7	27 11,9	27 11,97	6 35 50	13	28 1,9	28 2.	28 1,95	6 35 58
14	28 0,77	28 1,2	28 1,12	6 36 15	14	28 2,03	28 2.	28 1,62	6 40 3
15	28 1,43	28 1,1	28 0,65	6 35 3	15	28 1,15	28 1,3	28 0,52	6 34 13
16	28 1,46	28 1,8	28 1,57	6 34 17	16	28 0,02	27 11,6	27 11,2	6 39 0
17	28 1,93	28 1,6	28 1,3	6 34 20	17	28 0,03	27 11,7	27 11,3	6 30 47
18	28 1,33	28 1,1	28 1,02	6 35 12	18	27 11,58	27 11,6	27 11.	6 36 40
19	28 0,33	28 0,5	28 0,6	6 34 45	19	27 11,22	27 11,4	27 11,25	6 38 40
20	28 2,38	28 2,2	28 2,42	6 31 13	20	28 0,2	28 0,4	28 0,72	6 38 43
21	28 2,32	28 2,25	28 1,74	6 32 56	21	28 1,46	28 1,9	28 1,75	6 36 17
22	28 1,13	28 0,4	28 0,25	6 32 25	22	28 1,86	28 1,9	28 1,4	6 34 0
23	28 0,16	27 11,9	27 11,85	6 32 50	23	28 1,36	28 0,9	28 0,6	6 34 53
24	28 0,8	28 1,2	28 0,92	6 37 33	24	28 0,66	28 0,2	27 11,72	6 34 10
25	28 0,75	28 0,5	28 0,05	6 34 20	25	28 0,7	28 0,4	28 0,01	6 36 40
26	27 11,53	27 11,4	27 10,8	6 34 18	26	28 1,15	28 0,6	28 0,26	6 32 28
27	27 11,12	28 10,9	27 11,45	6 35 40	27	28 0,5	28 0,7	27 11,74	6 33 58
28	28 0,76	28 1,25	28 1,62	6 35 20	28	28 0,33	28 0,7	28 1,05	6 33 35
29	28 2,83	28 2,8	28 2,84	6 34 43	29	28 2,22	28 2,7	28 2,52	6 35 47
30	28 3,18	28 3.	28 2,59	6 36 2	30	28 3.	28 3,2	28 2,77	6 33 0
31					31	28 1,56	28 1,5	28 0,45	6 33 33

BAROMETRO.

TABOA I.	Elevação maxima.	Elevação minima.	Elevação media.	Elevação da manhã.	Elevação do meio dia.	Elevação da tarde.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.
Janeiro.	28 3,7	27 10,5	28 1,98	28 2,05	28 1,96	28 1,75
Fevereiro.	28 3,9	27 11,8	28 1,78	28 1,84	28 1,86	28 1,65
Março.	28 4,8	27 11,7	28 2,8	28 2,9	28 2,88	28 2,61
Abril.	28 5,5	28 1,2	28 3,43	28 3,58	28 3,38	28 3,33
Maió.	28 6,5	28 1,0	28 4,28	28 4,42	28 4,26	28 4,16
Junho.	28 6,7	28 1,3	28 4,33	28 4,48	28 4,34	28 4,18
Julho.	28 6,5	28 1,3	28 4,21	28 4,31	28 4,3	28 4,01
Agosto.	28 7,35	28 0,2	28 4,68	28 4,76	28 4,68	28 4,43
Setembro.	28 7,15	27 11,3	28 3,83	28 3,95	28 3,89	28 3,65
Outubro.	28 4,95	27 10,0	28 2,33	28 2,37	28 2,22	28 2,06
Novembro.	28 4,35	27 10,4	28 1,34	28 1,4	28 1,38	28 1,25
Dezembro.	28 3,3	27 10,6	28 1,27	28 1,15	28 1,18	28 0,89

Elevação de duas em duas horas.

TAB. II.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 horas da manhã.	12 horas da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	10 horas da noite.	do dia.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.
Janeiro.	28 1,83	28 2,1	28 2,22	28 1,96	28 1,63	28 1,26	28 1,65	28 2,3	28 1,87
Fever.	28 1,62	28 1,87	28 2,12	28 1,86	28 1,67	28 1,3	28 1,61	28 2,15	28 1,77
Março.	28 2,57	28 2,93	28 3,18	28 2,88	28 2,54	28 2,28	28 2,59	28 3,0	28 2,75
Abril.	28 3,26	28 3,62	28 4,0	28 3,38	28 3,12	28 2,97	28 3,61	28 3,89	28 3,48
Maió.	28 4,13	28 4,41	28 4,74	28 4,26	28 3,96	28 3,88	28 4,2	28 4,6	28 4,28
Junho.	28 4,16	28 4,47	28 4,77	28 4,34	28 4,01	28 3,93	28 4,27	28 4,55	28 4,31
Julho.	28 4,02	28 4,31	28 4,65	28 4,3	28 3,93	28 3,69	28 3,98	28 4,4	28 4,16
Agosto.	28 4,48	28 4,74	28 5,06	28 4,68	28 4,4	28 4,18	28 4,43	28 4,73	28 4,59
Ser.	28 3,66	28 3,98	28 4,22	28 3,89	28 3,49	28 3,33	28 3,66	28 4,13	28 3,8
Outub.	28 2,12	28 2,39	28 2,56	28 2,22	28 1,8	28 1,67	28 2,0	28 2,5	28 2,16
Nov.	28 1,1	28 1,41	28 1,68	28 1,38	28 1,17	28 0,93	28 1,2	28 1,73	28 1,32
Dez.	28 0,86	28 1,17	28 1,38	28 1,18	28 0,85	28 0,47	28 0,88	28 1,44	28 1,02

## THERMOMETRO.

TABOA III.	Calor maximo.	Calor minimo.	Calor medio do mez.	Calor medio da manhã.	Calor medio do meio dia.	Calor medio da tarde.
	G.	G.	G.	G.	G.	G.
Janeiro.	89,75	74.	81,19	79,08	81,71	82,78
Fevereiro.	90.	75.	80,41	79,2	80,7	81,34
Março.	82.	70.	76,28	75,35	76,8	76,69
Abril.	85,5	66,5	76,19	74,83	75,61	78,13
Maió.	78,5	66.	71,32	69,49	71,25	73,23
Junho.	82.	55,75	68,61	66,63	68,76	70,45
Julho.	80.	52,5	67,76	65,47	68.	69,82
Agosto.	79.	65.	72,25	69,97	72,53	74,25
Setembro.	84.	64.	72,4	70,69	73,17	73,34
Outubro.	86.	66.	74,23	72,19	75,09	75,41
Novembro.	87.	69.	76,61	74,81	77,68	77,33
Dezembro.	90.	71.	78,72	76,83	79,88	79,45

## Calor medio de duas em duas horas.

TAB. IV.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 horas da manhã.	12 horas da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	10 horas da noite.	do dia.
	G.	G.	G.	G.	G.	G.	G.	G.	G.
Janeiro.	78,2	79,03	81,1	81,71	82,66	83,66	83,0	81,7	81,25
Fever.	77,71	78,3	79,42	80,7	81,64	81,9	81,26	80,51	80,18
Março.	74,8	75,17	76,1	76,8	77,3	77,43	79,96	76,35	76,36
Abril.	74,25	74,71	75,56	75,61	78,01	78,4	78,25	77,75	76,56
Maió.	69,11	69,3	69,98	71,25	72,35	73,58	73,66	73,4	71,58
Junho.	66,24	66,1	67,38	68,76	70,15	71,06	70,76	70,0	68,61
Julho.	61,24	65,23	66,69	68,0	69,22	70,45	70,13	69,67	67,58
Agosto.	68,9	69,79	71,12	72,53	73,75	74,71	74,45	73,75	72,37
Set.	70,0	70,33	71,68	73,17	73,88	73,95	73,1	72,45	72,33
Outub.	71,03	72,02	73,63	75,09	76,25	76,53	75,1	73,72	74,17
Nov.	73,66	74,58	76,21	77,68	78,66	77,85	76,88	75,48	76,38
Dez.	75,56	76,62	78,30	79,88	80,62	80,33	79,07	77,82	78,52

*Numero dos dias.*

TABOA V.	Serenos.	Variaveis.	Nublados.	Gobertos.	Relampagos.	Trovada.	Chuva.	Nevor.	Aurora Atrial.	Luz Zodiacal.
Janeiro.	3	13	10	5	9	7	13	4	*	1
Fevereiro.	5	12	2	9	3	6	15	10	*	*
Março.	*	17	6	8	11	2	24	2	*	*
Abril.	8	12	8	2	5	*	10	9	*	2
Maio.	13	6	8	4	*	*	7	17	*	*
Junho.	12	10	3	5	3	1	9	17	*	2
Julho.	11	5	12	3	*	*	6	19	*	1
Agosto.	11	10	10	*	*	*	2	14	3	*
Setembro.	1	10	9	10	1	4	14	9	*	1
Outubro.	3	16	7	5	2	4	11	6	*	1
Novembro.	*	20	6	4	4	9	21	1	*	1
Dezembro.	2	15	6	8	7	5	18	3	*	*

Quantidade da Chuva, e Vaporação.

Ventos dominantes.

TAB. VI.	Chuva.	Vaporação.	TAB. VII.	Manhã.	Tarde.
	Pol. L.	Pol. L.			
Janeiro.	5 5,	6 2,9	Janeiro.	Variavel.	S. E.
Fevereiro.	6 9,	4 7,9	Fevereiro.	N. O.	S. E.
Março.	14 6,5	1 1,5	Março.	Var.	S. E.
Abril.	7 8,	1 9,6	Abril.	N. O.	S. E.
Maio.	2 5,	1 3,	Maio.	Var. e N. O.	S. E.
Junho.	1 9,	0 8,84	Junho.	N. O.	Var. e S. E.
Julho.	0 5,	1 2,5	Julho.	Var.	Var.
Agosto.	0 0,5	2 1,8	Agosto.	Var.	Var.
Setembro.	3 3,9	2 0,	Setembro.	Var.	Var.
Outubro.	3 3,13	4 0,25	Outubro.	Var.	S. E.
Novembro.	4 7,9	4 4,45	Novembro.	Var.	S. E.
Dezembro.	3 7,7	4 9,55	Dezembro.	Var.	S. E.

## Influencia correspondente aos pontos Lunares.

TABOA VIII.	Elevação media do Ba- rometro.	Calor medio.	Ventos dominantes.								
			N.	N.E.	N.O.	S.	S.E.	S.O.	L.	O.	
Pontos Lunares.											
Lua em conjunção.	Pol. L. 28 3,03	75,46	5	5	30	10	49	*	4	1	
Lua em opposição.	. 2,92	75,61	6	6	23	4	52	*	8	7	
I. Quarto.	. 3,57	74,17	4	2	25	10	42	*	8	5	
II. Quarto.	. 2,83	67,37	21	9	15	3	36	12	4	3	
Apogeu.	. 2,86	75,18	11	5	17	12	39	7	7	6	
Perigeu.	. 2,89	79,82	6	2	26	7	24	1	5	23	
Lunístico Austral.	. 2,66	75,14	1	7	25	11	48	*	6	11	
Lunístico Boreal.	. 3,21	80,26	9	5	36	*	37	8	6	3	
Equinoccio ascendente.	. 2,42	74,83	1	*	25	10	47	10	6	3	
Equinoccio descendente.	. 2,78	75,63	3	5	26	*	49	5	4	4	
I. Oitante.	. 3,26	74,39	*	4	38	7	35	*	4	*	
II. Oitante.	. 2,29	76,44	13	4	33	4	26	8	*	8	
III. Oitante.	. 3,07	75,04	3	8	21	6	27	19	6	4	
IV. Oitante.	. 2,88	75,19	11	9	39	4	31	*	1	6	

## Influencia correspondente aos pontos Lunares.

TABOA IX.	Numero dos dias.									
	Serenos.	Variáveis.	Nublados.	Cobertos.	Relamp.	Trovoadas.	Chuva.	Nevoa.	Aur. Austr.	Luz. Zodi.
Pontos Lunares.										
Lua em conjunção.	1	6	5	1	5	*	5	4	*	*
Lua em opposição.	4	3	3	2	1	1	5	4	*	*
I. Quarto.	3	7	1	1	*	2	3	2	*	1
II. Quarto.	4	6	1	2	4	2	7	2	*	*
Apogeu.	2	6	3	2	3	1	5	4	*	*
Perigeu.	1	10	1	1	1	2	7	4	1	*
Lunístico Austral.	2	4	4	3	2	2	5	6	*	*
Lunístico Boreal.	3	5	3	2	1	*	6	2	*	*
Equinoccio ascendente.	2	7	4	1	2	2	5	4	*	1
Equinoccio descendente.	*	6	5	1	3	3	6	4	*	*
I. Oitante.	3	4	4	1	1	1	5	6	*	*
II. Oitante.	1	9	1	1	2	1	6	3	*	*
III. Oitante.	1	4	5	2	1	1	6	5	*	*
IV. Oitante.	2	6	3	2	2	2	4	6	*	*

*Declinação Oriental da Agulha-Magnetica.*

TABOA X.	Maxima.	Minimá.	Media.	Manhã.	Meio dia.	Tarde.
	G. M. S.	G. M. S.				
Janeiro.	6 41	6 20	6 33 53	6 32 12	6 35 0	6 34 26
Fevereiro.	. 40 30	. 27	. 34 29	. 33 8	. 35 29	. 34 50
Março.	. 42	. 28	. 35 43	. 34 38	. 36 17	. 36 13
Abril.	. 38	. 21	. 33 2	. 31 59	. 33 58	. 33 10
Maió.	. 44	. 25	. 34 57	. 33 50	. 35 40	. 35 22
Junho.	. 39	. 20	. 32 18	. 32 19	. 32 22	. 32 14
Julho.	. 43	. 26	. 34 13	. 34 9	. 35 25	. 33 5
Agosto.	. 40	. 26 30	. 33 16	. 32 54	. 33 56	. 32 59
Setembro.	. 45	. 26	. 33 59	. 33 3	. 34 26	. 34 29
Outubro.	. 42	. 25	. 34 8	. 32 47	. 34 31	. 35 7
Novembro.	. 45	. 28	. 34 53	. 33 14	. 35 49	. 35 37
Dezembro.	. 46	. 21	. 35 0	. 32 32	. 36 44	. 35 43

*Declinação media de duas em duas horas.*

TAB. XI.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 horas da manhã.	12 horas da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	10 horas da noite.	do dia.
	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.
Janeir.	6 31 42	6 32 0	6 32 52	6 35 0	6 35 31	6 34 24	6 34 8	6 33 50	6 33 42
Fever.	. 33 19	. 32 12	. 33 52	. 35 29	. 35 35	. 35 2	. 34 26	. 33 51	. 34 13
Março.	. 34 56	. 34 12	. 34 36	. 36 17	. 36 54	. 36 48	. 36 4	. 35 2	. 35 36
Abril.	. 32 4	. 32 8	. 31 46	. 33 58	. 33 52	. 33 26	. 33 18	. 32 36	. 32 58
Maió.	. 33 56	. 34 0	. 32 36	. 35 40	. 36 4	. 35 52	. 35 0	. 34 35	. 34 43
Junho.	. 52 6	. 32 30	. 32 33	. 32 22	. 32 44	. 32 19	. 32 22	. 31 32	. 32 14
Julho.	. 34 6	. 34 57	. 34 26	. 35 25	. 34 14	. 34 0	. 33 41	. 32 50	. 34 12
Agost.	. 32 23	. 32 59	. 33 21	. 33 56	. 33 42	. 33 29	. 32 50	. 31 58	. 33 5
Ser.	. 32 47	. 33 8	. 33 10	. 34 26	. 35 2	. 35 6	. 34 26	. 33 14	. 33 55
Out.	. 33 4	. 32 35	. 32 41	. 34 31	. 35 45	. 35 39	. 34 55	. 34 10	. 34 10
Nov.	. 32 34	. 33 14	. 33 57	. 35 49	. 36 45	. 36 13	. 35 23	. 34 6	. 34 45
Dez.	. 32 0	. 31 44	. 33 23	. 36 44	. 37 0	. 36 6	. 35 15	. 33 50	. 34 30

---



---

# DETERMINAÇÃO

*Das Orbitas dos Cometas*

POR JOSÉ MONTEIRO DA ROCHA.

---

## I. PARTE.

1. **A** Determinação das *Orbitas dos Cometas* he hum Problema, cuja difficuldade se dá bem a conhecer, por lha ter achado Newton muito grande (\*). Só depois de haver feito muitas, e diversas tentativas he que descubrio este incomparavel Geometra a Solução, com que rematou a sua obra immortal dos *Principios Mathematicos*; Solução, de que elle se prezava muito, e com muita razão; pois nella se vê sobrefahir admiravelmente o genio creador, dom precioso que a Natureza reparte escaçamente de seculos em seculos pelo pequeno número dos seus escolhidos. Mas sendo, como he, tão digna de Newton aquella Solução, nem por isso satisfez completamente ao que se desejava. Porque além de não passar de huma approximação do Problema, procede em grande parte graphicamente; e as Soluções graphicas, ainda que sejaõ elegantes, perfectas, e exactas na theorica, saõ quasi sempre de-feituosas na prática.

2. Mais de cincoenta annos depois tomou o sábio Euler a empreza de resolver esta questaõ de hum modo mais ge-

---

(\*) Problema hocce longe difficillimum multimode aggressus, composui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus solutionem sequentem paulo simplicioreme excogitavi. Newt. lib. 3. *Princip. Prop.* 41.

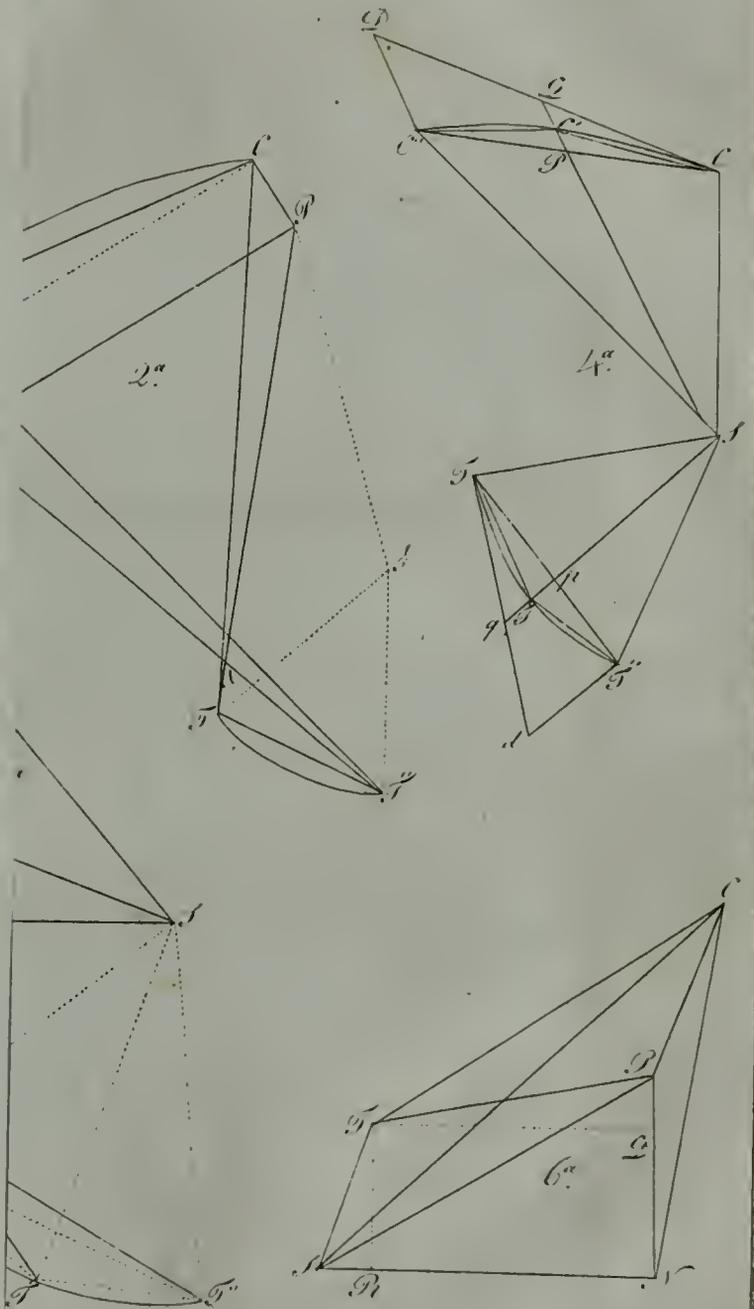
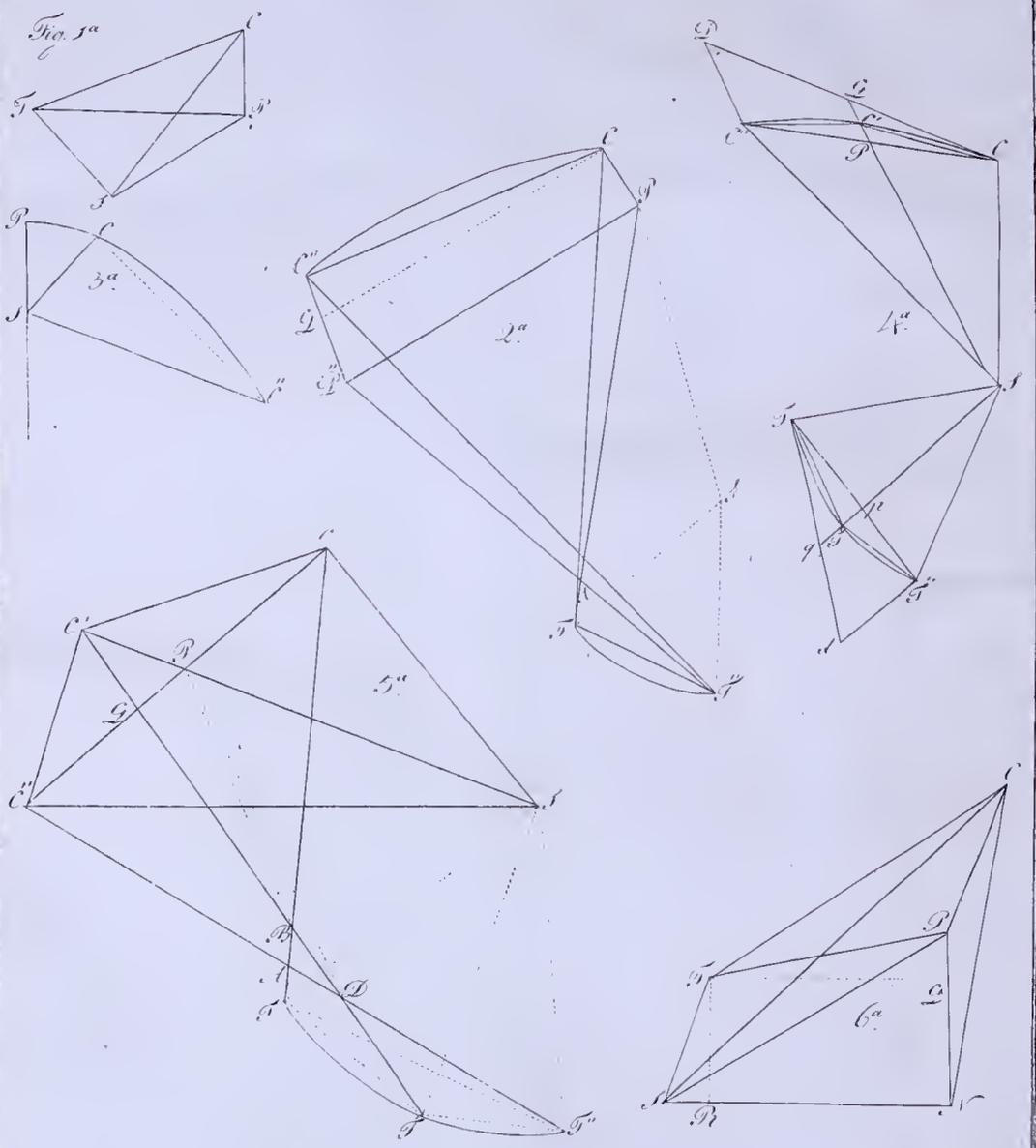


Fig. 5<sup>a</sup>



geral, não se restringindo como Newton á hypothese das orbitas parabolicas, mas suppondo que ellas podem ser parabolicas, ellipticas, ou hyperbolicas (\*). Sem embargo porém da grande habilidade d'este Author, que com a maravilhosa fecundidade de seu ingenho contribuiu muito para o progresso das sciencias Mathematicas em todas as suas partes, ficou o *Problema dos Cometas* como d'antes, por se acharem embaraços na execuçaõ d'aquelle methodo; que elle chama facil no mesmo titulo da sua obra. Porque suppõe, que primeiro se sabe proximamente a distancia do Cometa á terra no tempo da observaçaõ media; conhecimento, em que consiste a maior difficuldade da questaõ; e ainda que pelo seu mesmo methodo se póde conseguir, he tal a multidaõ de calculos necessarios para esse preliminar, que farão desanimar a mais determinada constancia. Depois d'isso procede de hum modo indirecto, calculando simultaneamente duas hypotheses pouco differentes da distancia proximamente conhecida, para deduzir duas orbitas, cada huma das quaes se ha de comparar a huma quarta observaçaõ, para corrigir as hypotheses pela regra de falsa posizaõ. É tudo isto por hum modo taõ longo, e prolixo, que no exemplo do famoso Cometa de 1680, sem embargo de tomar as hypotheses dos calculos feitos por Newton, e Halley, gasta trinta e duas paginas de operações numericas para tirar a lume os elementos da orbita; e no outro exemplo do Cometa de 1744, deixando em segredo as longas tentativas, que fez para estabelecer proximamente as suas hypotheses, he outro tanto trabalho para deduzir os primeiros elementos, e depois disso doze paginas de calculo para os corrigir por outro methodo de tres hypotheses, que ajuntou no Additamento da mesma obra.

3. O certo he que os Astronomos, para cujo uso deve ser a Soluçaõ d'este Problema, deixando o caminho de Newton, e laberinto de Euler, e não fazendo conta das  
So-

---

(\*) *Theoria motuum Planetarum et Cometarum*, &c. Berolini A. 1744.

Soluções de Bouguer, e Fontaine, e nem de outras, que nunca deraõ o passo necessario da especulaçaõ para a execuçaõ, se lançaõ ao methodo ordinario das falsas posições, ultimo recurso de que se valem, quando faltaõ as Soluções directas, e proprias de qualquer questãõ, ou quando ellas saõ notavelmente mais trabalhosas do que os rodeios, que indirectamente conduzem ao mesmo resultado. Mas este methodo suppõe, como o de Euler, que se sabe proximamente aquillo mesmo que se busca, donde he necessario ter a felicidade de conjecturar previamente com acerto, para naõ perder o tempo, e a paciencia em muitos calculos inuteis; e por outra parte, ainda depois das mais felizes conjecturas, saõ taõ longos, e taõ penosos os calculos, que he muito para admirar a constancia de trabalho, com que Halley, La-Caille, Pingré, La-Lande, e outros infatigaveis Astronomos se empregáraõ em calcular as Orbitas de todos os Cometas, que até o presente se tem observado.

4 Por este motivo se deseja ha muito tempo huma Soluçaõ expedita d'este embaraçado Problema. A Academia de Berlin o escolheo para assumpto do premio de 1774; requerendo, *Que se dessem formulas geraes, e rigorosas, para determinar a Orbita parabolica de hum Cometa, por meio de tres observações; e que se mostrasse o uso dellas, para resolver o Problema do modo mais simples, e mais exacto.* Mas chegando o termo aprazado, e naõ se satisfazendo ella com as obras que concorrêraõ, prorogou a questãõ para o anno de 1778 com premio duplicado. Até agora naõ sabemos em Portugal o que tem resultado daquellas repetidas indagações, assim como naõ soubemos da proposiçaõ, senãõ muito depois de ser passado o ultimo termo della. Seja porém qual for o exito, que tenha tido, ou haja ainda de ter, o programma de Berlin, como sempre he conveniente haver differentes methodos de resolver a mesma questãõ, pareceo-me que o meu trabalho nesta materia naõ deixaria de se conformar com as intenções da nossa Academia.

demia, que sobre todas começa a distinguir-se com tanto acerto em fazer juizo das cousas pela utilidade dellas (\*).

5 Será esta obra dividida em duas partes. Nesta primeira dou as Formulas geraes, exactas, e rigorosas, para determinar as Orbitas dos Cometas, suppondo-as parabolicas, como he sabido que podem suppôr-se, ao menos na maior parte d'elles, sem erro sensivel. Nestas formulas estaõ por huma vez feitos todos os raciocinios, que craõ necessarios para a soluçaõ do Problema; e para se usar d'ellas, não ha necessidade de se ir governando o Calculador por huma figura, que represente o caso particular, de que se trata, mas com as quantidades dadas pelas observações achará o que se busca, sem haver cousa que o possa demorar. O que talvez se podia desejar he, que o número das operações não fosse tão grande; mas isso vem da natureza da questaõ, que não dá lugar a esperar-se com fundamento algum, que já mais se possa resolver com duas, ou tres horas de trabalho. E quem reflectir, que as soluções indirectas são quasi sempre menos trabalhosas na prática, e que a indirecta da nossa questaõ requer huma multidão tão notavel de calculos, não achará, que são muitos os que se devem fazer em consequencia das nossas Formulas.

6 Na segunda parte darei as Formulas, que convem á determinação das Orbitas ellipticas, todas as vezes que hum Cometa no tempo da sua apparição se desviar sensivelmente de huma Orbita parabolica.

---

(\*) Esta Memoria precedeo em data ás duas do mesmo Author publicadas no volume antecedente; e foi lida na Assembléa de 27 de Janeiro de 1782.

## §. I.

*Principios, em que se funda a determinação da Orbita parabolica de hum Cometa.*

7 Para se determinar huma parabola de grandeza, e de posição, he necessario saber-lhe o parametro, ou a distancia do foco ao vertice, que he, como se sabe, a quarta parte d'elle; a inclinação, que tem o plano da parabola a respeito de hum plano conhecido; a posição da linha de intersecção d'estes dous planos; e a do eixo da mesma parabola. E attendendo ao movimento de hum corpo por esta curva, he além d'isso necessario saber-lhe a direcção, e o instante, em que se achou, cu ha de achar em hum pontado da mesma curva, como por exemplo no vertice, que he o mais notavel de todos. Assim temos seis elementos que indagar na theorica de qualquer Cometa, os quaes na lingoagem dos Astronomos são: I. a distancia perihelia; II. a inclinação da Orbita; III. a longitude do nodo ascendente; IV. a longitude do perihelio; V. o instante da passagem pelo perihelio; VI. a direcção do movimento.

8 Huma vez achados estes elementos, he facil de calcular o lugar do Cometa, para qualquer tempo dado, pelo methodo conhecido dos Astronomos, ou pelas formulas, que tambem para isso havemos de mostrar. Mas vir no conhecimento dos elementos por meio dos lugares observados, he, como temos dito, hum dos mais difficeis problemas da Astronomia moderna. A difficuldade seria muito maior, se fossemos obrigados a ligar immediatamente por meio de Equações os elementos procurados com as quantidades dadas pelas observações, como fizeraõ grandes Geometras, sem fruto algum. Havendo porém reflectido, que depois de sabermos as distancias do Cometa á terra nõ tempo de duas observações, por ellas se podem determinar aquelles elementos, esta consideração nos offerece a vantagem

gem de partirmos, para o dizer assim, a questaõ pelo meio, encaminhando primeiro a indagaçaõ para as referidas distancias, como se ellas fossem os elementos, que buscamos. Para isso servirão as proposições seguintes.

9. *Achar a relação entre a distancia de hum Cometa á terra, e o seu raio vector, para o tempo dado de qualquer observação (Fig. 1.).*

Suppondo o Sol em  $S$ , a Terra em  $T$ , o Cometa em  $C$ , e abaixando d'elle para o plano da ecliptica a perpendicular  $CP$ , está claro que o angulo  $CTP$  he a latitude geocentrica do Cometa, e que o angulo  $PTS$  he igual á longitude do Cometa menos a do Sol. Assim fazendo  $TC = x$ ,  $SC = r$ ,  $PTS = A$ ,  $CTP = L$ , e  $TS = s$ , quantidade conhecida pela theorica do Sol, no triangulo rectangulo  $CPT$  teremos  $CP = x \text{ Sen. } L$ ,  $TP = x \text{ Cof. } L$ , e no triangulo rectangulo  $SPC$ ,  $r^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PS}^2 = x^2 \text{ Sen.}^2 L + \overline{PS}^2$ ; mas o triangulo  $PTS$  pela propriedade conhecida dos Geometras dá  $\overline{PS}^2 = s^2 + \overline{PT}^2 - 2 S. PT \text{ Cof. } A = s^2 + x^2 \text{ Cof.}^2 L - 2 s x \text{ Cof. } L \text{ Cof. } A$ : logo substituindo este valor na equação precedente, reflectindo, que  $\text{Sen. } L^2 + \text{Cof. } L^2 = 1$ ; teremos  $r^2 = x^2 - 2 s x \text{ Cof. } L \text{ Cof. } A + s^2$ . E pondo a quantidade dada  $2 s \text{ Cof. } L \text{ Cof. } A = a$ , será finalmente  $r^2 = x(x - a) + s^2$ .

10. *Achar a relação entre as distancias do Cometa á terra no tempo de duas observações, e a corda do arco, que elle descreveo (Fig. 2.).*

Seja  $S$  o Sol;  $T$ , e  $C$  os lugares da Terra, e do Cometa no instante da primeira observação; e  $T''$ ,  $C''$  no instante da segunda. Abaixando as perpendiculares  $CP$ ,  $C''P''$  para o plano da ecliptica, he evidente que  $CTP$  he a latitude do Cometa, e  $PTS$  a longitude d'elle, menos a do Sol no tempo da primeira observação; e semelhantemente  $C''T''P''$ ,  $P''T''S$  no tempo da segunda. He tam-  
bem

bem facil de ver, que o angulo  $PAP''$  he o movimento geocentrico do Cometa em longitude no intervallo das observações; por quanto, imaginando tirada pelo ponto  $T$  huma linha parallel a  $T''P''$ , fará no dito ponto com a recta  $TP$  hum angulo, que será igual a  $PAP''$ , e mostrará o movimento apparente do Cometa a respeito do observador, que se imagina immovel em  $T$ , quando realmente foi transportado de  $T$  para  $T''$ .

11. Suppondo pois  $TC = x$ ,  $T''C'' = x''$ ,  $PTS = A$ ,  $P''T''S = A''$ ,  $CTP = L$ ,  $C''T''P'' = L''$ ,  $PAP'' = C$ , e a corda  $CC'' = K$ , teremos primeiramente  $TP = x \text{ Cof. } L$ ,  $T''P'' = x'' \text{ Cof. } L''$ ,  $CP = x \text{ Sen. } L$ ,  $C''P'' = x'' \text{ Sen. } L''$ ; e conduzindo  $CQ$  parallel a  $PP''$ , será  $C''Q = x'' \text{ Sen. } L'' - x \text{ Sen. } L$ . Isto posto, o triangulo rectangulo  $CQC''$  dará  $K^2 = (x'' \text{ Sen. } L'' - x \text{ Sen. } L)^2 + \overline{PP''}^2$ ; e o triangulo  $PAP''$  dará  $\overline{PP''}^2 = (x \text{ Cof. } L - AT)^2 + (x'' \text{ Cof. } L'' - AT'')^2 - 2(x \text{ Cof. } L - AT)(x'' \text{ Cof. } L'' - AT'') \text{ Cof. } C$ . E substituin-do este valor na equação precedente, fazendo as multiplicações indicadas, e reflectindo, que he  $\overline{AT}^2 + \overline{AT''}^2 - 2AT \cdot AT'' \text{ Cof. } C = \overline{T'T''}^2$ , acharemos  $K^2 = x^2 - 2x \text{ Cof. } L (AT - AT'' \text{ Cof. } C) + x''^2 - 2x'' \text{ Cof. } L'' (AT'' - AT \text{ Cof. } C) - 2xx'' (\text{Cof. } L \text{ Cof. } L'' \text{ Cof. } C + \text{Sen. } L \text{ Sen. } L'') + \overline{T'T''}^2$ .

12. Agora no triangulo  $TST''$  conhecemos o angulo em  $S$ , que he igual ao movimento apparente do Sol no intervallo das observações, e os lados  $ST$ ,  $ST''$ , que são as distancias d'elle á terra nos dous instantes das mesmas observações. Pelo que suppondo  $ST = s$ ,  $ST'' = s''$ ,  $TST'' = S$ , e  $STT'' = B$ , teremos  $s'' : s :: \text{Sen. } B : \text{Sen. } (B + S) :: \text{Sen. } B : \text{Sen. } B \text{ Cof. } S + \text{Sen. } S \text{ Cof. } B :: \text{Tg. } B : \text{Tg. } B \text{ Cof. } S + \text{Sen. } S$ , donde se tira  $\text{Tg. } B = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{s - s'' \text{ Cof. } S}$ , e  $T'T'' = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B}$ .

AT

13. E passando ao triangulo  $TAT''$ , teremos  $AT = \frac{TT'' \text{ Sen. } (A + B + C)}{\text{Sen. } C} = \frac{s'' \text{ Sen. } S \text{ Sen. } (A + B + C)}{\text{Sen. } B \text{ Sen. } C}$ , e  $AT'' = \frac{s'' \text{ Sen. } S \text{ Sen. } (A + B)}{\text{Sen. } B \text{ Sen. } C}$ . Logo será  $AT - AT'' \text{ Cof. } C = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B \text{ Sen. } C} (\text{Sen. } (A + B + C) - \text{Sen. } (A + B) \text{ Cof. } C)$   
 $= \frac{s'' \text{ Sen. } S \text{ Cof. } (A + B)}{\text{Sen. } B}$ ; e  $AT'' - AT \text{ Cof. } C = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B \text{ Sen. } C} (\text{Sen. } (A + B) - \text{Sen. } (A + B + C) \text{ Cof. } C)$   
 $= \frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B} (\text{Sen. } (A + B) \text{ Sen. } C - \text{Cof. } (A + B) \text{ Cof. } C)$   
 $= - \frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B} \text{Cof. } (A + B + C)$ .

14. Pelo que suppondo, que com as quantidades dadas fazemos  $\text{Tg. } B = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{s - s'' \text{ Cof. } S}$ ,  $\frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B} = g$ ,  $2g \text{ Cof. } (A + B) \text{ Cof. } L = b$ ,  $2g \text{ Cof. } (A + B + C) \text{ Cof. } L'' = e''$ , e  $2(\text{Cof. } L \text{ Cof. } L'' \text{ Cof. } C + \text{Sen. } L \text{ Sen. } L'') = f$ , substituiremos estes valores na equação final do *num.* 11, e teremos  $K^2 = x(x - b) + x''(x'' + e'' - fx) + g^2$ .

15. *Achar a relação entre a distancia perihelia de hum Cometa, o seu raio vector, e o tempo que tem corrido desde a passagem pelo perihelio (Fig. 3.).*

Estando o Sol no foco da parabola  $S$ , e sendo a distancia perihelia  $SP = p$ , a altura devida á velocidade perihelia do Cometa  $= b$ , o seu raio vector actual  $SC = r$ , a anomalia verdadeira  $CSP = u$ , e o tempo, que gastou o Cometa em a descrever,  $= \tau$ , he demonstrado na theorica

das forças centraes, que teremos  $\tau : 1 :: \int \frac{1}{2} r^2 du : \frac{1}{2} p \sqrt{2gb}$ ,

e conseguintemente  $\int r^2 du = \tau p \sqrt{2gb}$ , qualquer que seja a Orbita descrita pelo Cometa.

16. Agora suppondo a Orbita parabolica, pela natureza d'ella teremos, como todos sabem,  $\text{Cof. } \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{p}{r}}$ , e conseguintemente  $\text{Sen. } \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{r-p}{r}}$ . Differenciando esta ultima equação, será  $\frac{1}{2} du \text{Cof. } \frac{1}{2} u$ , ou  $\frac{1}{2} du \sqrt{\frac{p}{r}} = \frac{p dr}{2r^2 \sqrt{\frac{r-p}{r}}}$ , e  $r^2 du = r dr \sqrt{\frac{p}{r-p}}$ . Conseguintemente teremos  $\tau \sqrt{2pgh} = \int \frac{r dr}{\sqrt{(r-p)}} = 2r\sqrt{(r-p)} - 2 \int dr \sqrt{(r-p)} = 2r\sqrt{(r-p)} - \frac{4}{3} \sqrt{(r-p)^3} = 2r\sqrt{(r-p)} - \frac{4}{3} (r-p)\sqrt{(r-p)} = \left(\frac{2}{3} r + \frac{4}{3} p\right) \sqrt{(r-p)}$ , sem ajuntar constante, porque  $r=p$  dá  $\tau = 0$ , como deve ser.

17. Falta-nos exprimir a velocidade perihelia  $h$  por meio de quantidades conhecidas. Para isso reflectiremos, que sendo  $f$  a distancia do Sol, em que a força d'elle he  $= g$ , se demonstra na theorica das forças centraes, que nas Orbitas parabolicas he  $pb = f^2$ . E porque suppondo o eixo maior da Orbita terrestre  $= A$ , o tempo periodico d'ella  $= T$ , e a circunferencia do circulo, que tem a unidade por diametro,  $= c$ , se mostra tambem na mesma theorica, que he  $f^2 = \frac{c^2 A^3}{2g \cdot T^2}$ , teremos  $2gpb = \frac{c^2 A^3}{T^2}$ , e

$$\tau = \frac{2T}{3cA\sqrt{A}} (r + 2p) \sqrt{(r-p)}.$$

18. Como até aquí não havemos escolhido unidade para as distancias lineares, tomaremos agora para isso a distancia media do Sol á terra, de que ordinariamente usão

usão os Astronomos, a qual he ametade do eixo da Orbita terrestre, e teremos  $A=2$ , e  $\tau = \frac{T}{3c\sqrt{2}}(r+2p)\sqrt{(r-p)}$ .

Do mesmo modo tomando d'aquí por diante hum dia medio por unidade dos tempos, ferá  $T=365,25638$ , e

$\frac{T}{3c\sqrt{2}} = 27,403857$ . E designando este numero por  $u$  (cujo logarithmo he 1.4378117) teremos finalmente  $\tau = u(r+2p)\sqrt{(r-p)}$ .

19. *Achar a relação entre dous raios vectores de huma Orbita parabolica, a corda do arco por elles comprehendido, e a distancia peribelia (Fig. 3.).*

Seja  $SP=p$ ,  $SC=r$ ,  $SC''=r''$ ,  $r+r''=R$ ,  $CC''=K$ ,  $PSC=u$ , e  $CSC''=z$ . Pela natureza da Orbita teremos

$\text{Cof. } \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{p}{r}}$ ,  $\text{Cof. } \left(\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} z\right) = \sqrt{\frac{p}{r''}}$ , e conseguinte

mente  $\sqrt{\frac{r}{r''}} = \frac{\text{Cof. } \left(\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} z\right)}{\text{Cof. } \frac{1}{2} u} = \text{Cof. } \frac{1}{2} z - \text{Sen. } \frac{1}{2} z \cdot \text{Tg. } \frac{1}{2} u$ ,

donde se collige  $\text{Tg. } \frac{1}{2} u = \frac{\text{Cof. } \frac{1}{2} z - \sqrt{\frac{r}{r''}}}{\text{Sen. } \frac{1}{2} z}$ . Logo

$\frac{1}{\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} u} = 1 + \text{Tg.}^2 \frac{1}{2} u = \frac{1 + \frac{r}{r''} - 2 \text{Cof. } \frac{1}{2} z \sqrt{\frac{r}{r''}}}{\text{Sen.}^2 \frac{1}{2} z}$ ,

e reduzindo  $\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} u = \frac{r'' \left(1 - \text{Cof.}^2 \frac{1}{2} z\right)}{R - 2 \text{Cof. } \frac{1}{2} z \sqrt{rr''}}$ . E como

$$p=r$$

$$p = r \operatorname{Cof.}^2 \frac{1}{2} u, \text{ teremos } p = \frac{rr'' \left( 1 - \operatorname{Cof.}^2 \frac{1}{2} z \right)}{R - 2 \operatorname{Cof.} \frac{1}{2} z \sqrt{rr''}}.$$

20. Por outra parte no triangulo  $SCC''$  temos  $K^2 = r^2 + r''^2 - 2rr'' \operatorname{Cof.} z$ , e conseguintemente  $\operatorname{Cof.} z = \frac{r^2 + r''^2 - K^2}{2rr''}$ .

E como  $1 + \operatorname{Cof.} z = 2 \operatorname{Cof.}^2 \frac{1}{2} z$ , será  $\operatorname{Cof.}^2 \frac{1}{2} z = \frac{r^2 + 2rr'' + r''^2 - K^2}{4rr''} = \frac{R^2 - K^2}{4rr''}$ , e  $\operatorname{Cof.} \frac{1}{2} z = \sqrt{\frac{R^2 - K^2}{4rr''}}$ .

Pelo que substituindo estes valores de  $\operatorname{Cof.} \frac{1}{2} z$ , e

$\operatorname{Cof.}^2 \frac{1}{2} z$  na equação do numero precedente, teremos

$$p = \frac{rr'' - \frac{1}{4} (R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}}.$$

21. *Achar a relação entre dous raios vectores, a corda do arco por elles comprehendido, e o tempo que o Cometa gastou em o descrever (Fig. 3.).*

Conservando as denominações precedentes de  $SP = p$ ,  $SC = r$ ,  $SC'' = r''$ ,  $r + r'' = R$ ,  $CC'' = K$ , e suppondo o tempo empregado pelo Cometa de  $P$  até  $C = \tau$ , e de  $C$  até  $C'' = t$ , será  $\tau = n(r + 2p)\sqrt{(r - p)}$ , e  $\tau + t = n(r'' + 2p)\sqrt{(r'' - p)}$  (n. 18.); e conseguintemente  $\frac{t}{n} = (r'' + 2p)\sqrt{(r'' - p)} - (r + 2p)\sqrt{(r - p)}$ . Quadrando esta equação, e reflectindo que  $r^2 + r''^2 = R^2 - 2rr''$ , e  $r^3 + r''^3 = R^3 - 3Rrr''$ , acharemos  $\frac{t^2}{n^2} = R^3 - 3Rrr'' + 3R^2p - 6rr''p - 8p^3 - 2(rr'' + 2Rp + 4p^2)\sqrt{(rr'' - Rp + p^2)}$ .

22. Para eliminarmos  $p$  d'esta equação com mais facilidade, do que podia ser pelos methodos geraes, reflectiremos, que a equação do num. 20. dá  $rr'' - pR = \frac{1}{4}(R^2 - K^2) - p\sqrt{(R^2 - K^2)}$ , e ajuntando de huma e outra parte  $p^2$ , será o segundo membro quadrado perfeito, e teremos  $\sqrt{(rr'' - pR + p^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 - K^2)} - p$ .

A mesma equação dá evidentemente  $4p^2(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}) = 4prr'' - p(R^2 - K^2)$ , e  $2pR(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}) = 2Rrr'' - \frac{1}{2}R(R^2 - K^2)$ . E finalmente multiplicando o numerador, e denominador d'ella por  $R + \sqrt{(R^2 - K^2)}$ , dará  $pK^2 = Rrr'' + rr''\sqrt{(R^2 - K^2)} - \frac{1}{4}R(R^2 - K^2) - \frac{1}{4}\sqrt{(R^2 - K^2)^3}$ .

23. Isto supposto, substituindo na equação final do num. 21. o valor de  $\sqrt{(rr'' - pR + p^2)}$ , teremos  $\frac{t^2}{n^2} = R^3 - 3Rrr'' + 3R^2p - 4rr''p + 4p^2(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}) - (rr'' + 2Rp)\sqrt{(R^2 - K^2)}$ . Substituindo nesta o valor de  $4p^2(R - \sqrt{(R^2 - K^2)})$ , teremos  $\frac{t^2}{n^2} = R^3 - 3Rrr'' + pK^2 + 2pR(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}) - rr''\sqrt{(R^2 - K^2)}$ . E finalmente substituindo nesta os valores de  $pK^2$ , e  $2pR(R - \sqrt{(R^2 - K^2)})$ , e reduzindo, será  $\frac{4t^2}{n^2} = R(R^2 + 3K^2) - \sqrt{(R^2 - K^2)^3}$ . Como affirma determinamos o número constante  $n$ , será em consequencia d'elle  $\frac{4}{n^2} = 0,0053264345$ , cujo logarithmo he 7.7264366, e pondo d'aqui por diante  $\phi$  pelo número correspondente a este logarithmo, teremos  $R(R^2 + 3K^2) - \sqrt{(R^2 - K^2)^3} - \phi t^2 = 0$ .

24. He de advertir, que  $\sqrt{R^2 - K^2}$  muda de final todas as vezes que o angulo comprehendido pelos dous raios vectores passar de  $180^\circ$ . Mas como na indagação das Orbitas dos Cometas não são os intervallos das observações tão grandes, que possa ter havido mais de  $180^\circ$  de movimento heliocentrico; por isso tanto a formula precedente, como a do *num.* 20, se podem applicar com segurança, sem receio de incerteza alguma pelo que respeita ao final da quantidade radical, que ellas envolvem.

## §. II.

*Differentes Soluções, que resultão dos Principios antecedentes.*

25. Ainda que basta conhecer duas distancias de hum Cometa á terra no tempo de duas observações, para com ellas determinar todos os elementos da Orbita, como adiante mostraremos, não bastaõ com tudo duas observações para virmos no conhecimento d'essas distancias. Porque as duas observações dão somente a equação  $R(R^2 + 3K^2) - \sqrt{R^2 - K^2} - \Phi t^2 = 0$ , na qual  $R$ , e  $K$  são funções das distancias, que buscamos  $x, x'$ ; e não fazemos menção da outra equação do *num.* 20, a qual, trazendo comtigo outra quantidade incognita  $p$ , nada póde contribuir para determinar o Problema.

26. He pois necessario, que haja tres observações; e entãõ teremos mais equações, do que era preciso para a determinação da questão, donde resultarãõ diferentes Soluções. Porque podendo tres observações comparar-se duas a duas de tres modos diferentes, está claro, que por cada modo teremos as duas equações do número precedente; e nos acharemos com seis equações, e quatro incognitas  $x, x', x'', p$ , a ultima das quaes se elimina com muita facilidade. Assim vemos, que he o Problema mais que determinado em segundo grão, por sobejarem duas equações.

27. Examinando em particular todas as formulas, que provem das tres observações, supponemos, que a longitude do Cometa menos a do Sol no instante da primeira observação se representa por  $A$ , a distancia do Sol á terra por  $s$ , e a latitude do Cometa por  $L$ ; que estas mesmas quantidades no instante da segunda observação são  $A'$ ,  $s'$ ,  $L'$ ; e no da terceira  $A''$ ,  $s''$ ,  $L''$ . E pelo que havemos mostrado no *num.* 9, he manifesto, que fazendo  $2 s \text{ Cof. } L \text{ Cof. } A = a$ ,  $2 s' \text{ Cof. } L' \text{ Cof. } A' = a'$ , e  $2 s'' \text{ Cof. } L'' \text{ Cof. } A'' = a''$ , teremos  $r^2 = x(x-a) + s^2$ ,  $r'^2 = x'(x'-a') + s'^2$ , e  $r''^2 = x''(x''-a'') + s''^2$ , sendo  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$  as distancias do Cometa á terra, e  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$  os raios vectores correspondentes, conforme a ordem das observações.

28. Suppondo tambem, que o movimento geocentrico do Cometa em longitude desde a primeira até a segunda observação se representa por  $C'$ , e o do Sol por  $S'$ , sendo a corda do arco descrito nesse intervallo  $= K'$ , está claro, que para ter o valor de  $K'^2$  não he necessario mais, do que pôr  $s'$ ,  $S'$ ,  $L'$ ,  $C'$  em lugar de  $s$ ,  $S$ ,  $L$ ,  $C$  nas formulas do *num.* 14, e mudar  $B$ ,  $g$ ,  $b$ ,  $e''$ ,  $f$  em  $B'$ ,  $g'$ ,  $e$ ,  $b'$ ,  $f'$ ; suppondo, que naquelle lugar se fez a comparação das duas observações extremas. Assim fazendo  $\frac{s' \text{ Sen. } S'}{s - s' \text{ Cof. } S'} = \text{Tg. } \beta'$ ,  $\frac{s' \text{ Sen. } S'}{\text{Sen. } B'} = g'$ ;  $2 g' \text{ Cof. } L' \text{ Cof. } (A + B' + C') = b'$ ;  $2 g' \text{ Cof. } L \text{ Cof. } (A + B') = e$ , e  $2 (\text{Cof. } L \text{ Cof. } L' \text{ Cof. } C' + \text{Sen. } L \text{ Sen. } L') = f$ , teremos  $K'^2 = x'(x' + b') + x(x - e - f' x') + g'^2$ .

29. Do mesmo modo suppondo que o movimento geocentrico do Cometa em longitude desde a segunda até a terceira observação se designa por  $C''$ , o do Sol por  $S''$ , e a corda descrita pelo Cometa por  $K''$ , deveremos pôr nas mesmas formulas  $s'$ ,  $S''$ ,  $L'$ ,  $C''$  em lugar de  $s$ ,  $S$ ,  $L$ ,  $C$ , e mudar  $B$ ,  $g$ ,  $b$ ,  $e''$ ,  $f$  em  $B''$ ,  $g''$ ,  $b''$ ,  $e'$ ,  $f''$ , pondo-se tambem

$A'$

$A'$  em lugar de  $A$ . Pelo que fazendo  $\frac{s'' \text{ Sen. } S''}{s' - s'' \text{ Cof. } S''} = \text{Tg. } B''$ ,  
 $\frac{s'' \text{ Sen. } S''}{\text{Sen. } B''} = g''$ ;  $2 g'' \text{ Cof. } (A' + B'' + C'') \text{ Cof. } L'' = b''$ ;  $2 g'' \text{ Cof. } (A' + B'') \text{ Cof. } L'' = e'$ ; e  $2 (\text{Cof. } L' \text{ Cof. } L'' \text{ Cof. } C'' + \text{Sen. } L' \text{ Sen. } L'') = f''$ , teremos  $K''^2 = x''(x'' + b'') + x'(x' - e' - f''x'') + g''^2$ .

30. E finalmente suppondo o tempo desde a primeira observação até a segunda =  $t'$ , e da segunda até a terceira =  $t''$ , e fazendo  $R' = r + r'$ , e  $R'' = r' + r''$  teremos como no *num.* 23,  $R'(R'^2 + 3K'^2) - \sqrt{(R'^2 - K'^2)^3} - \Phi t'^2 = 0$ , e  $R''(R''^2 + 3K''^2) - \sqrt{(R''^2 - K''^2)^3} - \Phi t''^2 = 0$ ; e

como no *num.* 20,  $p = \frac{rr' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}}$ , e  $p =$

$\frac{r'r'' - \frac{1}{4}(R''^2 - K''^2)}{R'' - \sqrt{(R''^2 - K''^2)}}$ ; valores, que combinados com o

do *num.* 20, daõ  $\frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}} - \frac{r'r' - \frac{1}{4}(R'^2 - K'^2)}{R' - \sqrt{(R'^2 - K'^2)}} = 0$ ,

e  $\frac{r'r'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}} - \frac{r'r'' - \frac{1}{4}(R''^2 - K''^2)}{R'' - \sqrt{(R''^2 - K''^2)}} = 0$ , nas

quaes duas equações não ha a incognita  $p$ .

31. Pelo que ajuntando todas as equações, que somente envolvem as tres incognitas  $x, x', x''$ , teremos as cinco seguintes:

$$R(R^2 + 3K^2) - \sqrt{(R^2 - K^2)^3} - \Phi t^2 = 0$$

$$R'(R'^2 + 3K'^2) - \sqrt{(R'^2 - K'^2)^3} - \Phi t'^2 = 0$$

$$R''(R''^2 + 3K''^2) - \sqrt{(R''^2 - K''^2)^3} - \Phi t''^2 = 0$$

$$\frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}} - \frac{r'r' - \frac{1}{4}(R'^2 - K'^2)}{R' - \sqrt{(R'^2 - K'^2)}} = 0$$

$$\frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}} - \frac{r''r'' - \frac{1}{4}(R''^2 - K''^2)}{R'' - \sqrt{(R''^2 - K''^2)}} = 0,$$

nas quaes bem se vê, que sendo  $r, R, K$  &c. funcções de  $x, x', x''$ , não se envolvem mais incognitas do que estas tres, que são as distancias do Cometa á terra nos tres instantes das observações.

32. Como pois he sabido, que para a determinação de tres incognitas bastaõ outras tantas equações, podemos servir-nos para isto de tres quaesquer das cinco precedentes, donde resultaráõ tantas soluções differentes, quantas são as combinações diversas de cinco quantidades tomadas tres a tres. Assim temos conseguido em lugar de huma, que buscavamos, dez soluções differentes do nosso Problema, as quaes todas devem dar para  $x, x', x''$  os mesmos valores, sendo as observações exactas, e as Orbitas rigorosamente parabolicas; mas faltando estas condições, cada huma das combinações dará differentes valores approximados das ditas incognitas.

33. Póde, e ha necessariamente de succeder, que alguma das combinações dê valores mais chegados á verdade do que as outras em algum caso particular, não fazendo tanto effeito nella a falta das sobreditas condições. Mas não havendo por isto razão em geral, que nos obrigue a dar preferencia a qualquer das combinações, escolheremos a das tres primeiras equações

$$R (R^2 + 3K^2) - \sqrt{(R^2 - K^2)}^3 - \phi t^2 = 0$$

$$R' (R'^2 + 3K'^2) - \sqrt{(R'^2 - K'^2)}^3 - \phi t'^2 = 0$$

$$R'' (R''^2 + 3K''^2) - \sqrt{(R''^2 - K''^2)}^3 - \phi t''^2 = 0,$$

as quaes, como mais simples, e todas da mesma fórma, facilitarão notavelmente os calculos, que sobre ellas se haõ de fazer; e estas saõ as que anticipadamente communiquei á Academia, como equações fundamentaes da soluçãõ d'este Problema.

34. Agora as reduziremos a outra fórma, que ainda será mais commoda para o calculo. Tomando a primeira por exemplo, bem se vê, que póde escrever-se d'esta maneira  $R^3 \left(1 + \frac{3K^2}{R^2}\right) - R^3 \sqrt{\left(1 - \frac{K^2}{R^2}\right)^3} - \Phi t^2 = 0$ . E suppondo  $1 - \frac{K^2}{R^2} = \omega^2$ , será  $\sqrt{\left(1 - \frac{K^2}{R^2}\right)^3} = \omega^3$ , e  $1 + \frac{3K^2}{R^2} = 4 - 3\omega^2$ ; donde se reduzirá a equaçãõ a esta fórma  $R^3(4 - 3\omega^2 - \omega^3) - \Phi t^2 = 0$ . Do mesmo modo se reduzem as outras duas, suppondo  $1 - \frac{K'^2}{R'^2} = \omega'^2$ ,  $1 - \frac{K''^2}{R''^2} = \omega''^2$ , e teremos as tres equações seguintes:

$$R^3(4 - 3\omega^2 - \omega^3) - \Phi t^2 = 0$$

$$R'^3(4 - 3\omega'^2 - \omega'^3) - \Phi t'^2 = 0$$

$$R''^3(4 - 3\omega''^2 - \omega''^3) - \Phi t''^2 = 0,$$

das quaes usaremos com preferencia, quando passarmos da theorica para a practica.

35. Se os intervallos das observações se tomarem tão estreitos, que  $K^2$  fosse muito pequena quantidade em comparaçãõ de  $R^2$ , podia o termo  $\sqrt{(R^2 - K^2)^3}$  reduzir-se a huma serie muito convergente, sendo entãõ  $\sqrt{(R^2 - K^2)^3} = R^3 - \frac{3}{2}RK^2 + \frac{3K^4}{8R}$  proximamente. E substituindo este valor na primeira equaçãõ do *num.* 33, teriamos

$\frac{3}{8}K^2$

$3K^2(12R^2 - K^2) - 8R\phi t^2 = 0$ ; e do mesmo modo se reduzirão as outras duas. Mas reflectindo por huma parte, que estas novas formulas não podem servir de muito para abreviar o trabalho das operações; e por outra, que a estreiteza dos intervallos, ao mesmo tempo que conduz para que as formulas se approximem, contribue igualmente para que os defeitos inevitaveis das observações produzaõ erros muito notaveis nos elementos, que d'ellas se deduzirem: não ha razão alguma, para que por ellas deixemos as formulas exactas, e rigorosas dos *numeros* 33, e 34.

§. III.

*Considerações geraes sobre a resolução das tres equações do Problema.*

36. Visto que o Problema se tem reduzido á determinação de tres incognitas por meio de outras tantas equações, parecerá que não resta mais do que usar dos methodos conhecidos da eliminação, que nos levarão finalmente a huma equação, em que não haverá mais do que huma incognita, a qual conseguintemente se determinará, e por meio d'ella as outras duas successivamente. Mas quem sabe a que galarim conduz a eliminação nas equações de grãos superiores, facilmente entenderá, que por esse caminho se meteria em hum abissmo.

37. Para mostrar porém com especialidade o que deveria resultar d'esse methodo no nosso caso, será necessario, que vejamos primeiramente a que estado se haõ de reduzir as equações, depois que se fizerem racionais. E tomando por exemplo a primeira do *num.* 33, que dá  $R(R^2 + 3K^2) - \phi t^2 = \sqrt{(R^2 - K^2)^3}$ , quadraremos de ambas as partes, e acharemos  $R^2(R^2 + 3K^2)^2 - 2\phi t^2 R(R^2 + 3K^2) + \phi^2 t^4 = (R^2 - K^2)^3$ , donde evoluendo as

po-

potencias indicadas, e reduzindo, teremos  $K^6 + 9R^4K^2 + 6R^2K^4 - 2\phi t^2R^3 - 6\phi t^2K^2R + \phi^2t^4 = 0$ ; equaçãõ, que parece racional, sem toda-via o ser relativamente ás incognitas  $x$ ,  $x''$ , como he necessario. As quantidades  $K^2$ ,  $K^4$ ,  $K^6$  fim saõ funcções racionais d'ellas, mas as potencias de  $R$  todas involvem irrationalidade.

38. Como pois temos  $R = r + r''$ , será  $R^2 = r^2 + r''^2 + 2rr''$ ,  $R^3 = (r^2 + 3r''^2)r + (r''^2 + 3r^2)r''$ ,  $R^4 = r^4 + r''^4 + 6r^2r''^2 + 4(r^2 + r''^2)rr''$ . Logo suppondo  $r^2 + r''^2 = A$ ,  $r^2 + 3r''^2 = B$ ,  $r''^2 + 3r^2 = C$ ,  $r^4 + r''^4 + 6r^2r''^2 = D$ , funcções todas racionais de  $x$ , e  $x''$ , teremos  $R = r + r''$ ,  $R^2 = A + 2rr''$ ,  $R^3 = Br + Cr''$ ,  $R^4 = D + 4Arr''$ ; e substituindo estes valores na equaçãõ do numero precedente, teremos  $K^6 + 9DK^2 + 6AK^4 + \phi^2t^4 + (36AK^2 + 12K^4)rr'' - (2\phi t^2B + 6\phi t^2K^2)r - (2\phi t^2C + 6\phi t^2K^2)r'' = 0$ .

39. E fazendo, para abreviar,  $K^6 + 9DK^2 + 6AK^4 + \phi^2t^4 = E$ ,  $36AK^2 + 12K^4 = F$ ,  $2\phi t^2B + 6\phi t^2K^2 = G$ ,  $2\phi t^2C + 6\phi t^2K^2 = H$ , teremos  $r'' = \frac{E - Gr}{H - Fr}$ ,

$r''^2 = \frac{E^2 - 2EGr + G^2r^2}{H^2 - 2HFr + F^2r^2}$ , donde se tira  $r = \dots$   
 $\frac{E^2 + G^2r^2 - H^2r''^2 - F^2r^2r''^2}{2EG - 2HFr''^2}$ , e conseguintemente

$(E^2 + G^2r^2 - H^2r''^2 - F^2r^2r''^2)^2 - r^2(2EG - 2HFr''^2)^2 = 0$ ;  
 equaçãõ livre de irrationalidade relativamente a  $x$ , e  $x''$ .

40. He pois facil de vêr em primeiro lugar, que na equaçãõ precedente haverá hum termo sem  $x$ , nem  $x''$ , porque  $E^2$  o tem, e conseguintemente não se poderá a equaçãõ abaixar do gráo, em que sahir; e em segundo lugar, que sendo  $E$  do sexto gráo a respeito de  $x$ ,  $x''$ ,  
 será

ferá  $E^2$  do duodecimo ; e como se ha de quadrar outra vez , será a equação do vigésimo quarto gráo relativamente a ambas as incognitas. O mesmo succederá na redução das outras duas equações.

41. Agora se com as duas primeiras reduzidas imaginarmos, que se elimina a incogina commua  $x$ , viremos necessariamente a dar em huma equação do gráo 576, na qual haverá sómente  $x'$ , e  $x''$ ; e usando d'esta juntamente com a terceira para eliminar  $x''$ , teriamos a equação final sómente com  $x'$ , mas essa seria do gráo 13824, conforme o que se acha demonstrado na *Theorica geral das eliminações*. Além do número exorbitante de termos, que devia ter esta equação, os coefficients serião funcções tão longas, e complicadas das quantidades dadas, que não poderia cada hum d'elles escrever-se senão em hum grande volume.

42. Do mesmo modo acharemos, que as equações approximadas, que havemos indicado no *num.* 35, conduzirião a huma equação final do gráo 4096. E se os intervallos fossen tão pequenos, que naquellas equações se pudesse desprezar  $K^2$  em comparação de  $12R^2$ , supposição que as reduziria a esta fórma  $RK^2 = \frac{2}{9} \Phi x^2$ , ainda assim

não poderia fazer-se a eliminação, sem cahir em huma equação do gráo 512, a qual como he absolutamente impraticavel, nenhuma vantagem util leva ás precedentes. Donde se conclue, que por meio da eliminação não pode já mais resolver-se esta questaõ, quaesquer que sejaõ as equações fundamentaes, porque sempre haõ de ser muitas, e de gráo superior, para darem por fim huma equação impraticavel, como as precedentes.

43. Mas ainda que realmente pudessemos haver huma equação final, que fosse accessivel ao calculo, não ganharíamos por isso mais, do que huma elegancia apparente na soluçaõ, á custa de huma multiplicação incrível de tra-

balho. Porque não havendo nicio geral, e directo para resolver as equações, que passão do quarto gráo, sempre se havia de recorrer ao methodo das falsas posições, ou a outro equivalente, para conseguir a resolução d'essa complicadissima equação, a que teriamos reduzido o Problema; e, sendo isto assim, muito mais breve, e mais expedito seria applicar immediatamente esses methodos ás equações fundamentaes, conservadas na fórma simples, em que se achão.

44. Reduz-se pois a questão a achar tres quantidades  $x, x', x''$  taes, que formando-se com ellas pelas equações auxiliares dos *num.* 27, e 28 os valores de  $R, R', R''$ , e  $K, K', K''$ , estes sejaõ os que convem para se verificarem as equações fundamentaes do *num.* 33. Vejamos o que nisso póde fazer o methodo das falsas posições.

45. Se cada huma das equações fundamentaes involvesse as tres incognitas, seria bem trabalhoso este methodo, que poderiamos chamar do segundo gráo, por haverem de cahir as supposições sobre duas das mesmas incognitas. Assim viria a soluçãõ a ter o grande inconveniente do methodo, que actualmente praticaõ os Astronomos, os quaes se achão na indispensavel necessidade de estabelecer as supposições sobre duas quantidades desconhecidas, que de ordinario costumaõ ser as distancias encurtadas correspondentes a duas observações. A unica ventagem, que se poderia considerar, he que elles saõ obrigados a repartir a attençaõ por muitas cousas, fazendo raciocinios a cada passo que haõ de dar, e nós, livres de todas as considerações accessorias, estariamos com tres regras de formulas algebricas á vista, sem outro cuidado mais, do que achar as hypothefes, que as verificassem.

46. Succede porém felizmente, que a combinaçãõ das tres equações, que escolhemos, tem a ventagem de se conterem nellas as incognitas duas a duas, donde se concluirá todo o negocio com maior facilidade, cahindo as suppo-

posições sobre huma só incognita. Porque não contendo a primeira equação fundamental, senão as duas incognitas  $x$ , e  $x''$ , está claro, que estabelecendo huma supposição arbitraria de  $x$ , por ella se determinará  $x''$ . E como a segunda equação contém fomite  $x$ , e  $x'$ , por ella com a mesma supposição de  $x$  se determinará  $x'$ . Assim teremos tres quantidades  $x, x', x''$ , que satisfazem ás duas primeiras equações; e se tambem satisfizessem á terceira, estaria resolvida a questão. Não satisfazendo porém, se notará o erro, e fazendo outra supposição de  $x$  se procederá do mesmo modo, até achar outro erro na terceira equação; e com os dous erros, e a differença das hypotheses, pela regra sabida das falsas posições, se achará o valor de  $x$ , ainda que pouco exacto, se os erros foraõ grandes. Mas fazendo outras duas supposições pouco differentes do primeiro valor achado, e continuando assim por diante a estreitar a differença das hypotheses, se acharia o valor de  $x$ , e conseguintemente o de  $x'$ , e  $x''$  com toda a exactidão, que fosse necessaria.

47. Mas este methodo ainda requer dilatados, e enfadonhos calculos, consistindo o principal embaraço na resolução das primeiras duas equações, quando feita a supposição de  $x$ , se buscarem os valores de  $x'$ , e  $x''$ . Esta resolução se faz tambem por falsas posições, que em cada hum dos casos recahem sobre a unica incognita, que se busca. Porém isto repetido tantas vezes, quantas forem as supposições de  $x$ , que se houverem de calcular, fará hum grande processo de calculos, que se deverá evitar do modo que for possível. E como a principal difficuldade consiste na resolução de duas equações separadamente, se pudermos haver outras mais faceis, ainda que sejaõ approximadas, teremos conseguido muito; porque, depois de sabermos proxima-mente os valores das incognitas, podemos resolver as equações fundamentaes com bastante facilidade. Isto he o que agora mostraremos.

## §. IV.

*Indagação dos Valores approximados das Incognitas do Problema.*

48. Supponhamos, que  $C, C', C''$  faõ os lugares do Cometa na sua Orbita (Fig. 4.), correspondentes ás tres observações, e tirando os raios vectores  $SC, SC', SC''$ , e as cordas  $CC'', CC', C'C''$ , será a corda  $CC''$  cortada no ponto  $P$  na razão proxima dos tempos, que o Cometa gastou em correr os arcos  $CC', C'C''$ . Porque, pela regra fabida de Kepler, faõ os sectores  $CSC', C'SC''$  na razão dos tempos; mas os sectores faõ entre si proximamente como os triangulos  $CSC', C'SC''$ ; e estes, por terem a base commua  $SC'$ , faõ como as alturas, e estas na razão de  $CP$  para  $PC''$ : logo seraõ os segmentos  $CP, PC''$  proximamente na razão dos tempos. E se dos pontos  $C, C', C'', P$  se abaixarem perpendiculares para o plano da ecliptica, a projecção da corda  $CC''$  ficará cortada na mesma razão proxima dos tempos.

49. Bem se vê que o lugar intermedio  $C'$  pôde cair em hum ponto tal, que sejaõ os segmentos  $CP, PC'$  na razão exacta dos tempos. Este ponto se acha pouco desviado do meio arco; e por isso convem, que os intervallos das observações sejaõ pouco desiguaes, ficando o mais breve, quanto for possivel, para a parte, donde se conjectura que estará o perihelio.

50. He tambem preciso saber o valor approximado do segmento  $C'P$ , cortado do raio vector medio  $SC'$  pela corda  $CC''$ . Para isso suppomos, que a força central de  $C$  até  $C''$  he constantemente a mesma, que tem lugar no ponto  $C'$ , e que sempre obra por direcções parallelas a  $C'S$ . Estas supposições naõ podem desviar-nos muito da verdade, quando os intervallos das observações naõ forem muito grandes; porque ainda que varia a intensão, e direcção da

da força, tomamos proximatemente o meio de huma, e outra a respeito do que são nos pontos extremos  $C, C''$ .

51. Conduzindo pois pelo Ponto  $C$  a Tangente  $CD$ , e por  $C''$  a recta  $C''D$  parallelá a  $C'S$ , está claro, que será  $C''D$  o effeito da força central da maneira que a temos supposto, no tempo que o Cometa gasta de  $C$  até  $C''$ . Para comparar este effeito com outro conhecido, supponhamos tambem que a terra na sua Orbita se achou nos pontos  $T, T', T''$ , quando o Cometa esteve respectivamente em  $C, C', C''$ ; e feita a mesma construcção, será  $T''d$  o effeito da força central sobre a terra por todo o tempo, que ella gastou de  $T$  até  $T''$ , ou o Cometa de  $C$  até  $C''$ .

52. Sendo pois os effeitos de forças constantes no mesmo tempo proporcionaes a ellas, as quaes são, como se sabe, na razão duplicada inversa das distancias, teremos  $C''D : T''d :: \overline{T'S}^2 : \overline{C'S}^2$ . E sendo os effeitos da mesma força constante em differentes tempos na razão duplicada d'elles, teremos tambem  $\underline{QC'} : DC'' :: \overline{CP}^2 : \overline{CC''}^2$  (n. 48.); mas he tambem  $\underline{QP} : DC'' :: CP : CC''$ : logo  $\underline{QC'} = \frac{DC'' \cdot \overline{CP}^2}{\overline{CC''}^2}$ ,  $\underline{QP} = \frac{DC'' \cdot CP}{CC''}$ , e  $C'P = \underline{QP} - \underline{QC'} = DC'' \left( \frac{CP}{CC''} - \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CC''}^2} \right)$ . Semelhantemente acharemos  $T'p = T''d \left( \frac{Tp}{TT''} - \frac{\overline{TP}^2}{\overline{TT''}^2} \right)$ ; e reflectindo que  $\frac{CP}{CC''} = \frac{Tp}{TT''}$ , por indicar cada huma d'estas expressões a razão proxima dos mesmos tempos, teremos  $C'P : T'p :: DC'' : T''d :: \overline{ST'}^2 : \overline{SC'}^2$ , e conseguintemente  $C'P = T'p \cdot \frac{\overline{ST'}^2}{\overline{SC'}^2}$ .

53. Agora suppondo, que  $TT''$  he hum arco de círculo descrito com o raio  $ST' = s'$ , e guardando as denominações, que já havemos estabelecido, será o angulo

$T'Tp = \frac{1}{2} S''$ ;  $T'pT = 90^\circ + \frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S''$ , e a corda  $T'T$   
 $= 2 s' \text{ Sen. } \frac{1}{2} S'$ . Donde se segue que o triangulo  $T'T'p$

dará  $T'p = \frac{2 s' \cdot \text{Sen. } \frac{1}{2} S' \cdot \text{Sen. } \frac{1}{2} S''}{\text{Cof. } \left( \frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S'' \right)}$ . Pelo que, fazendo

$$\frac{2 s'^3 \cdot \text{Sen. } \frac{1}{2} S' \cdot \text{Sen. } \frac{1}{2} S''}{\text{Cof. } \left( \frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S'' \right)} = \Theta, \text{ teremos } C'P = \frac{\Theta}{r'^2}. \text{ Se dos}$$

pontos  $C', P$  se abaixarem perpendiculares ao plano da ecliptica, he facil de ver, que sendo a projecção de  $SC' = \rho'$ , será a projecção de  $C'P = \frac{\Theta \rho'}{r'^3}$ .

54. Sejaõ agora  $C, C', C''$  (Fig. 5.) os lugares do Cometa marcados pelas perpendiculares abaixadas dos pontos da Orbita para o plano da ecliptica; e guardando as denominações estabelecidas, teremos  $ST' = s', T'C' = s' \text{ Cof. } L', C'S = \rho', C'P = \frac{\Theta \rho'}{r'^3}$ ,  $\text{Sen. } T'C'S = \frac{s' \cdot \text{Sen. } A'}{\rho'}$ ,  $\text{Cof. } T'C'S = \frac{s' \text{ Cof. } L' - s' \text{ Cof. } A'}{\rho'}$ . Isto posto, se conduzirmos as rectas  $BP, DP$ , e designarmos  $C'DP$  por  $\psi$ , e  $C'BP$  por  $\chi$ , o triangulo  $DC'P$  dará  $\text{Sen. } \psi = \frac{C'P \cdot \text{Sen. } DC'P}{DP} = \frac{\Theta s' \cdot \text{Sen. } A'}{DP \cdot r'^3}$ , e  $\text{Sen. } (DC'P + \psi) = \frac{C'D \cdot \text{Sen. } DC'P}{DP}$ , isto he,  $\frac{s' \text{ Sen. } A'}{\rho'} \text{ Cof. } \psi + \frac{\text{Sen. } \psi (s' \text{ Cof. } L' - s' \text{ Cof. } A')}{\rho'}$ .

$= C' D \frac{s' \text{ Sen. } A'}{r' \cdot DP}$ ; e substituinto o valor de  $\text{Sen. } \psi$ , teremos  $\text{Cof. } \psi = \frac{r'^3 \cdot C' D - \Theta (x' \text{ Cof. } L' - s' \text{ Cof. } A')}{r'^3 \cdot DP}$ . Do mesmo modo se achará  $\text{Sen. } \chi = \frac{\Theta s' \cdot \text{Sen. } A'}{BP \cdot r'^3}$ , e  $\text{Cof. } \chi = \frac{r'^3 \cdot C' B - \Theta (x' \text{ Cof. } L' - s' \text{ Cof. } A')}{r'^3 \cdot BP}$ .

55. É porque os triangulos  $DC''P, AC''C$ , que tem o angulo em  $C''$  commum, dão  $\text{Sen. } AC''C = \frac{AC \cdot \text{Sen. } CAC''}{CC''} = \frac{DP \cdot \text{Sen. } C'' DP}{C'' P}$ , lembrando-nos, que temos supposto  $CAC'' = C, C''DC' = C''$ , e que he  $C''P : CC'' :: t'' : t$  proximate (num. 48.), teremos  $AC = \frac{t \cdot DP \cdot \text{Sen. } (C'' + \psi)}{t'' \text{ Sen. } C}$ , isto he,  $AC = \frac{t \cdot DP (\text{Sen. } C'' \text{ Cof. } \psi + \text{Sen. } \psi \text{ Cof. } C'')}{t'' \text{ Sen. } C}$ .

Pelo que substituinto os valores de  $\text{Sen. } \psi$  e  $\text{Cof. } \psi$ , e reduzindo, teremos  $AC = \frac{t \text{ Sen. } C''}{t'' \text{ Sen. } C} (C' D + \frac{\Theta}{r'^3} (\frac{s' \text{ Sen. } (A' + C'')}{\text{Sen. } C''} - x' \text{ Cof. } L'))$ . Porém  $AT = \frac{g \text{ Sen. } (A + B + C)}{\text{Sen. } C}$ , e  $DT' = \frac{g' \text{ Sen. } (A' + B' + C'')}{\text{Sen. } C''}$ . Logo suppondo  $\frac{g \text{ Sen. } (A + B + C)}{\text{Sen. } C \text{ Cof. } L} = b$ ,  $\frac{g' \text{ Sen. } (A' + B' + C'')}{\text{Sen. } C'' \text{ Cof. } L'} = x$ ,  $\frac{s' \text{ Sen. } (A' + C'')}{\text{Sen. } C'' \text{ Cof. } L'} = q$ ,  $\frac{t \text{ Sen. } C'' \text{ Cof. } L'}{t'' \text{ Sen. } C \text{ Cof. } L} = m$ , teremos  $x = b + m (x' - x) + \frac{\Theta m (q - x')}{r'^3}$ .

56. Do mesmo modo os triangulos  $BCP, ACC''$ , que

que tem o angulo commum em  $C$ , daraõ  $AC'' = BP$   
 $\left( \frac{t \text{ Sen. } (C' - \chi)}{t' \text{ Sen. } C} \right) = BP \cdot \frac{t}{t' \text{ Sen. } C} (\text{Sen. } C' \text{ Cof. } \chi - \text{Sen. } \chi \text{ Cof. } C)$ .

E fazendo substituições, e reduções semelhantes, acharemos

$$AC'' = \frac{t \text{ Sen. } C'}{t' \text{ Sen. } C} \left( C'B + \frac{\Theta}{r'^3} \left( \frac{s' \text{ Sen. } (C' - A')}{C'} - \kappa' \text{ Cof. } L' \right) \right).$$

Mas he  $AT'' = \frac{g \text{ Sen. } (A + B)}{\text{Sen. } C}$ , e  $BT'' = \frac{g' \text{ Sen. } (A + B')}{\text{Sen. } C'}$ .

Logo suppondo  $\frac{g \text{ Sen. } (A + B)}{\text{Sen. } C \text{ Cof. } L''} = b'$ ,  $\frac{g' \text{ Sen. } (A + B')}{\text{Sen. } C' \text{ Cof. } L'} = \kappa'$ ,

$\frac{s' \text{ Sen. } (C' - A')}{\text{Sen. } C' \text{ Cof. } L'} = q'$ , e  $\frac{t \text{ Sen. } C' \text{ Cof. } L'}{t' \text{ Sen. } C \text{ Cof. } L''} = m'$ , acharemos

$$\kappa'' = b' + m' (\kappa' - \kappa') + \frac{\Theta m' (q' - \kappa')}{r'^3}.$$

57. Temos pois conseguido por meio das duas equações finaes dos numeros precedentes a grande vantagem de evitar as longas operações, que eraõ precisas para a resolução das duas equações fundamentaes, de que fizemos menção no *num.* 47, em quanto se trata de achar os primeiros valores approximados das incognitas. Estas duas equações se haõ de combinar com huma das equações fundamentaes, donde resultaõ tres modos diversos de resolver proximamente a questãõ, entre os quaes escolheremos o que se contém nas tres equações seguintes:

$$\kappa = b + m (\kappa' - \kappa) + \frac{\Theta m (q - \kappa')}{r'^3}$$

$$R'^3 (4 - 3 \omega'^2 - \omega'^3) - \Phi t'^2 = 0$$

$$\kappa'' = b' + m' (\kappa' - \kappa') + \frac{\Theta m' (q' - \kappa')}{r'^3}$$

das quaes bastariaõ as duas primeiras, se nos contentassemos de determinar os elementos da Orbita com os valores approximados de  $\kappa$  e  $\kappa'$ , que provem d'ellas, sem os que-

querer ulteriormente corrigir por meio das tres equações fundamentaes.

58. Como  $s'^2 = x'(x' - a') + s'^2$ , as duas equações approximadas não contém mais do que a incognita  $x'$  no segundo membro. Assim, fazendo cahir sobre ella as falsas posições, e tomando arbitrariamente hum valor de  $x'$ , facilmente acharemos o de  $x$  pela primeira equação, os quaes se substituirão na segunda, e se notará o erro. Continuando d'este modo as operações, se achará o valor de  $x'$ , que convem para verificar as duas primeiras equações, e com elle se determinará  $x''$  pela terceira.

59. Mas como as falsas posições, em quanto andaõ por longe, encaminhaõ lentamente para o descobrimento da quantidade, que se busca, usaremos com grande ventagem do methodo das Interpolações, que a passos incomparavelmente mais rapidos nos levará onde pretendemos. Assim, tomando tres valores hypotheticos de  $x'$  em progressão arithmetica, e denotando o primeiro por  $x'$ , o segundo por  $x' + \eta$ , e o terceiro por  $x' + 2\eta$ , calcularemos os valores correspondentes de  $x$ , e veremos que resultados dá pela substituição delles a segunda equação do *num.* 57, os quaes supponmos que por sua ordem são  $\gamma, \gamma', \gamma''$ . Entraõ, denotando por  $d x'$  a correcção do primeiro valor hypothetico  $x'$ , em consequencia do methodo das Interpolações, teremos

$$dx' = \frac{\eta(3\gamma - 4\gamma' + \gamma'')}{2(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')} \pm \sqrt{\left( \frac{\eta^2(2\gamma - 4\gamma' + \gamma'')}{4(\gamma - 2\gamma' + \gamma')} - \frac{2\gamma\eta^2}{(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')} \right)}$$

60. No uso da formula precedente não póde haver dúvida, em quanto ao final ambiguo da parte radical, porque olhando para as quantidades  $\gamma, \gamma', \gamma''$ , logo se verá qual dos sinais convem para se chegar a desvanecer o resultado, que em lugar d'ellas ha de dar a equação fundamental.

61. Tambem não póde haver hesitação na escolha dos primeiros valores hypotheticos de  $x'$ , porque quando os

Cometas se começaõ a ver da terra, quasi sempre estaõ mais vizinhos della, que o Sol. Por isso podemos sempre tomar  $x' = 0,2$  e  $\eta = 0,4$ , isto he, tomar os tres valores hypotheticos 0,2, 0,6, e 1,0 para a primeira operaçaõ. E depois de achar a correccãõ, tomar-se-haõ outros tres muito vizinhos do que se determinou, para novamente se corrigir; e quasi nunca serã preciso fazer terceira operaçaõ.

## §. V.

*Resoluçaõ das tres Equações fundamentaes.*

62. Conhecidas proximamente as distancias  $x, x', x''$  pelo methodo precedente, com ellas podemos resolver facilmente as equações rigorosas do Problema pelo methodo das formulas differenciaes, as quaes daraõ as correccões d'ellas com a exactidaõ, que se quizer.

63. Para isso formaremos com os valores proximos de  $x, x', x''$  os valores correspondentes de  $R, R', R''$ , e  $\omega, \omega', \omega''$  por meio das equações auxiliares, e os substituiremos nas equações do *num.* 34, as quaes em vez de se verificarem, dando o segundo membro = 0, supponhamos que o daõ por sua ordem  $\delta, \delta', \delta''$ , sendo estas quantidades muito pequenas, como devem ser, por suppormos, que os valores de  $x, x', x''$ , de que usãmos, sãõ proximos aos verdadeiros. Entãõ, suppondo que as correccões d'aquelles valores sãõ  $dx, dx', dx''$ , estes se deverãõ determinar pelas equações seguintes:

$$d ( R^3 ( 4 - 3 \omega^2 - \omega^3 ) ) + \delta = 0$$

$$d ( R'^3 ( 4 - 3 \omega'^2 - \omega'^3 ) ) + \delta' = 0$$

$$d ( R''^3 ( 4 - 3 \omega''^2 - \omega''^3 ) ) + \delta'' = 0$$

64. Começando pois pela evoluçaõ da primeira, teremos

$$3 R^2 d R (4 - 3 \omega^2 - \omega^3) - 3 R^3 (2 \omega d \omega + \omega^2 d \omega) + \delta = 0,$$

$$\text{ou } 3 R^2 (d R (4 - 3 \omega^2 - \omega^3) - 2 R \omega d \omega - R \omega^2 d \omega) + \delta = 0,$$

Porém he  $1 - \omega^2 = \frac{K^2}{R^2}$ , e conseguintemente  $-2 R \omega d \omega =$

$$\frac{2 K d K}{R} - \frac{2 K^2 d R}{R^2} = \frac{2 K d K}{R} - d R (2 - 2 \omega^2), \text{ e } -R \omega^2 d \omega$$

$$= \frac{\omega K d K}{R} - d R (\omega - \omega^3). \text{ Logo substituindo estes valo-}$$

res, e fazendo, para abbreviar,  $\frac{3}{2} R^2 (2 - \omega - \omega^2) = E,$

$$\frac{3}{2} R (2 + \omega) = F, \text{ acharemos } E \cdot 2 d R + F \cdot 2 K d K + \delta = 0.$$

65. É porque  $d R = d r + d r''$ , e  $2 d r = \frac{d x (2 x - a)}{r}$ ,  
e  $2 d r'' = \frac{d x'' (2 x'' - a'')}{r''}$ , suppondo  $\frac{2 d x - a}{r} = D$ , e  
 $\frac{2 x'' - a''}{r''} = D''$ , será  $2 E d R = E D d x + E D'' d x''$ . Do

mesmo modo differenciando a equação  $K^2 = x (x - b) + x'' (x'' + e'' - f x) + g^2$ , acharemos  $2 K d K = d x (2 x - b - f x'') + d x'' (2 x'' + e'' - f x)$ . Pelo que suppondo  $D E + F (2 x - b - f x'') = \alpha$ , e  $D'' E + F (2 x'' + e'' - f x) = \beta''$ , teremos  $\alpha d x + \beta'' d x'' + \delta = 0$ .

66. Por hum calculo semelhante, suppondo  $\frac{3}{2} R'^2 (2 - \omega' - \omega'^2) = E'$ , e  $\frac{3}{2} R' (2 + \omega') = F'$ , acharemos  $2 E' d R' + 2 F' K' d K' + \delta' = 0$ . Mas  $d R' = d r + d r'$ , e  $2 d R' = \frac{d x (2 x - a)}{r} + \frac{d x' (2 x' - a')}{r'}$ , e  $2 K' d K' = d x (2 x - e - f' x') + d x' (2 x' + b' - f' x)$ . Logo suppondo

$\frac{2x' - a'}{r'} = D'$ ,  $E'D' + F'(2x' + b' - f'x) = \alpha'$ , e  $E'D' + F'(2x - e - f'x') = \beta$ , ferá  $\alpha' dx' + \beta dx + \delta' = 0$ .

67. Do mesmo modo tomando  $\frac{3}{2} R''^2 (2 - \omega'' - \omega''^2) = E''$ , e  $\frac{3}{2} R'' (2 + \omega'') = F''$ , ferá  $2E'' dR'' + 2F'' K'' dK'' + \delta'' = 0$ ,  $2dR'' = \frac{dx' (2x' - a')}{r'} + \frac{dx'' (2x'' - a'')}{r''} = D' dx' + D'' dx''$ , e  $2K'' dK'' = dx'' (2x'' + b'' - f''x') + dx' (2x' - e' - f''x'')$ . Pelo que, suppondo  $E'' D'' + F'' (2x'' + b'' - f''x') = \alpha''$ , e  $E'' D' + F'' (2x' - e' - f''x'') = \beta'$ , ferá  $\alpha'' dx'' + \beta' dx' + \delta'' = 0$ . E assim teremos para resolver as tres equações seguintes:

$$\alpha dx + \beta'' dx'' + \delta = 0$$

$$\alpha' dx' + \beta dx + \delta' = 0$$

$$\alpha'' dx'' + \beta' dx' + \delta'' = 0.$$

68. Feita a resolução pelo methodo conhecido, acharemos

$$dx = - \frac{\alpha' \alpha'' \delta + \beta' \beta'' \delta' - \alpha' \beta'' \delta''}{\alpha x' \alpha'' + \beta \beta' \beta''}$$

$$dx' = - \frac{\beta dx + \delta'}{\alpha'}, \quad dx'' = - \frac{\alpha dx + \delta}{\beta''};$$

valores, que nos darão as correções procuradas das quantidades suppostas  $x, x', x''$ . Com estas, depois de corrigidas, tornaremos a calcular os resultados das equações fundamentais  $\delta, \delta', \delta''$ , e procedendo do mesmo modo, acharemos outras, e outras correções, até se verificarem as ditas equações. Mas quasi nunca será preciso na prática fazer segunda vez a operação precedente, se as observações forem bem escolhidas, e os intervallos d'ellas não forem muito desiguaes, nem excessivamente grandes. Porque sendo nesse caso os primeiros valores, achados pela

ap-

aproximação do §. IV, muito chegados aos verdadeiros, basta que huma vez se faça a operação precedente, para os corrigir quanto he necessario. Em geral nos governaremos pela grandeza das correções achadas, para nos resolvermos a repetir, ou não repetir a operação.

69. Onde quer que se haja de parar, com os ultimos valores correctos se deveriaõ calcular as quantidades  $r, r'', R, \omega$ , que haõ de servir na determinação dos elementos da Orbita. Mas será mais breve corrigir tambem por meio de formulas differenciaes os ultimos valores calculados d'ellas naquella operação, em que se parar. Assim

teremos  $dr = \frac{1}{2} D dx; dr'' = \frac{1}{2} D'' dx'', dR = dr + dr''$ . E

porque  $\omega d\omega = \frac{dR}{R} (1 - \omega^2) - \frac{K dK}{R^2}$ , e por outra parte

$K dK = \frac{1}{2} dx (2x - b - f x'') + \frac{1}{2} dx'' (2x'' + e'' - f x)$ ,

fendo tambem  $2x - b - f x'' = \frac{a - DE}{F}$ , e  $2x'' + e'' - f x =$

$\frac{\beta'' - D'' E}{F}$ , teremos  $K dK = \frac{a dx + \beta'' dx'' - E (D dx + D'' dx'')}{2F}$

$= -\frac{\delta}{2F} - R dR (1 - \omega)$ , e substituindo este valor, e re-

duzindo  $d\omega = \frac{dR (2 + \omega) (1 - \omega)}{R \omega} + \frac{\delta}{2F \omega R^2}$ .

70. Mas tornemos a fazer algumas considerações analyticas sobre as formulas differenciaes, que daõ as correções de  $x, x', x''$ . Se no valor de  $dx$  desvanecesse juntamente o numerador, e o denominador, sería indicio manifesto, que as tres equações differenciaes não determinavaõ as correções; e por consequencia, que nem as tres equações fundamentaes determinavaõ o Problema. Nesse caso huma das equações se conteria nas outras duas, como he facil de ver, procurando directamente as condições para isso necessarias. Multipliquemos a primeira por hum fa-

tor indeterminado  $M$ , e a segunda por  $N$ ; e sommando-as, teremos  $(M\alpha + N\beta) dx + M\beta'' dx'' + N\alpha' dx' + M\delta + N\delta' = 0$ . Esta equação deverá ser identica com a terceira das propostas, se ella depende das outras duas; e esta condição dará  $M\alpha + N\beta = 0$ ,  $M\beta'' = \alpha''$ ,  $N\alpha' = \beta'$ ,  $M\delta + N\delta' = \delta'$  por equações de condição, das quaes se tira  $M = \frac{\alpha''}{\beta''}$ ,  $N = \frac{\beta'}{\alpha'}$ ; e substituindo estes valores na primeira, teremos  $\alpha\alpha'\alpha'' + \beta\beta'\beta'' = 0$ ,  $\alpha'\alpha''\delta + \beta'\beta''\delta' - \alpha'\beta''\delta' = 0$ .

71. Ainda que isto seja huma consideração puramente analytica, que não deve ter lugar na nossa questão, todavia d'ahi podemos conhecer, que quando os valores do numerador, e denominador sobreditos forem tão pequenos, que se possam reputar quasi desvanecidos, será o Problema muito proximo ao estado de indeterminado, e os valores que sahirem para  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$  não terão na praxe a exactidão necessaria. Isto deve succeder necessariamente quando os intervallos das observações forem nimamente pequenos, porque então serão as equações quasi identicas; e por isso se deve evitar a circumstancia da grande proximidade das observações, sobre a qual fundarão alguns Geometras as suas soluções d'este Problema, engenhosas na theorica, inuteis na prática.

72. Outro embaraço ainda maior pôde succeder, se no valor de  $dx$  sómente desvanecer o denominador, ou for muito pequeno em comparação do numerador. Então sahi-ria a correcção de  $dx$  infinita, ou muito grande, contra o que devia ser, por havermos já conseguido o valor proximo de  $x$  pelo methodo do §. IV. Este inconveniente igualmente se havia de encontrar na resolução da equação final, se pudessem eliminar-se praticamente as duas incognitas  $x'$ ,  $x''$ . Porque se tomássemos por  $x$  hum valor tal, que sem embargo de ser muito approximado, fizesse com tudo que o resultado da equação fosse hum maximo, ou hum minimo, o methodo das formulas differenciaes sería inutil para o

corrigir, pois daria huma correcção infinita, como he facil de entender, combinando os principios do dito methodo com a propriedade conhecida dos maximos, e minimos. E como as formulas differenciaes, que havemos dado, são huma abbreviatura, da que se havia de ter para a resolução da sobredita equação final, está claro, que para servirem utilmente não basta, que os valores de  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$  se saibão proximamente; mas he necessario, que não estejão nos limites das raizes das equações respectivas, onde ellas dão o maximo, ou minimo resultado.

73. Mas de qualquer fórma que se proceda, quasi sempre será impossivel satisfazer exactamente na prática ás tres equações fundamentaes. Porque pertencendo ellas a huma orbita rigorosamente parabolica, qual não he a dos Cometas, e havendo sempre alguns defeitos inevitaveis nas observações, posto que ella o fosse, não terão lugar aquellas equações senão proximamente; e assim trabalhariamos em vão se continuassemos as operações das formulas differenciaes com o fim de satisfazer com exactidão ás mesmas equações fundamentaes. Porque as correcções achadas encaminharião para a verificação d'ellas até certo ponto, e depois d'isso ou tornariaõ a desviar-se, ou ficariaõ na alternativa de darem de huma operação para a outra os mesmos valores de  $dx$ ,  $dx'$ ,  $dx''$  com sinais contrarios.

74. Havendo pois neste caso de parar necessariamente em alguma parte, não he o methodo, que havemos exposto, o mais proprio para nos mostrar o lugar mais ventajoso, em que devemos ficar. Para isso serve muito melhor o methodo das interpolações, o qual, ainda que he algum tanto mais extenso, tem a ventagem de dar a resolução exacta, quando he possivel, e quando não, a mais approximada de todas.

75. Suppondo que já conhecemos proximamente os valores de  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$ , com  $x$ , e  $x''$  acharemos o resultado  $\delta$  da primeira equação fundamental; e fazendo sómente variar  $x'$ , buscaremos a sua correcção, que verifique a dita equa-

equação, para o que basta calcular a quantidade  $\beta''$ , e será  $d\alpha'' = -\frac{\delta}{\beta''}$ , repetindo-se esta operação, se for neces-

fario. Conservando o mesmo valor de  $\alpha$ , buscaremos depois a correcção de  $\alpha'$  de maneira, que se satisfaça á segunda equação fundamental, usando para isso da formula

$$d\alpha' = -\frac{\delta'}{\alpha'}$$

Então substituiremos os valores achados de  $\alpha'$ , e  $\alpha''$  na terceira equação fundamental, cujo resultado designaremos por  $\gamma$ ; e tomando outros dous valores de  $\alpha$  em progressão arithmetica  $\alpha + \eta$ ,  $\alpha + 2\eta$ , sendo  $\eta$  huma quantidade arbitraria pouco differente das correcções  $d\alpha'$ ,  $d\alpha''$ , que se acháraõ na operação antecedente, procederemos do mesmo modo, até acharmos na terceira equação os resultados respectivos  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ . Então designando por  $d\alpha$  a correcção do primeiro valor hypothetico de  $\alpha$ , teremos

$$d\alpha = \frac{\eta(3\gamma - 4\gamma' + \gamma'')}{2(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')} + \sqrt{\left(\frac{\eta^2(3\gamma - 4\gamma' + \gamma'')}{4(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')} - \frac{2\gamma\eta^2}{(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')}\right)}$$

valor, que será real todas as vezes que se puder satisfazer juntamente ás tres equações; e imaginario, quando não for possivel. Mas a parte real d'este valor dará a correcção propria de  $\alpha$ , para que satisfazendo-se ás duas primeiras equações, a terceira dê o resultado menor que he possivel.

76. Se com o valor de  $\alpha$  não puder achar-se  $\alpha''$ , que satisfaça exactamente á primeira equação fundamental, deixaremos esta para prova; e tomando  $\alpha'$  para fundamento da interpolação, buscaremos os valores de  $\alpha$ , e  $\alpha''$  que satisfaçaõ ás duas ultimas equações. Do mesmo modo faremos cahir a interpolação sobre  $\alpha''$ , se a segunda equação não admittir solução exacta. Mas se duas, ou todas tres estiverem no mesmo caso, deveremos então usar da interpolação, para a resolução de cada huma ser do modo mais approximado que he possivel. Estes calculos sómente se fariaõ no caso de haver observações exactissimas, e de se que-

querer saber o resultado da hypothese parabolica; e entãõ deveria haver tambem a advertencia de corrigir os lugares observados do effeito da parallaxe, a qual se deduzirá com facilidade dos primeiros valores approximados de  $x, x', x''$ .

### §. VI.

#### *Determinação dos Elementos da Orbita.*

77. Como os elementos da orbita parabolica de hum Cometa se podem determinar por meio de duas distancias conhecidas d'elle á terra, e como a natureza da questãõ não permite, que se achem essas duas distancias, sem igualmente se indagar a tereceira, temos aqui tambem mais do que era necessario para resolver o Problema. As tres distancias  $x, x', x''$ , tomadas duas a duas, daraõ tres modos differentes de concluir os elementos procurados, os quaes deverãõ fahir os mesmos, se as observações forem exactas, e a orbita rigorosamente parabolica. Mas, faltando estas condições, daraõ tres systemas differentes de elementos, sendo as differenças mais, ou menos sensiveis, conforme as faltas das mesmas condições. Não havendo outra razaõ de preferencia, escolheremos as distancias extremas  $x, x''$ ; e quando as circunstancias pedirem que usemos de outras, como abaixo se dirá, o calculo será da mesma maneira, havendo sómente a advertencia de usar das formulas respectivas ás distancias, de que nos quizermos servir.

78. Primeiramente determinaremos com muita facilidade a distancia perihelia. Porque com as distancias  $x, x''$  calcularemos as quantidades correspondentes  $r, r'', R, \omega$  (*num. 69*); e introduzindo a quantidade  $\omega$  na equação do

$$\text{num. 20, em que achamos } p = \frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}}, \text{ tere-}$$

$$\text{mos mais simplesmente } p = \frac{rr'' - \frac{1}{4} R^2 \omega^2}{R(1 - \omega)}.$$

79. Com igual facilidade conheceremos o instante da passagem pelo perihelio. Porque designando por  $\tau$  a differença de tempo entre o instante da primeira observação, e o da passagem pelo perihelio, teremos  $\tau = n(r + 2p) \sqrt{r - p}$  (*num.* 18). A differença  $\tau$  he additiva ao tempo da primeira observação, todas as vezes que for  $r > r''$ ; mas sendo  $r < r''$  póde ser additiva, ou subtractiva. Nesses casos, para nos livrarmos de ambiguidade, calcularemos a differença  $\tau''$  entre o instante da passagem pelo perihelio, e o da terceira observação, pela formula respectiva  $\tau'' = n(r'' + 2p) \sqrt{r'' - p}$ ; e a differença  $\tau''$  será subtractiva do tempo da terceira observação: sendo evidente, que no caso de  $r > r''$  fica necessariamente a passagem pelo perihelio para diante da primeira observação, e no caso de  $r < r''$  para traz da terceira, quer o Cometa seja directo, quer retrogrado. O caso de  $r = r''$  não careceria de calculo algum, pois cahiria a passagem justamente no meio do intervallo das duas observações.

80. Para se deduzir o resto dos elementos, supponhamos o Cometa no tempo da primeira observação em  $C$  (Fig. 6.), a Terra em  $T$ , o Sol em  $S$ . Abaixando para o plano da ecliptica a perpendicular  $CP$ , o ponto  $P$  marcará o lugar do Cometa reduzido á ecliptica, e conforme as nossas denominações, será  $TC = x$ ,  $TS = s$ ,  $SC = r$ ,  $CTP = L$ . Supponhamos tambem, que  $SN$  representa a linha dos nodos, ou a intersecção do plano da orbita com o da ecliptica, cahindo o nodo ascendente para a parte de  $N$ , e entendendo-se sempre por nodo ascendente o ponto, donde a orbita, segundo a direcção do movimento do Cometa, principia a desviar-se da ecliptica para a parte boreal. Se por  $CP$  imaginarmos que passa hum plano  $NPC$  perpendicular á linha dos nodos  $SN$ , será  $CNP$  a

in-

inclinação dos planos da orbita, e ecliptica, que suppo-  
remos =  $I$ ; e conduzindo pelo ponto  $T$  a recta  $TQ$  pa-  
rallela, e  $TR$  perpendicular a  $SN$ , he evidente, que fe-  
rá  $PTQ$  a longitude do Cometa menos a do nodo ascen-  
dente, e  $TSN$  a longitude da Terra vista do Sol menos  
a longitude do mesmo nodo. Assim designando a longitude  
do nodo por  $N$ , a do Cometa por  $l$ , e a do Sol por  $\Sigma$ ,  
teremos  $PTQ = l - N$ , e  $TSN = \Sigma + 180^\circ - N$ .

81. Supposta a construcção precedente, he facil de  
ver, que teremos  $\text{Cot. } I = \frac{PN}{CP}$ ,  $CP = x \text{ Sen. } L$ ,  $TP = x \text{ Cof. } L$ ,  
 $PN = PQ + TR = TP \cdot \text{Sen. } (l - N) + s \cdot \text{Sen. } (\Sigma + 180^\circ - N)$   
 $= x \text{ Cof. } L \text{ Sen. } (l - N) - s \text{ Sen. } (\Sigma - N)$ ; e suppondo, pa-  
ra abbreviar,  $x \text{ Sen. } L = \varpi$ ,  $x \text{ Cof. } L = \lambda$ , teremos depois de  
feita a substituição  $\text{Cot. } I = \frac{\lambda \text{ Sen. } (l - N) - s \text{ Sen. } (\Sigma - N)}{\varpi}$ .

Do mesmo modo suppondo para o instante da terceira  
observação a longitude do Cometa =  $l''$ , a do Sol =  $\Sigma''$ ,  
 $x'' \text{ Sen. } L'' = \varpi''$ ,  $x'' \text{ Cof. } L'' = \lambda''$ , teremos  $\text{Cot. } I = \dots$   
 $\frac{\lambda'' \text{ Sen. } (l'' - N) - s \text{ Sen. } (\Sigma'' - N)}{\varpi''}$ . Igualando entre si os

dous valores de  $\text{Cot. } I$ , fazendo a evoluçãõ costumada dos  
Senos, dividindo tudo por  $\text{Cof. } N$ , e separando para hum  
só membro os termos, que tem  $\text{Tg. } N$ , acharemos para de-  
terminar o lugar do nodo a equaçãõ seguinte :

$$\text{Tg. } N = \frac{\varpi'' (\lambda \text{ Sen. } l - s \text{ Sen. } \Sigma) - \varpi (\lambda'' \text{ Sen. } l'' - s'' \text{ Sen. } \Sigma'')}{\varpi (s'' \text{ Cof. } \Sigma'' - \lambda'' \text{ Cof. } l'') - \varpi'' (s \text{ Cof. } \Sigma - \lambda \text{ Cof. } l)}$$

82. He de advertir, que se hum Cometa não tivesse  
latitude alguma em ambas as observações, sería  $\varpi = 0$ , e  
 $\varpi'' = 0$ , donde se vê, que juntamente desvaneceria o nu-  
merador, e denominador da expressãõ antecedente. Assim  
teriamos por valor da Tangente de  $N$  huma quantidade

indefinida, como deve ser na realidade, por coincidir entã o plano da orbita com o da ecliptica, e não haver mais razão para dizer que o corta em hum ponto, do que em outro qualquer. E d'ahi podemos concluir, que todas as vezes que os valores de  $\varpi$ ,  $\varpi''$ , ainda que grandes fejaõ, combinados na equaçã com as outras quantidades que nella entraõ, derem simultaneamente o numerador, e denominador muito pequenos; as duas distancias, que escolhemos, saõ pouco proprias para a determinaçã do nodo. Assim veremos que resultado daõ as outras duas combinações de  $x$ ,  $x'$ , e de  $x'$ ,  $x''$ ; e se todas estas estiverem no mesmo caso, será necessario calcular outras observaões, que melhor sirvaõ para determinar este elemento. Mas o melhor de tudo he escolher logo as tres observaões primitivas de maneira, que determinem bem a posiçaõ do nodo, o que se conseguirá procurando, que entre ellas fique comprehendida a passagem do Cometa pela ecliptica, quando puder ser; e quando não, que huma das observaões não fique muito longe d'esta passagem.

83. Deve notar-se tambem, que a especie de  $N$  se determina pelos sinais do numerador, e denominador da fracçaõ, pela qual se exprime a sua Tangente. Porque  $\frac{+}{+}$  dará  $N$  no primeiro quadrante,  $\frac{+}{-}$  no segundo,  $\frac{-}{-}$  no terceiro, e  $\frac{-}{+}$  no quarto, como he facil de entender, reflectindo que o numerador, e denominador saõ quantidades analogas ao Seno, e Coseno de  $N$ , e que os Senos saõ negativos de  $6^{\circ}$  até  $12^{\circ}$ , e os Cosenos de  $3^{\circ}$  até  $9^{\circ}$ . Donde se vê, que ainda que algebricamente he o mesmo

$$\text{Tg. } N = \frac{+a}{+b} \text{ que } \text{Tg. } N = \frac{-a}{-b}, \text{ e } \text{Tg. } N = \frac{+a}{-b} \text{ o mes-$$

mo que  $Tg. N = \frac{-a}{+b}$ , com tudo em quanto a especie

de  $N$  faõ expressões, que se não devem confundir.

84. Ainda se pôde facilitar muito mais a regra da especie dos arcos, cuja Tangente se exprime por huma fracção, se em lugar dos arcos, que excedem  $180^\circ$ , tomarmos os seus suplementos para  $360^\circ$  com sinal contrario, porque assim vimos a cahir no mesmo ponto da circumferencia, ao qual corresponde sempre o mesmo Seno, Tangente &c., e com o mesmo sinal. D'este modo nos lembraremos facilmente que  $N$  he positivo ou negativo, conforme o sinal do numerador; e agudo, ou obtuso, conforme for o denominador positivo, ou negativo. Assim, para maior commodidade dos calculos não usaremos nunca de arcos, ou angulos, que excedaõ  $180^\circ$ , tomando negativamente os Senos dos que forem negativos, e os Cosenos dos que forem obtusos; e em chegando aos resultados finaes, mudaremos os negativos em positivos, tomando em lugar d'elles os seus suplementos para  $360^\circ$ , para ficarem contados em roda para a mesma parte, como he costume dos Astronomos.

85. A regra, que havemos estabelecido para discernir a especie de  $N$ , não padece limitação alguma nos Cometas retrogrados. Porque assim como elles tem o nodo ascendente, onde havia de ser o descendente no caso de correrem a mesma orbita directamente, segundo a ordem dos signos, do mesmo modo a observação, que nelles he primeira, deveria ser a ultima naquelle caso. Esta permutação das observações faz mudar o sinal do numerador, e juntamente o do denominador; mudança, que influe na especie de  $N$  a differença de  $180^\circ$ , que na realidade ha.

86. Sendo conhecida a longitude do nodo  $N$ , immediatamente acharemos a inclinação da orbita pela equação

$$Tg. I = \frac{\omega}{\lambda \text{ Sen. } (l - N) - s \text{ Sen. } (\Sigma - N)}, \text{ na qual he ef-}$$

cusado attender a regra dos sinais, porque a inclinação se costuma sempre designar pelo angulo agudo, e não pelo obtuso que entre si fórmaõ os planos da orbita, e da ecliptica. Sem embargo o sinal da Tangente da inclinação sempre nos dá a conhecer huma cousa importante, que he a direcção do movimento, hum dos elementos que buscamos. Porque dando a equação hum valor de  $Tg. I$  sempre positivo nos Cometas directos, claramente se vê, que nos retrogrados o deve dar sempre negativo, por nelles ter  $N$  de mais  $180^\circ$ ; circumstancia, que faz mudar o sinal taõ sómente ao denominador da fracção, pela qual se exprime a Tangente de  $I$ . Pelo que sahindo negativo o valor da Tangente da inclinação, quer o sinal negativo esteja no numerador, quer no denominador, conheceremos que o Cometa he retrogrado; e directo todas as vezes que a mesma Tangente se achar positiva, sendo o numerador e denominador ambos positivos, ou ambos negativos.

87. Falta-nos a longitude do perihelio na orbita propria do Cometa, a qual denotaremos pela letra  $P$ . Para cuja determinação buscaremos primeiro a anomalia  $U$  correspondente á primeira observação pela formula conhecida

$$\text{Cof. } \frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{p}{r}}. \text{ Advertindo porém, que ella não he}$$

conveniente na praxe, quando  $r$  differe pouco de  $p$ , usaremos com preferencia d'esta outra

$$\text{Sen. } \frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{r-p}{r}},$$

que d'ella se deriva. E porque a longitude do Cometa na orbita, no tempo da primeira observação, he evidentemente  $P+U$ , e o angulo  $CSN$  (Fig. 6.) he a longitude d'elle na orbita menos a do nodo, teremos  $Tg. (P+U-N)$

$$= \frac{CN}{SN}. \text{ Porém } CN = \frac{x \text{ Sen. } L}{\text{Sen. } I} = \frac{\varpi}{\text{Sen. } I}, \text{ e } SN = \lambda \text{ Cof.}$$

$$(l-N)$$

$$(l - N) - r \text{ Cof. } (\Sigma - N). \text{ Logo Tg. } (P + U - N) =$$

$\frac{\varpi \cdot \frac{l}{\text{Sen. } l}}{\lambda \text{ Cof. } (l - N) - r \text{ Cof. } (\Sigma - N)}$ . Onde se advertirá, que *Sen. l* he negativo nos Cometas retrogrados; que *U* muda de final, quando a observação cahir antes da passagem pelo perihelio nos Cometas directos, e quando cahir depois nos retrogrados; e que o angulo total  $P + U - N$  he negativo, ou positivo, conforme o for o numerador  $\varpi \cdot \frac{l}{\text{Sen. } l}$ ; e agudo, ou obtuso, conforme for o denominador positivo, ou negativo, como fica dito.

88. Se a orbita de hum Cometa coincidisse com o plano da ecliptica, a inclinação seria nenhuma, e a posição do nodo indeterminada, e inutil, como acima dissemos. Então, deixados esses dous elementos, achariamos a longitude do perihelio d'esta maneira: suppondo que *SN* he hum semidiametro da ecliptica, que passa pelo ponto de  $\gamma$ , e reflectindo que na supposição presente deve o ponto *C* (Fig. 6.) cahir em *P*, teremos  $PTQ = l$ ,  $TSN = \Sigma + 180^\circ$ ,  $PSN = P + U$ ,  $TP = x$ ,  $PN = x \text{ Sen. } l - r \text{ Sen. } \Sigma$ ,  $SN = x \text{ Cof. } l - r \text{ Cof. } \Sigma$ . Donde se conclue

$$\text{Tg. } PSN = \text{Tg. } (P + U) = \frac{x \text{ Sen. } l - r \text{ Sen. } \Sigma}{x \text{ Cof. } l - r \text{ Cof. } \Sigma}.$$

### §. VII.

*Modo de calcular o lugar de hum Cometa para qualquer instante dado, sendo conhecidos os elementos da orbita.*

89. Ainda que esta questão se acha resolvida ha muito tempo, e a praxe d'ella facilitada por meio da Taboa Geral muito conhecida dos Astronomos, daremos aquí hum soluçãõ nova, que resulta das formulas, que havemos demonstrado, a qual naõ depende do uso subsidiario d'aquella

quella Tabela, nem de se buscarem previamente as longitudes, e latitudes heliocentricas; mas com o raio vector, e anomalia immediatamente descobre a longitude, e latitude vistas da terra, por formulas, que pela sua simplicidade parecem dever preferir-se ao grande número de preceitos, e operações, de que consta o modo ordinario dos Astronomos.

90. Primeiramente buscaremos o raio vector  $r$ , que corresponde ao instante dado, pela equação  $\tau = n(r + 2p)\sqrt{(r-p)}$  (*num.* 18), na qual  $\tau$  he o intervalo de tempo entre o instante dado, e a passagem pelo perihelio. Para a resolvermos facilmente por logarithmos, supponhamos  $r = p + y^2$ , e teremos a transformada  $y^3 + 3py - \frac{\tau}{n} = 0$ , que pela regra conhecida de Cardano dará  $y = \sqrt[3]{\left(\frac{\tau}{2n} + \sqrt{\left(\frac{\tau^2}{4n^2} + p^3\right)}\right)} - \sqrt[3]{\left(-\frac{\tau}{2n} + \sqrt{\left(\frac{\tau^2}{4n^2} + p^3\right)}\right)}$ . Supponhamos  $\frac{2n\sqrt{p^3}}{\tau} = \text{Tg. } M$ ; e havendo reflectido, que  $\sqrt{(1 + \text{Tg.}^2 M)} = \frac{1}{\text{Cof. } M}$ ,  $\frac{1 + \text{Cof. } M}{\text{Cof. } M} = \text{Tg. } M \cdot \text{Cot. } \frac{1}{2} M$ , e  $\frac{1 - \text{Cof. } M}{\text{Cof. } M} = \text{Tg. } M \cdot \text{Tg. } \frac{1}{2} M$ , a equação precedente se reduzirá a dar  $y = \left(\sqrt[3]{\text{Cot. } \frac{1}{2} M} - \sqrt[3]{\text{Tg. } \frac{1}{2} M}\right) \sqrt[3]{\frac{\tau \cdot \text{Tg. } M}{2n}}$ , isto he,  $y = \left(\sqrt[3]{\text{Cot. } \frac{1}{2} M} - \sqrt[3]{\text{Tg. } \frac{1}{2} M}\right) \sqrt{p}$ . Pelo que suppondo  $\sqrt[3]{\text{Tg. } \frac{1}{2} M} = \text{Tg. } Q$ , e sendo por conseguinte  $\sqrt[3]{\text{Cot. } \frac{1}{2} M} = \text{Cot. } Q$ , advertiremos que he  $\text{Cot. } Q - \text{Tg. } Q = 2 \text{ Cot. } 2Q = \frac{2}{\text{Tg. } 2Q}$ , e teremos  $y = \frac{2\sqrt{p}}{\text{Tg. } 2Q}$ , e finalmente  $r = p + \frac{4p}{\text{Tg.}^2 2Q}$ .

91. Conhecido o raio vector  $r$ , facilmente acharemos a anomalia correspondente  $U$  pela formula  $\text{Cof.} \frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{p}{r}}$ , ou  $\text{Sen.} \frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{r-p}{r}}$ , ou tambem por esta  $\text{Tg.} \frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{r-p}{p}}$ , que se deriva das outras duas.

92. Se quizermos achar primeiro a anomalia, a mesma construcção do *num.* 90 servirá para a calcularmos. Por que dando a ultima equação do número precedente  $\text{Tg.}^2 \frac{1}{2} U = \frac{r-p}{p}$ , se substituímos o valor achado de  $r$ , teremos  $\text{Tg.}^2 \frac{1}{2} U = \frac{4}{\text{Tg.}^2 2Q}$ , e  $\text{Tg.} \frac{1}{2} U = \frac{2}{\text{Tg.} 2Q}$ . Por tanto fazendo  $\text{Tg.} M = \frac{2\sqrt{p^3}}{\tau}$ , e  $\text{Tg.} Q = \sqrt[3]{\text{Tg.} \frac{1}{2} M}$ , será  $\text{Tg.} \frac{1}{2} U = \frac{2}{\text{Tg.} 2Q}$ , e  $r = p + p \cdot \text{Tg.}^2 \frac{1}{2} U$ , ou  $r = \frac{p}{\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} U}$ .

93. Quem se quizer servir da Taboa Geral dos Cometas, para achar a anomalia, deverá calcular a quantidade  $\frac{\tau}{\sqrt{p^3}}$ , e esta lhe dará o número subsidiario de dias, com que ha de entrar na Taboa, para ter a anomalia  $U$ , que corresponde ao tempo dado na orbita dada, e com ella se achará  $r$  por qualquer das equações antecedentes.

94. De qualquer modo que se hajaõ calculado as quantidades  $r, U$ , com ellas viremos facilmente no conhecimento da longitude, e latitude do Cometa. Porque sendo  $SC = r$  (Fig. 6.),  $ST = s$ ,  $CSN = P + U - N$ ,  $TSN = \Sigma - N + 180^\circ$ , e  $PTQ = l - N$ , teremos  $\text{Tg.} (l - N)$

$= \frac{PQ}{TQ}$ . Porém o triangulo  $CSN$  dá  $SN = r \text{ Cof. } (P + U - N)$ , e  $CN = r \text{ Sen. } (P + U - N)$ , donde se conclue  $PN = CN \cdot \text{Cof. } I = r \text{ Sen. } (P + U - N) \text{ Cof. } I$ , e o triangulo  $TSR$  dá  $SR = s \text{ Cof. } (\Sigma - N + 180^\circ) = -s \text{ Cof. } (\Sigma - N)$ , e  $TR = s \text{ Sen. } (\Sigma - N + 180^\circ) = -s \text{ Sen. } (\Sigma - N)$ . Logo será  $PQ = PN - TR = r \text{ Sen. } (P + U - N) \text{ Cof. } I + s \text{ Sen. } (\Sigma - N)$ , e  $TQ = SN - SR = r \text{ Cof. } (P + U - N) + s \text{ Cof. } (\Sigma - N)$ . E substituindo estes valores na expressãõ da Tangente de  $l - N$ , teremos

$$\text{Tg. } (l - N) = \frac{r \text{ Sen. } (P + U - N) \text{ Cof. } I + s \text{ Sen. } (\Sigma - N)}{r \text{ Cof. } (P + U - N) + s \text{ Cof. } (\Sigma - N)};$$

advertindo-se, como já fica dito, que  $U$  muda de final, quando o instante dado for antes da passagem pelo perihelio nos Cometas directos, e depois nos retrogradados; e guardando-se tambem a respeito da especie do angulo  $l - N$  a regra dos sinais acima dada. He escusado dizer-se, que ao angulo achado  $l - N$  se deve ajuntar a longitude do nodo  $N$  para ter a do Cometa  $l$ .

95. Pelo que respeita a latitude  $CTP$ , que denotamos por  $L$ , teremos igualmente  $\text{Tg. } L = \frac{CP}{TP}$ . Porém no trian-

gulo  $CPN$  he  $CP = CN \cdot \text{Sen. } I = r \text{ Sen. } (P - N + U) \text{ Sen. } I$ , e no triangulo  $PTQ$  he  $TP = \frac{TQ}{\text{Cof. } (l - N)} = \frac{r \text{ Cof. } (P + U - N) + s \text{ Cof. } (\Sigma - N)}{\text{Cof. } (l - N)}$ . Logo, fazendo a substituiçãõ

$$\text{d'estes valores, será } \text{Tg. } L = \frac{r \text{ Sen. } (P + U - N) \text{ Cof. } (l - N) \text{ Sen. } I}{r \text{ Cof. } (P + U - N) + s \text{ Cof. } (\Sigma - N)};$$

expressãõ, que se calculará com muita facilidade, por ter o mesmo denominador, que tem a da longitude, e no numerador a quantidade commua  $r \text{ Sen. } (P + U - N)$ . Na especie da latitude não ha que attender, pois se não conta em

em roda como a longitude , mas de huma e outra parte da ecliptica até 90°. Se a Tangente d'ella porém fahir negativa , quer o sinal negativo esteja no numerador , quer no denominador , será a latitude austral ; e se fahir positiva , boreal.

96. Algumas vezes he preciso calcular a distancia do Cometa á terra , como succede quando se quer saber a sua parallaxe , a fim de reduzir a longitude , e latitude calculadas ás apparentes , que se devem observar , o que principalmente se deve attender nas orbitas , que passaõ em maior vizinhança da terra. Quando tambem por algumas observações se souberem já proximamente os elementos da orbita , e se quizerem rectificar por outras observações , que pareçaõ mais ventajosas para isso , em lugar de se buscarem os primeiros valores approximados das distancias  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$  respectivas a essas observações pelo methodo do §. IV , podem mais facilmente deduzir-se dos elementos proximamente conhecidos , e corregir-se immediatamente por qualquer dos methodos , que expuzemos no §. V.

97. Quando se tiver calculado previamente a longitude , e latitude do Cometa , por meio d'ellas podemos determinar a distancia  $x$ , ou  $TC$  (Fig. 6.). Porque sendo

$$x = \frac{TP}{\text{Cof.}L} = \frac{CP}{\text{Sen.}L}, TP = \frac{r \text{Cof.}(P + U - N) + s \text{Cof.}(\Sigma - N)}{\text{Cof.}(I - N)},$$

e  $CP = r \text{Sen.}(P + U - N) \text{Sen.}I$ , como temos visto ,

$$\text{será } x = \frac{r \text{Cof.}(P + U - N) + s \text{Cof.}(\Sigma - N)}{\text{Cof.}L \text{Cof.}(I - N)}, \text{ ou}$$

$$x = \frac{r \text{Sen.}(P + U - N) \text{Sen.}I}{\text{Sen.}L}. \text{ Mas se taõ sómente bus-$$

carmos a distancia , sem haver necessidade do conhecimento da longitude , nem da latitude , podemos calculalla por huma formula immediata. Porque he  $x^2 = CP^2 + TP^2 = CP^2 + PQ^2 + TQ^2$ ; porém já temos visto , que  $CP = r \text{Sen.}(P + U - N) \text{Sen.}I$ ,  $PQ = r \text{Sen.}(P + U - N) \text{Cof.}I + s \text{Sen.}(\Sigma - N)$ , e  $TQ = r \text{Cof.}(P + U - N) + s \text{Cof.}(\Sigma - N)$ :

logo formando os quadrados d'estas tres quantidades, fazendo as reduções costumadas, e extrahindo a raiz, teremos  $x = \sqrt{(r^2 + s^2 + 2rs \text{Cof.}(P + U - N) \text{Cof.}(\Sigma - N) + 2rs \text{Sen.}(P + U - N) \text{Sen.}(\Sigma - N) \text{Cof.}I)}$ .

98. E reduzindo tudo a hum só ponto de vista: pelos elementos dados, e pelo calculo da longitude, e distancia do Sol para o instante dado, serãõ conhecidas as quantidades  $\tau, p, P, N, I, \Sigma, s$ , com o número constante  $n = 27,403857$ , cujo logarithmo he 1.4378117. E para conhecermos a longitude do Cometa  $l$ , a latitude  $L$ , e a distancia d'elle á terra  $x$ , calcularemos primeiramente

os angulos  $M, Q$  de maneira que seja  $\text{Tg.}M = \frac{2^n \sqrt{p^2}}{\tau}$ , e  $\text{Tg.}Q = \sqrt[3]{\text{Tg.}\frac{1}{2}M}$ , e determinaremos  $r, U$  pelas duas equações seguintes

$$\text{Tg.}\frac{1}{2}U = \frac{2}{\text{Tg.}2Q}, r = p + p \text{Tg.}^2 \frac{1}{2}U.$$

Entãõ suppondo, para abreviar,  $P + U - N = \Lambda$ , e  $\Sigma - N = \Delta$ , teremos as tres equações seguintes

$$\text{Tg.}(l - N) = \frac{r \text{Sen.}\Lambda \text{Cof.}I + s \text{Sen.}\Delta}{r \text{Cof.}\Lambda + s \text{Cof.}\Delta}$$

$$\text{Tg.}L = \frac{r \text{Sen.}\Lambda \text{Sen.}I \text{Cof.}(l - N)}{r \text{Cof.}\Lambda + s \text{Cof.}\Delta}$$

$$x = \sqrt{(r^2 + s^2 + 2rs (\text{Cof.}\Lambda \text{Cof.}\Delta + \text{Sen.}\Lambda \text{Sen.}\Delta \text{Cof.}I))};$$

equações, que igualmente podem servir, para se calcularem as longitudes, latitudes, e distancias dos Planetas, tanto superiores, como inferiores.

99. Sirva de exemplo o Cometa de 1742, cujos elementos referidos por M. de la Caille nas suas *Lições de Astronomia*, num. 776, saõ d'esta maneira:

Longitude do nodo ascendente	6 <sup>s</sup> 5° 38' 29"
Longitude do perihelio	7 7 35 13
Inclinação da orbita	66 59 14
Logarithmo da distancia perihelia	9.884049
Passagem pelo perihel. 1742. Fev.	8 <sup>d</sup> 4 <sup>h</sup> 14' <i>temp. med.</i>
Movimento	Retrogrado.

Se quizermos saber a longitude, latitude, e distancia d'elle á terra para o dia 28 de Março do mesmo anno ás 13<sup>h</sup> 39' do tempo medio, deveremos para esse instante calcular a longitude do Sol, e a sua distancia. Mas servindo-nos das que foraõ calculadas pelo referido Astronomo, e reduzindo os elementos á fórma, que indicámos no num. 84, teremos  $\tau = 48^d$ , 3687,  $\text{Log. } p = 9.884049$ ,  $P = -142^\circ 24' 47''$ ,  $N = -174^\circ 21' 31''$ ,  $I = -66^\circ 59' 14''$ ,  $\Sigma = 8^\circ 11' 28''$ , e  $\text{Log. } s = 9.999841$ .

Assim acharemos  $M = 37^\circ 12' 20''$ ,  $Q = 34^\circ 49' 22''$ ,  $7$ ;  $U = 73^\circ 8' 55''$ , e  $\text{Log. } r = 0.074525$ . E advertindo, que  $U$  deve mudar de final, por ser o instante dado depois da passagem pelo perihelio em Cometa retrogrado, teremos  $\Lambda = -41^\circ 12' 11''$ , e  $\Delta = -177^\circ 27' 1''$ . Donde achamos  $l - N = -106^\circ 45' 9''$ ,  $l = -281^\circ 6' 40'' = 78^\circ 53' 20'' = 2^\circ 18' 53' 20''$ ,  $L = 63^\circ 3' 55''$  boreal, e  $x = 0,807391$ .

### §. VIII.

#### *Aplicações das Formulas antecedentes.*

100. As formulas, que acabamos de mostrar, não se limitaõ a calcular com facilidade os lugares dos Cometas, mas como expressões analyticas, e geraes, podem ter outros muitos usos. Hum, que me parece digno d'este lugar, he quando por huma só observação de hum Cometa queremos certificar-nos, se elle he algum dos que já fo-

raõ observados, e que por boas conjecturas se esperava que tornasse pouco mais ou menos a apparecer por aquelle tempo, em que se faz a observação d'elle. Neste caso he conhecida a longitude, e latitude pela observação presente, e os elementos da orbita pelas observações da aparição precedente, exceptuando o tempo da passagem pelo perihelio, para cujo conhecimento era necessario, que se foubesse exactamente o tempo periodico, o qual, pelas notaveis alterações, que póde ter de revolução a revolução, nunca poderá fixar-se por observação, nem predizer-se com certeza por calculo algum.

101. Como pois temos as duas equações  $Tg. (l - N) = \frac{r \text{ Sen. } \Lambda \text{ Cof. } I + s \text{ Sen. } \Delta}{r \text{ Cof. } \Lambda + s \text{ Cof. } \Delta}$ , e  $Tg. L = \frac{r \text{ Sen. } \Lambda \text{ Sen. } I \text{ Cof. } (l - N)}{r \text{ Cof. } \Lambda + s \text{ Cof. } \Delta}$

(num. 98), nas quaes ha sómente duas incognitas  $r$ , e  $\Lambda$ .

A primeira nos dará  $r = \frac{s \text{ Sen. } \Delta - s \text{ Cof. } \Delta \text{ Tg. } (l - N)}{\text{Cof. } \Lambda \text{ Tg. } (l - N) - \text{Sen. } \Lambda \text{ Cof. } I}$ ,

e a segundá  $r = \frac{s \text{ Cof. } \Delta \text{ Tg. } L}{\text{Cof. } \Lambda \text{ Sen. } I \text{ Cof. } (l - N) - \text{Sen. } \Lambda \text{ Tg. } L}$ .

Igualando estes dous valores de  $r$ , dividindo os numeradores por  $s \text{ Cof. } \Delta$ , e os denominadores por  $\text{Cof. } \Lambda$ , teremos

$$\frac{\text{Tg. } \Delta - \text{Tg. } (l - N)}{\text{Tg. } (l - N) - \text{Tg. } \Lambda \text{ Cof. } I} = \frac{\text{Tg. } L}{\text{Tg. } \Lambda \text{ Sen. } I \text{ Cof. } (l - N) - \text{Tg. } L};$$

donde se tira  $\text{Tg. } \Lambda = \dots \dots \dots$

$$\frac{\text{Tg. } L \text{ Tg. } \Delta}{\text{Tg. } \Delta \text{ Sen. } I \text{ Cof. } (l - N) - \text{Sen. } I \text{ Sen. } (l - N) + \text{Tg. } L \text{ Cof. } I}$$

E reflectindo, que  $\text{Sen. } I \text{ Tg. } \Delta \text{ Cof. } (l - N) - \text{Sen. } I \text{ Sen. } (l - N) =$

$$-\frac{\text{Sen. } I \text{ Sen. } (l - N - \Delta)}{\text{Cof. } \Delta}, \text{ e } l - N - \Delta = l - \Sigma, \text{ teremos}$$

$$\text{mais simplesmente } \text{Tg. } \Lambda = \frac{\text{Tg. } L \text{ Sen. } \Delta}{\text{Tg. } L \text{ Cof. } I \text{ Cof. } \Delta - \text{Sen. } I \text{ Sen. } (l - \Sigma)}$$

102. Sendo conhecida a quantidade  $\Lambda$ , podemos logo determinar  $r$  por qualquer das duas equações

$$r = \frac{s \operatorname{Sen.} \Delta - s \operatorname{Cof.} \Delta \operatorname{Tg.} (l - N)}{\operatorname{Cof.} \Lambda \operatorname{Tg.} (l - N) - \operatorname{Sen.} \Lambda \operatorname{Cof.} I}$$

$$\text{ou } r = \frac{s \operatorname{Cof.} \Delta \operatorname{Tg.} L}{\operatorname{Sen.} \Lambda \operatorname{Sen.} I \operatorname{Cof.} (l - N) - \operatorname{Cof.} \Lambda \operatorname{Tg.} L}$$

E porque havemos supposto  $\Lambda = P + U - N$ , e  $P - N$  he quantidade conhecida pelos elementos da orbita determinada pelas observações feitas na apparição antecedente, teremos  $U = \Lambda - P + N$ , e conseguintemente conheceremos a distancia perihelia  $p = r \operatorname{Cof.}^2 \frac{1}{2} U$ . E se esta distan-

cia deduzida da observação presente concordar com a que se havia deduzido das observações da outra apparição, ou se differir muito pouco d'ella, serão confirmadas as conjecturas de ser o Cometa aquelle mesmo, que se esperava; e pelo contrario, se houver grande discrepancia nas duas distancias perihelias. Concordando, quanto baste, para termos o Cometa pelo mesmo, que esperavamos, buscaremos o instante da passagem pelo perihelio, calculando a formula  $\tau = n(r + 2p) \sqrt{r - p}$ , e com ella poderemos formar huma ephemeride dos seus movimentos.

103. Supponhamos, que em Paris se descobrio hum Cometa em 1759 aos 15 de Abril ás  $16^h 40' 23''$  em  $10^o 18^s 52' 11''$  com a latitude  $4^o 28' 9''$  austral, quando já, com impaciencia de huns, e não pequena desconfiança de outros, se esperava pela volta do Cometa de 1682, em virtude da famosa predicção de Halley. Por esta unica observação se podia logo conhecer se o Cometa novamente apparecido era, ou não era o que se esperava. Porque pelo calculo do Sol teriamos  $\Sigma = 25^o 51'$ , e  $\log. s = 0.002016$ ; e pelos elementos de 1682,  $N = 50^o 48'$ ,  $P = 301^o 36'$ , e  $I = -17^o 42'$ , por ser Cometa retrogrado: donde resultaria  $\Delta = -24^o 57'$ ,  $l - \Sigma = -66^o 59'$ ,  $l - N = -91^o 56'$ . E pelo calculo

lo das formulas respectivas, achariamos  $\Lambda = 174^{\circ} 35'$ ,  $\log. r = 9.966869$ ; e porque  $P - N = -109^{\circ} 12'$ , teriamos  $U = 283^{\circ} 47' = -76^{\circ} 13'$ , donde concluiriamos  $p = 0,57365$ , quantidade, que differe pouco da que se havia achado em 1682, e assim mostra, que o Cometa he o mesmo. Com as quantidades  $r$ ,  $p$  achariamos finalmente  $\tau = 33^d 18^h 16'$ ; e reflectindo, que a observação devia ser posterior á passagem pelo perihelio, por sahir a anomalia  $U$  negativa em Cometa retrogrado, a dita passagem teria sido a 12 de Março  $22^h 24'$ . E sendo esta conhecida, estariamos com tudo o que era necessario para calcular huma ephemeride do movimento do Cometa d'ahi para diante, quanto era bastante para servir de preparo para as observações, que se houvessem de fazer.

104. Algumas vezes póde ser necessario saber o tempo, em que hum Cometa deve passar pelo nodo ascendente, ou descende. Nesse caso está claro, que o angulo  $CSN$  (Fig. 6.) deve ser  $0^{\circ}$ , ou  $180^{\circ}$ . E porque  $CSN = P + U - N$ , teremos  $U = N - P$  no primeiro caso, e  $U = N - P + 180^{\circ}$  no segundo. Substituindo estes valores na formula

$$r = \frac{p}{\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} U}, \text{ será o raio vector, que passa pelo nodo as-}$$

cedente,  $\frac{p}{\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} (N - P)}$ , e o que passa pelo nodo des-

cedente será  $\frac{p}{\text{Sen.}^2 \frac{1}{2} (N - P)}$ . E calculando para cada

hum d'elles a formula  $\tau = n(r + 2p) \sqrt{(r - p)}$ , se acharão as differenças de tempo entre o instante da passagem pelo perihelio, e os da passagem pela linha dos nodos; dif-

differenças, que se haõ de ajuntar ao tempo da passagem pelo perihelio quando os valores de  $U$ , reduzidos a n.õ passarem de  $180^\circ$  forem positivos, e subtrahir quando forem negativos nos Cometas directos, e ao contrario nos retrogradados.

105. He tambem muito notavel o instante da opposiçaõ, ou conjunção de hum Cometa com o Sol, mas naõ he taõ facil de calcular. Entaõ deve a linha  $ST$  (Fig. 6.) coincidir com  $SP$ ; e como temos visto, que  $TSN = \Sigma - N + 180^\circ$ , será nesse caso  $Tg. (\Sigma - N + 180^\circ)$ , ou, que vem a ser o mesmo,  $Tg. (\Sigma - N) = \frac{PN}{SN}$ , e feitas as substituições competentes, será  $Tg. \Delta = Tg. \Lambda \text{ Cof. } I$ . Como  $\Lambda$  naõ envolve outra incognita senaõ a anomalia  $U$ , que depende do tempo corrido desde o perihelio, nem  $\Delta$  outra senaõ a longitude do Sol  $\Sigma$ , que tambem depende do tempo corrido desde a passagem da terra pelo seu perihelio, se em lugar d'essas duas quantidades substituiffemos os seus valores em funcções do tempo, pela immediata resoluçaõ da equaçãõ achariamos o que buscamos. Mas vindo por esse caminho a cahir em huma equaçãõ summamente complicada, he melhor, que usemos do methodo das interpolações, para resolver a equaçãõ  $Tg. \Lambda \text{ Cof. } I - Tg. \Delta = 0$ , na fórma simplicissima, em que se acha.

106. Para isso tomaremos hum tempo a arbitrio, que naõ esteja longe da conjunção, ou opposiçaõ, quanto se póde conjecturar pelas circumstancias, e em qualquer ephemeride acharemos calculada a longitude do Sol  $\Sigma$ , e pela Taboa geral dos Cometas facilmente conheceremos a anomalia do Cometa  $U$ , que convem a esse instante. Assim teremos as quantidades  $\Lambda$ ,  $\Delta$ , e com ellas calcularemos a equaçãõ precedente, que em lugar de se verificar, supponmos que dá o resultado  $\gamma$ . Fazendo o mesmo com outros dous tempos tomados em progressãõ arithmetica com o

primeiro, sendo a differença delles  $\eta$ , acharemos outros dous resultados da equação, que respectivamente designaremos por  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ; e assim viremos a conhecer a correção do primeiro tempo hypothetico pela equação do *num.* 59. E sendo por esta primeira operação conhecido proximamente o tempo da conjunção, ou opposição, se tomarmos outros tres instantes em progressão arithmetica na vizinhança d'elle, viremos a determinallo com toda a exactidão, que for necessaria.

107. Não interessará menos a curiosidade em saber os pontos da orbita, onde hum Cometa poderá passar na maior vizinhança do nosso globo; pontos criticos, que depois das ousadas conjecturas de Whiston começárao a ser olhados com receio, e ha bem poucos annos com terror, e sobressalto tão geral em Paris, que para o desvanecer compoz o illustre M. du Séjour o seu excellente *Essay sobre os Cometas em geral, e em particular sobre os que podem avizinhar-se á orbita da terra*. Deixando porém, como alheias do meu proposito, as consequencias physicas, que podem resultar da grande vizinhança de hum Cometa, e as conjecturas, que se podem formar sobre a existencia de algum, que haja finalmente de chegar-se a huma distancia perigosa: vejamos, como, sendo conhecidos os elementos da orbita de qualquer Cometa, podemos descobrir a menor distancia, em que elle póde achar-se a respeito da terra.

108. Esta questão póde tomar-se de dous modos. O primeiro consiste em averiguar a menor distancia, em que ha de passar hum Cometa a respeito da terra na revolução actual, em que elle se começa a observar, e o instante do phenomeno. O segundo he distinguir entre todas as revoluções possiveis a que ha de dar a mais pequena distancia: que vem a ser o mesmo, que prescindir dos movimentos do Cometa, e da Terra, e procurar nas duas orbitas os pontos, onde ellas passaõ na maior vizinhança huma da outra. Começemos pelo ultimo.

109. Como temos a expressão geral da distancia do Cometa  $x = \sqrt{(r^2 + s^2 + 2rs (\text{Cof.} \Delta \text{Cof.} \Lambda + \text{Sen.} \Delta \text{Sen.} \Lambda \text{Cof.} I))}$ , na qual para o uso presente se póde considerar a orbita terrestre como circular, suppondo  $s$  constante, a propriedade do minimo nos dará

$$\left. \begin{aligned} r dr + s dr & (\text{Cof.} \Delta \text{Cof.} \Lambda + \text{Sen.} \Delta \text{Sen.} \Lambda \text{Cof.} I) \\ + s r d \Lambda & (\text{Sen.} \Delta \text{Cof.} \Lambda \text{Cof.} I - \text{Sen.} \Lambda \text{Cof.} \Delta) \\ + s r d \Delta & (\text{Sen.} \Lambda \text{Cof.} \Delta \text{Cof.} I - \text{Sen.} \Delta \text{Cof.} \Lambda) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Onde reflectiremos, que  $\Lambda$  sempre depende de  $r$ , mas  $\Delta$  não depende de  $\Lambda$ ; nem de  $r$ , porque no caso presente devemos comparar cada hum dos pontos da orbita do Cometa com todos os pontos da orbita terrestre. Por isso igualaremos separadamente a nada o termo multiplicado por  $d \Delta$ , e teremos por primeira condição da minima distancia procurada  $\text{Sen.} \Lambda \text{Cof.} \Delta \text{Cof.} I - \text{Sen.} \Delta \text{Cof.} \Lambda = 0$ , que se reduz a  $\text{Tg.} \Delta = \text{Tg.} \Lambda \text{Cof.} I$ . E porque temos visto (*num.* 105), que esta equação pertence á conjunção, ou opposição do Cometa com o Sol, concluiremos, que sómente nestas circumstancias deve succeder a minima distancia, que buscamos.

110. Substituindo o valor de  $\text{Cof.} I = \frac{\text{Tg.} \Delta}{\text{Tg.} \Lambda}$  nos outros termos da equação differencial, e reduzindo, acharemos

$$r dr + \frac{s dr \text{Cof.} \Lambda}{\text{Cof.} \Delta} + s r d \Lambda \cdot \frac{\text{Sen.} (\Delta + \Lambda) \text{Sen.} (\Delta - \Lambda)}{\text{Sen.} \Lambda \text{Cof.} \Delta} = 0.$$

E advertindo, que  $d \Lambda = dU$ , e  $dU = \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{p}{r-p}}$  (*num.* 16)

$$= \frac{dr}{r} \text{Cot.} \frac{1}{2} U, \text{ e } r = \frac{p}{\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} U},$$

d'estes valores, e reduzindo teremos por segunda condição da minima distancia a equação

$$p + \frac{s \operatorname{Cof}^2 \frac{1}{2} U}{\operatorname{Cof} \Delta} \left( \operatorname{Cof} \Lambda + \frac{\operatorname{Sen} (\Delta + \Lambda) \operatorname{Sen} (\Delta - \Lambda)}{\operatorname{Sen} \Lambda \operatorname{Tg} \frac{1}{2} U} \right) = 0,$$

a qual juntamente com a outra  $\operatorname{Tg} \Delta = \operatorname{Tg} \Lambda \operatorname{Cof} I$  servirá de determinar  $\Delta$ , e  $\Lambda$ , e conseguintemente  $U$ , que se envolve em  $\Lambda$ . E porque a minima distancia deve succeder perto dos nodos, quando he grande o angulo da inclinação; e quando he pequeno, perto dos pontos da orbita, onde o raio vector he igual á distancia do Sol, he facil a escolha dos valores hypotheticos de  $\Lambda$ , com os quaes se determinará  $\Delta$  pela segunda equação, e depois se verá o resultado da primeira, conforme o methodo das interpoções, que já deixámos praticado, advertindo-se, que a especie de  $\Lambda$  e  $\Delta$  deve ser de maneira, que os seus Cofenos tenhaõ final contrario.

111. Substituindo tambem o valor de  $\operatorname{Cof} I$  na formula geral da distancia, depois de acharmos  $\Lambda$ , e  $\Delta$ , que satisfazão ás duas equações de condição, conhecemos mais facilmente a minima distancia pela equação  $x =$

$$\sqrt{(r^2 + s^2 + 2rs \cdot \frac{\operatorname{Cof} \Lambda}{\operatorname{Cof} \Delta})}.$$

A quantidade  $\Delta$  nos mostrará o dia do anno, em que deveria succeder effa minima distancia; e se fosse conhecido o tempo periodico, com a quantidade  $\Lambda$  achariamos, quando viria o Cometa nesse dia a achar-se no ponto correspondente da sua orbita.

112. Quando não se procura a minima distancia absoluta, mas a que ha de ter lugar entre os dous corpos em huma revolução proposta, então deveremos reduzir as differenças  $dr$ ,  $d\Lambda$ ,  $d\Delta$ , a huma só. Significando  $T$  o movimento diurno medio do Sol, e  $\tau$  o tempo corrido desde o perihelio, claro está, que será  $d\Delta = T d\tau$ , e a equação

$$\tau = n (r + 2p) \sqrt{r - p} \text{ dar\'a } r dr = \frac{2 d\tau \operatorname{Tg} \frac{1}{2} U \sqrt{p}}{3^n},$$

$$\text{e conseguintemente } r d\Delta = \frac{2 d\tau \operatorname{Cof}^2 \frac{1}{2} U}{3^n \sqrt{p}}. \text{ Pelo que,}$$

substituindo estes valores na equação do *num.* 109, e reduzindo, teremos a equação seguinte :

$$\left. \begin{aligned} p + r \operatorname{Cof}^2 \frac{1}{2} U & (\operatorname{Cof} \Delta \operatorname{Cof} \Lambda + \operatorname{Sen} \Delta \operatorname{Sen} \Lambda \operatorname{Cof} I) \\ + r \operatorname{Cof}^2 \frac{1}{2} U \cdot \operatorname{Cot} \frac{1}{2} U & (\operatorname{Sen} \Delta \operatorname{Cof} \Lambda \operatorname{Cof} I - \operatorname{Sen} \Lambda \operatorname{Cof} \Delta) \\ + \frac{3^n n T \sqrt{p^3}}{\operatorname{Sen} U} & (\operatorname{Sen} \Lambda \operatorname{Cof} \Delta \operatorname{Cof} I - \operatorname{Sen} \Delta \operatorname{Cof} \Lambda) \end{aligned} \right\} = 0,$$

na qual todas as quantidades variaveis dependem do tempo, e assim se resolver\'a pelos methodos j\'a indicados. Tornemos ao nosso proposito.

§. IX.

*Exposição abbreviada da Solução do Problema.*

113. Para maior commodidade dos calculos, que se haõ de fazer na determinação das Orbitas parabolicas dos Cometas, ajuntaremos aqui em huma recopilaco geral todas as denominações, que havemos feito, e equações, que havemos demonstrado, pela mesma ordem, que ellas haõ de ter na execução, indicando summariamente o processo das operações.

114. Escolhidas tres observações de confiana, cujos intervallos naõ sejaõ muito pequenos, nem muito grandes, nem muito desiguaes, cahindo, quanto for possivel, em os pontos, onde o movimento do Cometa em longitude,

e latitude for mais sensível, para o instante de cada huma d'ellas se calculará a longitude, e distancia do Sol. E assim seraõ conhecidas as tres longitudes do Cometa, que pela ordem das observações designaremos por  $l, l', l''$ , as latitudes por  $L, L', L''$ , as longitudes dos Sol por  $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ ; e as suas distancias á terra por  $s, s', s''$ ; e deveremos achar as distancias do Cometa á terra  $\alpha, \alpha', \alpha''$ .

115. Para isso, suppondo  $l - \Sigma = A, l' - \Sigma' = A', l'' - \Sigma'' = A''$ ;  $l' - l = C, l'' - l = C', l'' - l' = C''$ ;  $\Sigma'' - \Sigma = S, \Sigma' - \Sigma = S', \Sigma'' - \Sigma' = S''$ ; calcularemos as quantidades seguintes:

$$\text{Tg. } B = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{s - s'' \text{ Cof. } S} \quad g = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B},$$

$$\text{Tg. } B' = \frac{s' \text{ Sen. } S'}{s - s' \text{ Cof. } S'} \quad g' = \frac{s' \text{ Sen. } S'}{\text{Sen. } B'},$$

$$\text{Tg. } B'' = \frac{s'' \text{ Sen. } S''}{s' - s'' \text{ Cof. } S''} \quad g'' = \frac{s'' \text{ Sen. } S''}{\text{Sen. } B''},$$

$$a = 2s \text{ Cof. } L \text{ Cof. } A, f = 2(\text{Cof. } L \text{ Cof. } L'' \text{ Cof. } C + \text{Sen. } L \text{ Sen. } L''),$$

$$a' = 2s' \text{ Cof. } L' \text{ Cof. } A', f' = 2(\text{Cof. } L \text{ Cof. } L' \text{ Cof. } C' + \text{Sen. } L \text{ Sen. } L'),$$

$$a'' = 2s'' \text{ Cof. } L'' \text{ Cof. } A'', f'' = 2(\text{Cof. } L' \text{ Cof. } L'' \text{ Cof. } C'' + \text{Sen. } L' \text{ Sen. } L''),$$

$$b = 2g \text{ Cof. } L \text{ Cof. } (A+B), e = 2g' \text{ Cof. } L \text{ Cof. } (A+B'),$$

$$b' = 2g' \text{ Cof. } L' \text{ Cof. } (A+B'+C'), e' = 2g'' \text{ Cof. } L' \text{ Cof. } (A+B''),$$

$$b'' = 2g'' \text{ Cof. } L'' \text{ Cof. } (A+B''+C''), e'' = 2g \text{ Cof. } L'' \text{ Cof. } (A+B+C),$$

$$b = \frac{g \text{ Sen. } (A+B+C)}{\text{Sen. } C'' \text{ Cof. } L}, \quad b' = \frac{g \text{ Sen. } (A+B)}{\text{Sen. } C \text{ Cof. } L''}$$

$$\alpha = \frac{g'' \text{ Sen. } (A+B'+C'')}{\text{Sen. } C'' \text{ Cof. } L'}, \quad \alpha' = \frac{g' \text{ Sen. } (A+B')}{\text{Sen. } C' \text{ Cof. } L'}$$

$$q = \frac{s' \text{ Sen. } (A+C'')}{\text{Sen. } C'' \text{ Cof. } L'}, \quad q' = \frac{s' \text{ Sen. } (C' - A')}{\text{Sen. } C' \text{ Cof. } L'}$$

$$m = \frac{t \text{ Sen. } C'' \text{ Cof. } L'}{t'' \text{ Sen. } C' \text{ Cof. } L}, \quad m' = \frac{t \text{ Sen. } C' \text{ Cof. } L'}{t' \text{ Sen. } C' \text{ Cof. } L''},$$

$$\Theta = \frac{2 s'^3 \text{ Sen. } \frac{1}{2} S' \text{ Sen. } \frac{1}{2} S''}{\text{Cof.} \left( \frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S'' \right)}.$$

Onde nos lembraremos: Que havemos designado por  $t$  o intervallo de tempo desde a primeira até a terceira observação, por  $t'$  o da primeira até a segunda, e por  $t''$  o da segunda até a terceira, contados em dias, e partes decimaes de dia; que  $C, C', C''$  são negativos, quando o movimento apparente do Cometa he retrogrado; que  $L, L', L''$  se tomaõ negativamente, sendo de denominação austral; que  $B, B', B''$  sempre são positivos, mas maiores que  $90^\circ$  quando o denominador da sua Tangente for negativo; e que as mais quantidades terãõ o final, que resultar da sua expressãõ, havendo respeito á regra dos sinais dos Senos, e Cofenos.

116. Suppondo tambem os raios vectores designados por  $r, r', r''$ , conforme a ordem das observações, teremos

$$r^2 = x(x - a) + s^2$$

$$r'^2 = x'(x' - a') + s'^2$$

$$r''^2 = x''(x'' - a'') + s''^2$$

$$x = b + m(x' - x) + \frac{\Theta m(q - x')}{r'^3} \left. \vphantom{\frac{\Theta m(q - x')}{r'^3}} \right\} \text{proximamente.}$$

$$x' = b' + m'(x' - x') + \frac{\Theta m'(q' - x')}{r'^3}$$

117. E havendo supposto  $r + r'' = R, r + r' = R',$  e  $r' + r'' = R'',$  teremos

$$\omega = \sqrt{\left(1 - \frac{x(x-b) + x''(x'+e'') - f x x'' + g^2}{R^2}\right)}$$

$$\omega' = \sqrt{\left(1 - \frac{x'(x'+b') + x(x-e) - f' x x' + g'^2}{R'^2}\right)}$$

$$\omega'' = \sqrt{\left(1 - \frac{x''(x''+b'') + x'(x'-e') - f'' x' x'' + g''^2}{R''^2}\right)}$$

118. Reflectindo tambem, que nas equações fundamen-  
taes os termos da fórmula  $4 - 3\omega^2 - \omega^3$  se reduzem ao pro-  
ducto dos dous factores  $(2 + \omega)^2$ , e  $(1 - \omega)$ , os quaes  
entraõ tambem no calculo de outras quantidades, faremos  
agora  $E = 1 - \omega$ ,  $E' = 1 - \omega'$ ,  $E'' = 1 - \omega''$ ;  $F = 2 + \omega$ ,  
 $F' = 2 + \omega'$ ,  $F'' = 2 + \omega''$ . E lembrando-nos que he o nú-  
mero constante  $\phi = 0,0053264345$ , cujo Logarithmo se  
acha  $7.7264366$ , teremos as tres equações seguintes:

$$E F^2 R^3 - \phi t^2 = 0$$

$$E' F'^2 R'^3 - \phi t'^2 = 0$$

$$E'' F''^2 R''^3 - \phi t''^2 = 0.$$

119. Se tomarmos pois qualquer valor hypothetico de  
 $x'$ , com elle acharemos  $r'$  pela segunda equação do *num.*  
116, e depois  $x$  pela quarta proxima, e  $r$  pela pri-  
meira. Com estas quantidades calcularemos  $\omega'$  pela segun-  
da equação do *num.* 117, e teremos todas as quantidades,  
que entraõ na segunda equação do *num.* precedente, a qual  
em lugar de se verificar dando nada no segundo membro,  
supponhamos que dá  $\gamma$ . Tomando outros dous valores hy-  
potheticos de  $x'$  em progressão arithmetica com o primei-  
ro, sendo a differença  $\eta$ , e praticando do mesmo modo,  
acharemos os resultados respectivos  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ; e entã fazendo  
para abbreviar,  $3\gamma - 4\gamma' + \gamma'' = G$ , e  $2(\gamma - 2\gamma' + \gamma'') = H$ ,

teremos a correccão  $dx'$  do primeiro valor hypothetico de  $x'$ , pela formula

$$dx' = \frac{\eta (G \pm \sqrt{(G^2 - 4\gamma H)})}{H}.$$

120. Depois d'esta correccão, se tomarmos outros tres valores hypotheticos em progressão arithmetica, e muito vizinhos do valor proximamente conhecido pela primeira operação, procedendo em tudo do mesmo modo, acharemos  $x'$  com a approximação sufficiente para o nosso intento; e com o valor de  $x'$ , em que ficarmos, determinaremos  $x$ , e  $x''$  pelas equações quarta, e quinta do *num.* 116. Os primeiros tres valores hypotheticos podem tomar-se 0,2; 0,6; 1, quando por circumstancias particulares não pareça tomarem-se de outro modo. Quem se contentar com as duas distancias  $x$ ,  $x'$  deduzidas d'esta soluçãõ approxima-da, para determinar com ellas proximamente os elementos da orbita, não tem necessidade de calcular todas as quantidades subsidiarias, bastando entãõ das vinte e sete quantidades do *num.* 115 calcular sómente dezeseis, a saber  $B, B', B'', g, g', g'', a, a', b', f', e, b, \kappa, q, m, \Theta$ .

121. Com os valores approximos de  $x, x', x''$  acharemos  $r, r', r''$  (*num.* 116), e  $\omega, \omega', \omega''$  (*num.* 117), e applicando os valores achados ás equações rigorosas do *num.* 118, daraõ os resultados  $\delta, \delta', \delta''$  respectivamente, os quaes deverãõ fer quantidades muito pequenas. Entãõ fazendo

$$D = \frac{2x - a}{r}, \quad D' = \frac{2x' - a'}{r'}, \quad D'' = \frac{2x'' - a''}{r''},$$

$$\alpha = \frac{3}{2} R F (2x - b - f x'' + D R E),$$

$$\alpha' = \frac{3}{2} R' F' (2x' + b' - f' x + D' R' E'),$$

$$\alpha'' = \frac{3}{2} R'' F'' (2x'' + b'' - f'' x' + D'' R'' E''),$$

$$\beta = \frac{3}{2} R' F' (2x - e - f' x' + D R' E'),$$

$$\beta' = \frac{3}{2} R'' F'' (2x' - e' - f'' x'' + D' R'' E''),$$

$$\beta'' = \frac{3}{2} R F (2x'' + e'' - f x + D'' R E),$$

acharemos as correcções de  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$  pelas equações seguintes

$$dx = - \frac{\alpha' \alpha'' \delta + \beta' \beta'' \delta' - \alpha' \beta'' \delta''}{\alpha \alpha' \alpha'' + \beta \beta' \beta''}$$

$$dx' = - \frac{\beta dx + \delta'}{\alpha'}, \quad dx'' = - \frac{\alpha dx + \delta}{\beta''}.$$

122. Esta operação se repetirá, quando parecer necessario, que será todas as vezes que estas primeiras correcções não forem muito pequenas. E onde se parar, podem tambem corregir-se as quantidades  $r$ ,  $r''$ ,  $R$ ,  $\omega$ ,  $E$ , que haõ de servir na determinação dos elementos, que he mais facil do que tornallas a calcular novamente, e teremos

$$dr = \frac{1}{2} D dx, \quad dr'' = \frac{1}{2} D'' dx'', \quad dR = dr + dr''$$

$$d\omega = \frac{EFdR}{R\omega} + \frac{\delta}{3FR^3\omega}, \quad dE = -d\omega.$$

123. Igualmente podemos satisfazer ás equações do *num.* 118 pelo methodo das interpolações. Com o valor proximo de  $x'$  buscaremos  $x$  de maneira que se verifique a segunda equação do dito numero usando da formula

$$dx = - \frac{\delta'}{\beta},$$

e conservando o mesmo valor de  $x'$ , buscaremos a correcção de  $x''$ , que satisfaça á terceira usando

$$da formula \quad dx'' = - \frac{\delta''}{\alpha''}.$$

Applicando os valores de  $x$ ,  $x''$  á primeira equação do *num.* 118, dará hum resultado, que cha-

chamaremos  $\gamma$ . E tomando outros dous valores de  $x'$  em progressão arithmetica com o primeiro, sendo a differença  $\eta$  pouco differente das correcções  $dx$ ,  $dx''$ , acharemos outros dous resultados  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  da dita primeira equação, com as quaes acharemos  $dx'$  pela formula do num. 119.

124. Finalmente, sendo conhecidas as distancias  $x$ ,  $x''$  com as quantidades que d'ellas dependem, acharemos por sua ordem a distancia perihelia  $p$ , a anomalia  $U$  no tempo da primeira observação, o tempo desde o perihelio até á primeira observação  $\tau$ , ou até á terceira  $\tau''$ , a longitude do nodo  $N$ , a inclinação da orbita  $I$ , e a longitude do perihelio  $P$ , pelas formulas seguintes, depois de haver supposto para mais brevidade  $x \text{ Cof. } L = \lambda$ ,  $x'' \text{ Cof. } L'' = \lambda''$ ,  $x \text{ Sen. } L = \varpi$ ,  $x'' \text{ Sen. } L'' = \varpi''$ , e lembrando-nos que  $\text{Log. } n = 1.4378117$ :

$$p = \frac{r'' - \frac{1}{4} R^2 \omega^2}{ER}, \text{ Cof. } \frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{p}{r}}, \text{ ou Sen. } \frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{r-p}{r}},$$

$$\tau = n(r + 2p) \sqrt{(r-p)}, \text{ ou } \tau'' = n(r'' + 2p) \sqrt{(r''-p)},$$

$$\text{Tg. } N = \frac{\varpi'' (\lambda \text{ Sen. } l - s \text{ Sen. } \Sigma) - \varpi (\lambda'' \text{ Sen. } l'' - s'' \text{ Sen. } \Sigma'')}{\varpi (s'' \text{ Cof. } \Sigma'' - \lambda'' \text{ Cof. } l'') - \varpi'' (s \text{ Cof. } \Sigma - \lambda \text{ Cof. } l)},$$

$$\text{Tg. } I = \frac{\varpi}{\lambda \text{ Sen. } (l - N) - s \text{ Sen. } (\Sigma - N)}$$

$$\text{Tg. } (P + U - N) = \frac{\varpi \cdot \frac{1}{\text{Sen. } I}}{\lambda \text{ Cof. } (l - N) - s \text{ Cof. } (\Sigma - N)};$$

advertindo-se, que  $\tau$  será additivo ao tempo da primeira observação para ter o do perihelio quando  $r \geq r''$ , ou  $\tau''$  subtractivo do tempo da terceira quando  $r'' \geq r$ ; que o Cometa he retrogrado, quando a Tangente da inclinação sahir negativa; que  $U$  muda de sinal, quando a primeira observação cahir antes da passagem pelo perihelio nos Cometas directos, e depois nos retrogrados; e que os angulos  $N$ , e  $P + U - N$  serão positivos, ou negativos confor-

forme o numerador da sua Tangente; e agudos, ou obtusos, conforme o denominador d'ella for positivo, ou negativo. Eis-aquí a theorica: passemos aos exemplos.

## §. X.

*Calculo da Orbita rigorosamente parabolica de hum Cometa hypothetico.*

125. Como a folação precedente he exacta, e geometrica, na supposição das orbitas rigorosamente parabolicas, quaes não são as dos Cometas, e quaes não poderiaõ achar-se por meio das observações, ainda que realmente o fossem, por haver sempre da parte d'ellas alguma incerteza, que a arte dos observadores póde diminuir até certo ponto, sem já mais a poder evitar de todo: daremos primeiramente hum exemplo ideal, fingindo hum Cometa directo, que movendo-se em huma parabola passasse pelo perihelio no anno de 1780 a 20 de Março 12<sup>h</sup> 0' do tempo medio do meridiano de París, sendo a distancia perihelia igual á unidade, a longitude do nodo 4<sup>s</sup> 20°, a do perihelio 3<sup>s</sup> 10°, e a inclinação 30°. Com estes elementos suppostos calcularemos pelo methodo do *num.* 99 os lugares d'elle para tres instantes dados, os quaes tomaremos como se fossem observados, para d'elles virmos no conhecimento dos elementos. Assim supponmos as tres observações seguintes

1780. París.	Temp. m.	Longit. do Comet.	Latitude.
Abril 10.	12 <sup>h</sup> 0' - -	2 <sup>s</sup> 17° 42' 50",2 - -	5° 9' 59",7. A.
25.	12 0 - -	3 6 12 1,9 - -	2 16 21,8. B
Mai 16.	12 0 - -	3 28 52 26,8 - -	10 23 31,5. B

126. Fazendo pois os calculos do Sol para os instantes das observações, e preparando as quantidades do *num.* 115, teremos

$$l = 77^{\circ} 42' 50'',2 \text{ -- } \Sigma = 21^{\circ} 40' 28'' \text{ --- } \text{Log. } s = 0.001449$$

$$l' = 96 \text{ } 12 \text{ } 1,9 \text{ -- } \Sigma' = 36 \text{ } 17 \text{ } 37 \text{ --- } \text{Log. } s' = 0.003202$$

$$l'' = 118 \text{ } 52 \text{ } 26,8 \text{ -- } \Sigma'' = 56 \text{ } 35 \text{ } 13 \text{ --- } \text{Log. } s'' = 0.005258$$

$$L = -5^{\circ} \text{ } 9' \text{ } 59'',7 \text{ -- } A = 56^{\circ} \text{ } 2' \text{ } 22'',2 \text{ -- } C = 41^{\circ} \text{ } 9' \text{ } 36'',6$$

$$L' = 2 \text{ } 16 \text{ } 21,8 \text{ -- } A' = 59 \text{ } 54 \text{ } 24,9 \text{ -- } C' = 18 \text{ } 29 \text{ } 11,7$$

$$L'' = 10 \text{ } 23 \text{ } 31,5 \text{ -- } A'' = 62 \text{ } 17 \text{ } 13,8 \text{ -- } C'' = 22 \text{ } 40 \text{ } 24,9$$

$$s = 34^{\circ} 54' 45'' \text{ --- } B = 73^{\circ} 20' 33'',7 \text{ -- } \text{Log. } g = 9.781519$$

$$s' = 14 \text{ } 37 \text{ } 9 \text{ --- } B' = 83 \text{ } 35 \text{ } 31,2 \text{ -- } \text{Log. } g' = 9.408002$$

$$s'' = 20 \text{ } 17 \text{ } 36 \text{ --- } B'' = 80 \text{ } 36 \text{ } 40,2 \text{ -- } \text{Log. } g'' = 9.551227$$

$$a = 1,116423 \text{ --- } s^2 = 1,006695 \text{ -- } \text{Log. } f = 0.159128$$

$$a' = 1,009440 \text{ --- } s'^2 = 1,014855 \text{ -- } \text{Log. } f' = 0.274264$$

$$a'' = 0,925968 \text{ --- } s''^2 = 1,024510 \text{ -- } \text{Log. } f'' = 0.261984$$

$$b = -0,764200 \text{ --- } e = -0,388292 \text{ -- } \Phi l^2 = 6,903059$$

$$b' = -0,474477 \text{ --- } e' = -0,548825 \text{ -- } \Phi l'^2 = 1,198448$$

$$b'' = -0,670057 \text{ --- } e'' = -1,173335 \text{ -- } \Phi l''^2 = 2,348958$$

$$b = 0,151578 \text{ --- } b' = 0,721952 \text{ -- } \text{Log. } m = 0.003177$$

$$x = 0,267129 \text{ --- } x' = 0,523052 \text{ -- } \text{Log. } m' = 0.069891$$

$$q = 2,593521 \text{ --- } q' = -2,103553 \text{ -- } \text{Log. } \Theta = 8.661687$$

Onde se advertirá, que pomos os Logarithmos sómente das quantidades, que se haõ de multiplicar no calculo das nossas formulas; que ufamos dos Logarithmos á maneira dos Astronomos, dando a characterisca o ás unidades, 9 ás decimas, 8 ás centesimas &c.; e que quando pomos o final — a hum Logarithmo naõ he porque elle seja negativo, mas porque o he o número a quem corresponde, para se ter conta com o final do producto, conforme a regra conhecida.

127. As ultimas nove quantidades *b*, *b'* &c., que ser-  
vem taõ sómente para achar os primeiros valores approxi-  
mados, naõ carecem de ser calculadas com muito escru-  
pulo; mas em todas as outras deve haver grande cuida-  
do, tendo-se advertencia de usar ao menos de huma casa

decimal de mais tanto nos Logarithmos, como nos números, quando se tratar de averiguar com exactidão o resultado de algumas observações. Supposto pois o calculo das quantidades precedentes, busquemos os primeiros valores approximados de  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$ , por meio dos tres valores hypotheticos:

I.	II.	III.
$x' = 0,2$	$x' = 0,6$	$x' = 1$
$lx' = 9,301030$	$lx' = 9,778151$	$lx' = 0,000000$
$lr' = 9,965466$	$lr' = 9,943008$	$lr' = 0,001173$
$lx = 9,351023$	$lx = 9,794836$	$lx = 9,983578$
$lr = 9,953307$	$lr = 9,922365$	$lr = 9,966962$
$lR' = 0,260459$	$lR' = 0,233838$	$lR' = 0,285434$
$lE' = 7,984122$	$lE' = 8,067331$	$lE' = 8,040761$
$lF' = 0,475723$	$lF' = 0,475428$	$lF' = 0,475528$
$\gamma = -0,677319$	$\gamma' = -0,674002$	$\gamma'' = -0,493563$

E com os resultados  $\gamma$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ , e a differença dos valores hypotheticos  $\eta = 0,4$  neste caso, acharemos pela formula do *num.* 119,  $dx' = +0,1925 \pm 0,8716$ ; e servindo sómente neste caso o final +, será  $dx' = 1,0641$ , e conseqüentemente  $x' = 1,2641$ ; valor, que se chega já bastante para a verdade. Onde se verá a grande vantagem, que resulta da applicação do methodo das interpolações á resolução das nossas formulas. Porque, se com as duas primeiras hypotheses buscássemos o valor de  $x'$  pela regra de falsa posição, acharíamos 81,87 com enorme apartamento da verdade; e se o buscássemos com as duas ultimas, acharíamos 2,094, que dista mais do verdadeiro que qualquer das ditas hypotheses. Donde se vê, que as falsas posições são inuteis, em quanto por muitas, e laboriosas tentativas se não tem chegado bem perto do que se busca, e que o methodo das interpolações de hum só passo nos põe na vizinhança do que procuramos.

128. Mas para rectificar o valor achado faremos outra operaçãõ, tomando os valores hypotheticos muito chegados ao que achamos, da maneira seguinte

I.	II.	III.
$x' = 1,25$	$x' = 1,27$	$x' = 1,29$
$lx' = 0.096910$	$lx' = 0.103804$	$lx' = 0.110590$
$lr' = 0.059555$	$lr' = 0.064485$	$lr' = 0.068545$
$lx = 0.072919$	$lx = 0.079543$	$lx = 0.086177$
$lr = 0.017761$	$lr = 0.022323$	$lr = 0.026996$
$lR' = 0.340189$	$lR' = 0.344945$	$lR' = 0.349298$
$lE' = 8.073928$	$lE' = 8.077295$	$lE' = 8.081919$
$lF' = 0.475402$	$lF' = 0.475389$	$lF' = 0.475369$
$\gamma = -0,088510$	$\gamma' = -0,042582$	$\gamma'' = +0,005344.$

Com estes resultados, e com a differença, que agora he  $\eta = 0,02$ , acharemos  $dx' = 0,037672$ , e conseguintemente  $x' = 1,287672$ . E porque he escusado continuar mais operações, com o valor de  $x'$  acharemos  $x = 1,217128$ , e  $x'' = 1,506477$  proximamente (num. 120).

129. Agora passando a corregir estes valores approximados por meio das formulas rigorosas, calcularemos as quantidades seguintes (num. 121):

$lx = 0.085336$	--	$lr = 0.026398$	--	$lR = 0.387518$
$lx' = 0.109805$	--	$lr' = 0.068855$	--	$lR' = 0.349175$
$lx'' = 0.177962$	--	$lr'' = 0.139266$	--	$lR'' = 0.406516$
$lE = 8.738082$	--	$lF = 0.469127$	--	$\delta = -0,002412$
$lE' = 8.080339$	--	$lF' = 0.475375$	--	$\delta' = -0,000014$
$lE'' = 8.201894$	--	$lF'' = 0.474812$	--	$\delta'' = +0,001113$
$lD = 0.093463$	--	$l\alpha = 1.108615$	--	$l\beta = 0.638607$
$lD' = 0.125910$	--	$l\alpha' = -0.182668$	--	$l\beta' = 0.685320$
$lD'' = 0.180253$	--	$l\alpha'' = 9.760363$	--	$l\beta'' = 0.489251.$

E com as quantidades  $\delta, \alpha, \beta$  &c. acharemos as correc-

recções  $dx = -0,000134$ ,  $dx' = -0,000392$ ,  $dx'' = +0,001339$ , as quaes sendo applicadas ás quantidades respectivas, teremos  $x = 1,216994$ ,  $x' = 1,287280$ ,  $x'' = 1,507816$ .

130. Mas para mais nos chegarmos á exactidão, tornemos com estes valores correctos a repetir a operação, e teremos

$$lx = 0.085289 \quad - - \quad lr = 0.026364 \quad - - \quad lR = 0.387684$$

$$lx' = 0.109673 \quad - - \quad lr' = 0.068758 \quad - - \quad lR' = 0.349108$$

$$lx'' = 0.178349 \quad - - \quad lr'' = 0.139586 \quad - - \quad lR'' = 0.406644$$

$$lE = 8.737725 \quad - - \quad lF = 0.469134 \quad - - \quad \delta = +0,000057$$

$$lE' = 8.080517 \quad - - \quad lF' = 0.475365 \quad - - \quad \delta' = -0,000134$$

$$lE'' = 8.201315 \quad - - \quad lF'' = 0.474814 \quad - - \quad \delta'' = +0,000004$$

$$lD = 0.093408 \quad - - \quad l\alpha = 1.107946 \quad - - \quad l\beta = 0.639006$$

$$lD' = 0.125790 \quad - - \quad l\alpha' = -0.183847 \quad - - \quad l\beta' = 0.682048$$

$$lD'' = 0.180490 \quad - - \quad l\alpha'' = 9.788516 \quad - - \quad l\beta'' = 0.493788.$$

Donde concluiremos novamente  $dx = +0,000038$ ,  $dx' = +0,000022$ ,  $dx'' = -0,000176$ ; e applicando estas correções ás quantidades respectivas, teremos  $x = 1,217032$ ,  $x' = 1,287302$ ,  $x'' = 1,507640$ ; valores tão correctos, que substituidos outra vez nas equações fundamentaes dariaõ os resultados  $\delta = -0,000013$ ,  $\delta' = +0,000001$ ,  $\delta'' = -0,000009$ , com os quaes he inutil buscar novas correções, porque havendo usado nestes calculos de seis casas decimacs tão fómote, não he certa a figura da quinta casa dos ditos resultados.

131. Corregindo tambem as quantidades, que haõ de entrar na determinação dos elementos, acharemos  $lr = 0.026374$ ,  $lr'' = 0.139544$ ,  $lR = 0.387665$ ,  $lE = 8.737787$ ,  $\omega^2 = 0,8936412$ . Com estas quantidades acharemos  $lp = 9.999997$ , e conseguintemente será a distancia perihelia  $p = 0,999993$ , e  $\tau'' = 57^d,00014 = 57^d 0^h 0' 12''$ , donde concluiremos a passagem pelo perihelio em 20 de Março ás

$11^h 59' 48''$ . Se o Logarithmo de  $\tau''$  na ultima casa decimal tivesse de menos huma unidade, seria justamente  $\tau'' = 57^d$ , e a passagem pelo perihelio em 20 de Março ás  $12^h$ ; e por aqui se verá a necessidade de usar de mais casas decimaes, quando se quizer conhecer com grande exactidão o resultado de observações, que mereçam esse trabalho.

132. Em fim, calculando os termos do valor da Tangente de  $N$  (*num.* 124), acharemos o numerador d'ella  $= + 0,2710262$ , e o denominador  $= - 0,3229927$ , donde concluiremos  $N = 139^\circ 59' 58''$ , e depois d'isso  $I = + 30^\circ 0' 1'',4$ , sendo directo o movimento por fahir a inclinação positiva. E porque achamos  $P + U - N = - 11^\circ 54' 14''$ , e  $U = 28^\circ 5' 51''$ , será  $P = 99^\circ 59' 51''$ . Assim teremos os elementos d'esta maneira:

Longitude do nodo ascendente	$4^h 19^\circ 59' 58''$
Longitude do perihelio	$3 \quad 9 \quad 59 \quad 53$
Inclinação da orbita	$30 \quad 0 \quad 1$
Logarithmo da distancia perihelia	$9,999997$
Passagem pelo perihel. Março	$11^h 59' 40'' \text{ temp.med.}$
Movimento	Directo.

Os quaes concordão com os elementos suppostos (*num.* 125) com as tenuissimas differenças de  $0,000003$  no Logarithmo da distancia perihelia, de  $12''$  de tempo na passagem pelo perihelio, de  $2''$  na longitude do nodo, de  $1''$  na inclinação da orbita, e de  $7''$  na longitude do perihelio; differenças, que provém, como havemos dito, de não usarmos de mais casas decimaes.

133. Se nos contentassemos com os valores de  $n, n'$  da soluçãõ approximada do *num.* 128, e com elles determinassemos os elementos, pondo  $r', R', \varpi', \lambda', \Sigma', l'$ , em vez de  $r'', R'', \varpi'', \lambda'', \Sigma'', l''$  respectivamente nas formulas do *num.* 124, achariamos

Longitude do nodo ascendente	4 <sup>s</sup> 19° 59' 20'
Longitude do perihelio	3 9 40 0
Inclinação	30 0 52
Logarithmo da distancia perihelia	9.999897
Passagem pelo perihel. Março	20 <sup>d</sup> 10 <sup>h</sup> 52' <i>temp.med.</i>
Movimento	Directo.

elementos, que não differem mais da verdade, do que costumão differir entre si os que são calculados por diversos Astronomos. E assim bem podemos nos casos ordinarios ficar n'aquella solução approximada, que não requer tanto trabalho, como acima advertimos (*num. 120*).

### §. XI.

#### *Calculo da Orbita do Cometa de 1680.*

134. Este Cometa, que de todos os conhecidos he o que passa mais perto do Sol no perihelio, e da orbita da terra no nodo ascendente, ou na vizinhança d'elle, veio em 1680 dar hum novo testemunho a Newton da theorica dos movimentos dos corpos celestes, que tão felizmente havia descoberto, e em cuja evolução occupava por aquelle tempo todas as forças do seu engenho. Como quem tinha nascido para ler no grande livro do Universo os segredos, que a natureza escondeo por tantos seculos aos olhos mortaes, logo conheceo pelas observações d'aquelle Cometa, que elle, e todos os outros são corpos coevos ao mundo, que guarda as mesmas leis das forças centraes, sómente com a differença de andarem por trajectorias muito excentricas, e não serem sensiveis ao alcance da nossa vista, senão quando de distancias remotissimas se chegaõ para o perihelio. E considerando tambem, que hum pequeno arco de huma Orbita elliptica muito alongada na vizinhança do vertice, se confunde sensívelmen-

mente com huma parabola, logo alcançou que nos Cometas se podia com grande ventagem substituir esta curva em lugar d'aquella; e para a determinar por meio de tres observações ensinou huma construcção, ainda que approximada, muito engenhosa, a qual elle mesmo executou por sua mão em huma grande figura, para determinar os elementos approximados d'este famoso Cometa de 1680, que muitos com razão chamaõ o Cometa Newtoniano.

135. Para determinarmos pois a orbita d'este Cometa pelo cálculo das nossas formulas, usaremos das mesmas observações, de que se servio aquelle grande Geometra, as quaes são estas.

Londres. 1680.	<i>Estil. velb.</i>	<i>Longitude.</i>	<i>Latitude.</i>
Dezemb. 21 <sup>d</sup> 6 <sup>h</sup> 36' 59"		10 <sup>s</sup> 5 <sup>o</sup> 8' 12"	21 <sup>o</sup> 42' 13" B
Janeiro 5 6 1 38		0 8 48 53	26 15 17 B.
25 7 58 42		1 9 35 0	17 56 30 B.

E calculando os lugares do Sol pelas Taboas modernas, que tem mais exactidão, do que as que havia no tempo de Newton, teremos as quantidades seguintes:

$l = -54^{\circ} 51' 48''$	---	$\Sigma = -78^{\circ} 53' 22''$	--	$\text{Log. } s = 9.992634$
$l' = 8 48 53$	---	$\Sigma' = -63 38 13$	--	$\text{Log. } s' = 9.993034$
$l'' = 39 35 0$	---	$\Sigma'' = -43 15 10$	--	$\text{Log. } s'' = 9.994253$
$L = 21^{\circ} 42' 13''$	---	$A = 24^{\circ} 1' 34''$	--	$C = 94^{\circ} 26' 48''$
$L' = 26 15 17$	---	$A' = 72 27 6$	--	$C' = 63 40 41$
$L'' = 17 56 30$	---	$A'' = 82 50 10$	--	$C'' = 30 46 7$
$S = 35^{\circ} 38' 12''$	---	$B = 72^{\circ} 30' 50''$	--	$\text{Log. } g = 9.780203$
$S' = 15 15 9$	---	$B' = 82 34 16$	--	$\text{Log. } g' = 9.416771$
$S'' = 20 23 3$	---	$B'' = 80 15 18$	--	$\text{Log. } g'' = 9.542536$
$a = 1,668681$	---	$s^2 = 0,966647$	--	$\text{Log. } f = 8.957946$
$a' = 0,532205$	---	$s'^2 = 0,968429$	--	$\text{Log. } f' = 0.027812$
$a'' = 0,234169$	---	$s''^2 = 0,973882$	--	$\text{Log. } f'' = 0.240247$

$b = -0,127589$	$--- e = -0,138577$	$-- \Phi t^2 = 6,546061$
$b' = -0,461561$	$--- e' = -0,555929$	$-- \Phi t'^2 = 1,194528$
$b'' = -0,662394$	$--- e'' = -1,126028$	$-- \Phi t''^2 = 2,147932$
$b = 0,124029$	$--- b' = 0,631432$	$-- \text{Log. } m = 9,936842$
$x = 0,046080$	$--- x' = 0,311253$	$-- \text{Log. } m' = 0,297526$
$q = 2,088091$	$--- q' = -0,186731$	$-- \text{Log. } \Theta = 8,651321$

136. E tomando os tres costumados valores hypotheticos de  $x'$ , para a primeira operação da solução approximada, calcularemos as quantidades que se seguem:

I.	II.	III.
$x' = 0,2$	$x' = 0,6$	$x' = 1$
$lx' = 9,301030$	$lx' = 9,778151$	$lx' = 0,000000$
$lr' = 9,977600$	$lr' = 0,001968$	$lr' = 0,078611$
$lx = 9,240876$	$lx = 9,691504$	$lx = 9,905775$
$lr = 9,924525$	$lr = 9,794460$	$lr = 9,716794$
$lR' = 0,252903$	$lR' = 0,211522$	$lR' = 0,235370$
$lE' = 7,715050$	$lE' = 8,447898$	$lE' = 8,954006$
$lF' = 0,476370$	$lF' = 0,473042$	$lF' = 0,463900$
$\gamma = -0,927536$	$\gamma' = -0,126587$	$\gamma'' = +2,677302$

E com os resultados  $\gamma, \gamma', \gamma''$ , e a differença dos valores hypotheticos  $\eta = 0,4$  calcularemos a formula do *num.* 119, que nos dará a correcção do primeiro valor hypothetico  $dx' = +0,04004 \pm 0,38703$ ; e fendo inutil neste caso o signal  $-$ , teremos  $dx = +0,42707$ , e por conseguinte  $x' = 0,62707$  proximamente.

137. Mas para nos chegarmos mais para o verdadeiro valor de  $x'$ , quanto permite a approximação de huma das equações, que aqui servem, tornaremos a repetir a operação, estreitando os limites das hypotheses na vizinhança do valor achado

I.

I.	II.	III.
$x' = 0,62$	$x' = 0,63$	$x' = 0,64$
$lx' = 9.792392$	$lx' = 9.799341$	$lx' = 9.806180$
$lr' = 0.004909$	$lr' = 0.006427$	$lr' = 0.007977$
<hr/>	<hr/>	<hr/>
$lx = 9.704903$	$lx = 9.711451$	$lx = 9.717906$
$lr = 9.788606$	$lr = 9.785721$	$lr = 9.782867$
$lR' = 0.211117$	$lR' = 0.210976$	$lR' = 0.210876$
<hr/>	<hr/>	<hr/>
$lE' = 8.483462$	$lE' = 8.500792$	$lE' = 8.517815$
$lE'' = 0.472692$	$lE'' = 0.472511$	$lE'' = 0.472326$
$\gamma = -0,040552$	$\gamma' = +0,004258$	$\gamma'' = +0,050258.$

donde semelhantemente concluiremos  $dx' = + 0,009065$ , e  $x' = 0,629065$ , e conseguintemente  $x = 0,513859$ , e  $x'' = 1,192514$ ; valores, com os quaes determinariamos immediatamente a orbita, se nos contentassemos com a soluçãõ approximada.

138. Recorrendo porém ás formulas exactas, para corrigirmos os valores precedentes, calcularemos as quantidades seguintes :

$lx = 9.710844$	---	$lr = 9.785990$	---	$lR = 0.315093$
$lx' = 9.798696$	---	$lr' = 0.006284$	---	$lR' = 0.210990$
$lx'' = 0.076463$	---	$lr'' = 0.162832$	---	$lR'' = 0.392604$
<hr/>		<hr/>		<hr/>
$lE = 8.943622$	---	$lE' = 0.464217$	---	$\delta = + 0,020454$
$lE' = 8.499177$	---	$lE'' = 0.472528$	---	$\delta' = + 0,000019$
$lE'' = 8.200018$	---	$lE''' = 0.474782$	---	$\delta'' = + 0,011174$
<hr/>		<hr/>		<hr/>
$lD = 0.020843$	---	$l\alpha = 0.888268$	---	$l\beta = 0.504830$
$lD' = 9.854608$	---	$l\alpha' = 0.315119$	---	$l\beta' = -0.407104$
$lD'' = 0.169780$	---	$l\alpha'' = 0.880826$	---	$l\beta'' = 1.125833.$

e com  $\delta, \alpha, \beta$ , &c. pelas formulas do num. 121, acharemos  $dx = + 0,000364$ ,  $dx' = - 0,000572$ , e  $dx'' = - 0,001741$ ; correcções, que sendo applicadas ás quantidades respectivas, darão  $x = 0,514223$ ,  $x' = 0,628493$ ,  $x'' = 1,190773.$

139. E contentando-nos com esta operação, buscaremos as correcções de  $r'$ ,  $r''$ ,  $R$ ,  $E$ , que serão  $dr = -0,000191$ ,  $dr'' = -0,001287$ ,  $dR = -0,001478$ ,  $dE = -0,000082$ , e conseguintemente teremos  $\text{Log. } r = 9.785853$ ,  $\text{Log. } r'' = 0.162447$ ,  $\text{Log. } R = 0.314782$ ,  $\text{Log. } E = 8.943175$ ,  $\omega^2 = 0,8322269$ . Pelo que acharemos  $\text{Log. } p = 7.796158$ ,  $p = 0,006254$ , e  $\tau'' = 48,3358 = 48^d 8^h 3' 31''$ . Donde se fe-gue a passagem pelo perihelio a 7 de Dezembro ás  $23^h 55' 11''$  do meridiano de Londres pelo estilo velho, que vem a ser a 18 de Dezembro ás  $0^h 4' 53''$  do meri-diano de Paris pelo estilo Gregoriano.

140. Para indagar o resto dos elementos, acharemos  $\text{Log. } \lambda = 9.679218$ ,  $\text{Log. } \lambda'' = 0.054169$ ,  $\text{Log. } \omega = 9.279124$ ,  $\text{Log. } \omega'' = 9.564448$ , donde calculando o va-lor da Tangente de  $N$ , será o numerador  $= -0,0552923$ , e o denominador  $= +0,0020167$ , e conseguintemente  $N = -87^\circ 54' 40''$ , que vem a ser o mesmo que  $+272^\circ 5' 20''$ . Do mesmo modo acharemos o valor de  $I = 60^\circ 46' 40''$ , conhecendo ao mesmo tempo ser directo o movi-mento do Cometa na sua orbita, por sahir a Tangente d'este angulo positiva. Em fim acharemos  $P + U - N = 159^\circ 5' 53''$ ; e porque a anomalia correspondente á pri-meira observação he  $U = 168^\circ 23' 3''$ , teremos  $P = -97^\circ 11' 50''$ , que vem a ser o mesmo que  $262^\circ 48' 10''$ .

141. De todos estes calculos resultaõ pois os elemen-tos da orbita d'este Cometa na fôrma seguinte :

Longitude do nodo ascendente	9 <sup>s</sup> 2° 5' 20'
Longitude do perihelio	8 22 48 10
Inclinação	60 46 40
Logarithmo da distancia perihelia	7.796188
Passagem pelo perihel. Dez.	18 <sup>d</sup> 0 <sup>h</sup> 4' 53'' <i>temp. med.</i>
Movimento	Directo.

os quaes concordão proximamente com os de Newton, e Halley, procedendo as pequenas differenças, que nelles ha, de tomarmos as posições, e distancias do Sol differentes, conforme as Taboas que depois d'ellas se aperfeiçoáraõ pela theorica, e pela observaçaõ.

§. XII.

*Cálculo da Orbita do Cometa de 1759.*

142. Para dar mais outro exemplo, tomemos o Cometa de 1759, que nos annaes da Astronomia ficará para sempre memoravel pela predicçaõ, que fez Halley da sua volta, e pelos calculos immensos, com que M. Clairaut collegio do modo possivel os effeitos, que deviaõ produzir as attracções de Jupiter, e Saturno sobre o tempo periodico d'elle na ultima revoluçaõ. Servir-nos-hemos para isso das observações referidas, e apuradas por M. de La-Lande nas Memorias da Academia de Paris do mesmo anno, que faõ da maneira seguinte :

Paris. 1759. Temp. m.	Longitude.	Latitude.
Ab:il 15 <sup>d</sup> 16 <sup>h</sup> 40' 23"	10 <sup>s</sup> 18 <sup>o</sup> 52' 12"	4 <sup>o</sup> 28' 44" A
Maio. 1 8 54 16	5 22 36 7	31 32 16 A
21 9 28 38	5 7 31 51	15 3 16 A.

143. Calculando os lugares, e distancias do Sol para os tres instantes d'estas observações, e preparando as quantidades necessarias para a resoluçaõ da questaõ, teremos

$l = -41^{\circ} 7' 48''$	---	$\Sigma = 25^{\circ} 51' 5''$	--	$\text{Log. } s = 0.002016$
$l' = 172 36 7$	---	$\Sigma' = 41 5 47$	--	$\text{Log. } s' = 0.003801$
$l'' = 157 31 51$	---	$\Sigma'' = 60 23 55$	--	$\text{Log. } s'' = 0.005636$
<hr/>				
$L = -4^{\circ} 28' 44''$	---	$A = -66^{\circ} 58' 53''$	--	$C = -161^{\circ} 20' 21''$
$L' = -31 32 16$	---	$A' = 131 30 18$	--	$C' = -146 16 5$
$L'' = -15 3 16$	---	$A'' = 97 7 56$	--	$C'' = -15 4 16$

$S = 34^{\circ} 32' 50''$	--	$B = 73^{\circ} 39' 40''$	--	$\text{Log. } g = 9.777559$
$S' = 15 14 44$	--	$B' = 83 15 24$	--	$\text{Log. } g' = 9.426700$
$S'' = 19 18 6$	--	$B'' = 81 3 40$	--	$\text{Log. } g'' = 9.530169$
$a = 0,783301$	--	$s^2 = 1,009328$	--	$\text{Log. } f = -0.251314$
$a' = -1,139564$	--	$s'^2 = 1,017658$	--	$\text{Log. } f' = -0.124372$
$a'' = -0,242928$	--	$s''^2 = 1,026295$	--	$\text{Log. } f'' = 0.269790$
$b = 1,186995$	--	$e = 0,511258$	--	$\Phi i^2 = 6,788548$
$b' = -0,292632$	--	$e' = -0,486966$	--	$\Phi i'^2 = 1,308952$
$b'' = -0,624400$	--	$e'' = -1,047322$	--	$\Phi i''^2 = 2,135661$
$b = 0,799000$	--	$b' = -0,219963$	--	$\text{Log. } m = 0.092940$
$\kappa = 0,459831$	--	$\kappa' = -0,158171$	--	$\text{Log. } m' = 0.542614$
$q = -4,076142$	--	$q' = -2,111874$	--	$\text{Log. } \Theta = 8.659801$

144. E havendo feito a primeira operaçãõ com os tres valores hypotheticos costumados de  $x'$ , assim como nos exemplos precedentes, e achando por ella que  $x'$  he proximamente 0,25, repetiremos a operaçãõ seguinte :

I.	II.	III.
$x' = 0,24$	$x' = 0,25$	$x' = 0,26$
$lx' = 9.380211$	$lx' = 9.397940$	$lx' = 9.414973$
$lr' = 0.064966$	$lr' = 0.067574$	$lr' = 0.070182$
$lx = 9.569114$	$lx = 9.586130$	$lx = 9.602465$
$lr = 9.966332$	$lr = 9.966230$	$lr = 9.966241$
$lR' = 0.319473$	$lR' = 0.320881$	$lR' = 0.322343$
$lE' = 8.160524$	$lE' = 8.208730$	$lE' = 8.254342$
$lF' = 0.475021$	$lF' = 0.474773$	$lF' = 0.474514$
$\gamma = -0,136798$	$\gamma' = +0,012096$	$\gamma'' = +0,171517.$

donde se collige  $dx' = +0,009213$ , e conseguintemente  $x' = 0,249213$ ,  $x = 0,384430$ , e  $x'' = 0,964835$ .

145. Para resolver pois as equações rigorosas, ou buscar as correcções dos valores approximados de  $x, x', x''$ , que acabámos de achar, calcularemos as quantidades seguintes:

$lx$	$= 9.584817$	--	$lr$	$= 9.966234$	--	$lR$	$= 0.381223$
$lx'$	$= 9.396571$	--	$lr'$	$= 0.067369$	--	$lR'$	$= 0.320769$
$lx''$	$= 9.984453$	--	$lr''$	$= 0.170380$	--	$lR''$	$= 0.422952$
<hr/>							
$lE$	$= 8.749962$	--	$lF$	$= 0.468903$	--	$\delta$	$= -0.005314$
$lE'$	$= 8.205030$	--	$lF'$	$= 0.474793$	--	$\delta'$	$= -0.000004$
$lE''$	$= 8.109480$	--	$lF''$	$= 0.475254$	--	$\delta''$	$= -0.003380$
<hr/>							
$lD$	$= -8.193363$	--	$l\alpha$	$= 1.140393$	--	$l\beta$	$= 0.741716$
$lD'$	$= 0.146942$	--	$l\alpha'$	$= 0.855183$	--	$l\beta'$	$= -0.956567$
$lD''$	$= 0.166600$	--	$l\alpha''$	$= 1.024392$	--	$l\beta''$	$= 1.273343.$

as quaes nos darão as correcções procuradas  $dx = -0,000475$ ,  $dx' = +0,000366$ ,  $dx'' = +0,000633$ ; e teremos conseguintemente  $x = 0,383955$ ,  $x' = 0,249579$ ,  $x'' = 0,965468$ .

146. E ficando nos valores antecedentes, que com effeito satisfazem ás equações fundamentaes até os limites, onde chega a exactidão das nossas operações numericas, corrigiremos as outras quantidades, de que depende a determinação dos elementos. E acharemos  $dr = +0,0000037$ ,  $dr'' = +0,0004645$ ,  $dR = +0,0004682$ ,  $dE = +0,0000117$ . Donde se conclue  $\text{Log. } r = 9.966236$ ,  $\text{Log. } r'' = 0.170516$ ,  $\text{Log. } R = 0.381308$ ,  $\text{Log. } E = 8.750050$ , e  $\omega = 1 - E = 0,9437594$ . Com estas quantidades achamos  $\text{Log. } p = 9.777257$ , e conseguintemente  $p = 0,598766$ , e  $\tau'' = 68^{\circ} 22' 28'' 7''$ ; donde resulta a passagem pelo perihelio a 13 de Março ás  $11^{\text{h}} 0' 31''$ .

147. Para concluir os mais elementos, teremos  $\text{Log. } \lambda = 9.582952$ ,  $\text{Log. } \lambda'' = 9.969571$ ;  $\text{Log. } \varpi = -8.476886$ ,  $l\varpi'' = -9.399271$ , e acharemos  $N = 54^{\circ} 9' 41''$ , e  $I =$

—  $17^{\circ} 27' 55''$ ; conhecendo ser o Cometa retrogrado, por sahir a inclinação, ou a sua Tangente negativa. Finalmente acharemos  $P + U - N = 173^{\circ} 48' 4''$ , e  $U = 72^{\circ} 52' 54''$ ; e reflectindo, que a anomalia  $U$  deve mudar de final, por ser a primeira observação, á qual corresponde, depois da passagem pelo perihelio em Cometa retrogrado, será  $P = 300^{\circ} 50' 39''$ . Do que tudo resultaõ os elementos seguintes:

Longitude do nodo ascendente	$1^{\circ} 24' 9' 41''$
Longitude do perihelio	$10^{\circ} 0' 50' 39''$
Inclinação	$17^{\circ} 27' 55''$
Logarithmo da distancia perihelia	$9.777257$
Passagem pelo perihel. Març.	$13^{\text{d}} 11^{\text{h}} 0' 31'' \text{ temp. med.}$
Movimento	Retrogrado.

148. Estes elementos não devem comparar-se com os que andaõ na Taboa dos Cometas, porque effes foraõ deduzidos na supposição de huma orbita elliptica, cujo eixo se determinou pelo tempo periodico, conforme a regra de *Kepler*. Devem confrontar-se com outros elementos parabolicos, como saõ os de *Klinkenberg*, referidos nas Memorias da Academia de París, A. 1760, dos quaes não differem mais, do que entre si discrepaõ os elementos ellipticos calculados pelo mesmo Author, e pelos grandes Astronomos *La Caille*, *Maraldi*, e *Lalande*.

149. Mas a melhor comparação, que póde fazer-se, he com as observações. Calculando sobre os nossos elementos os lugares do Cometa para os tres instantes d'ellas, achamos  $l = -41^{\circ} 7' 52''$ ,  $l' = 172^{\circ} 36' 12''$ ,  $l'' = 157^{\circ} 31' 50''$ ;  $L = -4^{\circ} 28' 45''$ ,  $L' = -31^{\circ} 32' 52''$ ,  $L'' = -15^{\circ} 3' 15''$ ; resultados, que differem das observações muito menos, do que póde ser a incerteza d'ellas, confessando hum dos mais habéis Observadores *M. de La Caille*, que este Cometa se mostrou sempre escuro, e confuso, e que as posições d'elle se não podiaõ dar por seguras, senão nos minutos, não

fendo para admirar, que observações feitas ao mesmo tempo differissem 2' entre si (Mem. 1760, pag. 60).

150. Se calcularmos porém pelos mesmos elementos o lugar do Cometa para hum tempo bem distante das observações, donde elles se deduzirão, acharemos que a 28 de Janeiro  $6^h 28' 22''$ , deveria ter a longitude  $11^s 19^{\circ} 45' 43''$ , e a latitude boreal  $5^{\circ} 36' 15''$ . Mas pela observação de M. *Messier* foi a longitude  $11^s 20^{\circ} 46' 49''$ , e a latitude  $5^{\circ} 3' 46''$ , com differenças exorbitantes, e que excedem muito a incerteza, que podia haver nas observações de tão habil Astronomo. Procede isto da inflexão do orbe elliptico, que se faz já sensivel n'aquella distancia, e que se determinará do modo, que mostraremos na Segunda Parte.

## MEMORIA

*Sobre algumas propriedades dos Coefficientes dos termos do Binomio Newtoniano.*

POR FRANCISCO DE BORJA GARÇAÕ STOCKLER.

## Theorema I.

Lida em  
22 de  
Novem-  
bro de  
1797.

A Somma dos coefficientes dos termos do binomio  $(1 - x)^n$  depois de desenvolvimento em serie he nulla sendo  $n$  numero inteiro positivo.

*Demonstração.*

Desenvolvendo  $(1 - x)^n$  em serie, teremos

$$(1 - x)^n = 1 - \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \&c.$$

mas suppondo  $x = 1$  fica

$$(1 - 1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c. = 0$$

*Advertencia.*

Quando pelo decurso d'esta Memoria tivermos de fallar da somma dos termos d'esta serie a designaremos pela letra *A*.

## Theorema II.

Se os termos da serie dos coefficientes do binomio  $(1 - x)^n$  se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos numeros naturaes, a saber, o primeiro por  $n$ , o segundo por  $(n - 1)$ , o terceiro por  $(n - 2)$ , e assim  
suc-

ſucceſſivamente a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla , ſendo  $n$  numero inteiro poſitivo  $> 1$  , e ſerá  $= 1$  , ſendo  $n = 1$ .

*Demonſtração.*

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c.$$

$$n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$n - \frac{n(n-1)}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.$$

cuja ſomma repreſento por  $A''$  , e a qual ſe reduz a

$$n \left( 1 - \frac{(n-1)}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c. \right)$$

iſto he , a  $n$  multiplicado pela ſomma dos termos da ſerie dos coefficients do binomio  $(1 - x)^{n-1}$  a qual repreſento por  $B$  , e por tanto ſerá

$$A'' = nB.$$

Mas , ſendo  $n$  numero inteiro poſitivo  $> 1$  , he  $(n-1)$  numero inteiro poſitivo , e por tanto pelo Theorema antecedente he  $B = 0$  , donde ſe deduz , que he tambem  $A'' = 0$  : mas ſendo  $n = 1$  , he  $B = 1$  , e por conſequecia vem a ſer neſte caſo particular

$$A'' = 1.$$

*Theorema III.*

Se os termos da ſerie dos coefficients do binomio  $(1 - x)^n$  ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ſerie dos quadrados dos numeros naturaes , a ſaber , o primeiro por  $n^2$  , o ſegundo por  $(n-1)^2$  , o terceiro por  $(n-2)^2$  , e aſſim ſucceſſivamente , a ſomma dos termos da

Tom. II.

FFFF

ſe-

serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 2$ ; e será  $= 2.1$ , sendo  $n = 2$ .

*Demonstração.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + (n-4)^2 + \&c.$$

se obtem a serie

$$n^2 - \frac{n(n-1)^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{1.2.3} + \&c.$$

cuja somma represento por  $A''$ . Esta serie se obteria tambem multiplicando ordenadamente as duas seguintes

$$n - \frac{n(n-1)}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \&c.$$

$$n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \&c.$$

e por tanto evidentemente se resolve nas duas seguintes

$$n^2 - \frac{n^2(n-1)}{1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)}{1.2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \&c.$$

$$n(n-1) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he  $= n A''$ , e a da segunda he  $= n A'_{(1)}$ , representando por  $A'_{(1)}$  a somma dos termos da serie, em que se converteria aquella, cuja somma he  $A''$ , se em cada hum dos seus termos se escrevesse  $(n-1)$  em lugar de  $n$ . D'aquí se deduz

$$A'' = n (A'' + A'_{(1)})$$

Porém, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 2$ , cada huma d'estas sommas  $A''$ , e  $A'_{(1)}$  he nulla pelo Theorema ante-

cedente, e por consequencia será tambem  $A^{2'} = 0$ . Mas pelo mesmo Theorema, sendo  $n=2$ , he  $A'' = 0$ , e  $A_{(1)}'' = 1$ .

Logo neste caso particular será

$$A^{2'} = 2 \cdot 1.$$

*Advertencia.*

D'aquí em diante por evitar repetições, quando dada huma serie qualquer, e escolhida huma letra para representar a somma dos seus termos, houvermos de tratar da somma da serie, que se obteria substituindo em cada hum dos mesmos termos  $(n-1)$ ,  $(n-2)$ ,  $(n-3)$ , ou em geral  $(n-k)$  em lugar de  $n$ , representaremos a dita somma pela mesma letra, por que se houver representado a somma da serie primitiva, pondo-lhe por baixo o numero  $k$  fechado entre parenthesis. Assim por exemplo para representar a somma dos termos da serie, que se obteria substituindo,  $(n-1)$ ,  $(n-2)$ ,  $(n-3)$ , ou em geral  $(n-k)$  em lugar de  $n$  em cada hum dos termos da serie, cuja somma he  $A^{2'}$ , escreveremos  $A_{(1)}^{2'}$ ,  $A_{(2)}^{2'}$ ,  $A_{(3)}^{2'}$ , ou  $A_{(k)}^{2'}$ ; e assim em todos os outros casos.

*Theorema IV.*

Se os termos da serie dos coefficients do binomio  $(1-x)^n$  se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos cubos dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por  $n^3$ , o segundo por  $(n-1)^3$ , o terceiro por  $(n-2)^3$ ; e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 3$ , e será  $= 3 \cdot 2 \cdot 1$ , sendo  $n = 3$ .

*Demonstração.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c.$$

$$n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3 + (n-4)^3 + \&c.$$

$$n^3 - \frac{n(n-1)^3}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.$$

cuja fomma represento por  $A^{3'}$ , e que por hum artificio semelhante, ao que praticamos em a Demonstraçãõ do Theorema antecedente, se reconhece poder resolver-se nas duas seguintes

$$n^3 - \frac{n^2(n-1)^2}{1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^2}{1 \cdot 2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.$$

$$n(n-1)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{1 \cdot 2} - \&c.$$

a fomma da primeira das quaes he  $= n A^{2'}$ , e a da segunda  $= n A^{2'}$ , donde se segue que he

$$A^{3'} = n (A^{2'} + A^{2'})$$

porém sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 3$ , he  $(n-1)$  numero inteiro positivo  $> 2$ , e por tanto pelo Theorema antecedente he  $A^{2'} = 0$ , e  $A^{2'} = 0$ ; donde se conclue

que he tambem  $A^{3'} = 0$ . Mas sendo  $n = 3$ , he  $n-1 = 2$ , e pelo mesmo Theorema he  $A^{2'} = 0$ , e  $A^{2'} = 2 \cdot 1$ , valores que substituidos na expressãõ de  $A^{3'}$  mostraõ ser neste caso particular.

$$A^{3'} = 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

#### Theorema V.

Se os termos de serie dos coefficients do binomio  $(1-x)^n$  se multiplicarem ordenadamente pelos termos da

serie das quartas potencias dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por  $n^4$ , o segundo por  $(n-1)^4$ , o terceiro por  $(n-2)^4$ , e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 4$ , e será  $= 4.3.2.1$ , sendo  $n=4$ .

*Demonstração.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \dots$$

$$n^4 + (n-1)^4 + (n-2)^4 + (n-3)^4 + (n-4)^4 + \dots$$

se obtem a serie

$$n^4 - \frac{n(n-1)^4}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^4}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^4}{1.2.3} + \dots$$

cuja somma represento por  $A''$ , e que pelo mesmo artificio praticado nas Demonstrações dos Theoremas antecedentes se mostra poder resolver-se nas duas

$$n^4 - \frac{n^2(n-1)^2}{1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^2}{1.2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)^2}{1.2.3} + \dots$$

$$n(n-1)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{1.2} - \dots$$

a somma da primeira das quaes he  $= n A''$ , e a da segunda  $= n A''_{(1)}$ , donde se segue que he

$$A'' = n (A'' + A''_{(1)})$$

porém, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 4$ , he  $n-1$  numero inteiro positivo  $> 3$ , e por tanto he pelo Theorema antecedente  $A'' = 0$ , e  $A''_{(1)} = 0$ , e por consequencia

tambem  $A'' = 0$ . Mas sendo  $n=4$ , he  $n-1=3$ , e pelo

lo mefmo Theorema he  $A' = 0$ , e  $A'_{(1)} = 3.2.1$ , valores

que fubtituidos na expreffão de  $A''$  mostraõ, que he neste cafo particular

$$A'' = 4.3.2.1.$$

*Corollario.*

Attendendo á natureza e proceffo das Demonftrações dos Theoremás precedentes, fe pôde concluir em geral por huma bem clara induçãõ. » Que multiplicando ordenadamente os termos da ferie dos coefficients do binomio »  $(1 - x)^n$  pelos termos da ferie das potencias de hum » gráo qualquer  $m$  dos numeros naturaes; a faber, o primeiro por  $n^m$ , o fequndo por  $(n - 1)^m$ , o terceiro por »  $(n - 2)^m$ , e affim fucceffivamente, a fomma dos termos da ferie

$$n^m - \frac{n(n-1)^m}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^m}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^m}{1.2.3} + \&c.$$

» resultante d'eftas multiplicações, a qual representaremos

» por  $A'''$ , ferá nulla, fendo  $n$  numero inteiro positivo  $> m$ , » e que, fendo  $m = n$ , ferá

$$n^n - \frac{n(n-1)^n}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^n}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^n}{1.2.3} + \&c.$$

» ou

$$A''' = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1.$$

» isto he, que multiplicando ordenadamente a ferie dos » coefficients do binomio  $(1 - x)^n$ , em que o expoente »  $n$  he numero inteiro positivo, pelos termos da ferie das » potencias do gráo  $n$  dos numeros naturaes, a fomma dos » termos da ferie resultante d'eftas multiplicações ferá » igual ao producto de todos os numeros naturaes desde » 1 até  $n$ . »

*Ap-*

*Appliquaçõ.*

Na Memoria sobre os verdadeiros principios do Methodo das Fluxões, impressa no primeiro tomo d'esta Collecção, demonstramos que, representando  $\varphi$  huma função qualquer de qualquer numero de quantidades fluentes, e  $F_\varphi$  huma função qualquer de  $\varphi$ , será, suppondo  $d\varphi$  constante,

$$d^n F_\varphi = \frac{F(\varphi + nt d\varphi) - \frac{n}{1} F(\varphi + (n-1)t d\varphi) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} F(\varphi + (n-2)t d\varphi) \dots + F_\varphi}{t^n (\circ)}$$

Formula em que o denominador  $t^n (\circ)$  significa, que se deve dividir o numerador por  $t^n$ , e depois de feita a divisão supôr  $t = \circ$ . He bem sabido que, suppondo que em  $F_\varphi$  se escreve  $\varphi + \omega$  em lugar de  $\varphi$ ,  $F_\varphi$  se converte em  $F(\varphi + \omega)$ , e que desinvolvendo esta Função em serie se tem

$$F(\varphi + \omega) = F_\varphi + P^1 \omega + P^2 \omega^2 + P^3 \omega^3 + P^4 \omega^4 + \&c.$$

sendo  $P^1, P^2, P^3, \&c.$  Funções de  $\varphi$  independentes de  $\omega$ ; por tanto se fizermos successivamente  $\omega = nt d\varphi$ ;  $\omega = (n-1)t d\varphi$ ;  $\omega = (n-2)t d\varphi$ , e assim por diante até  $\omega = t d\varphi$  acharemos

$$\begin{aligned} F(\varphi + nt d\varphi) &= \dots \dots \dots F_\varphi + n P^1 t d\varphi + n^2 P^2 t^2 d\varphi^2 + \&c. \\ -n F(\varphi + (n-1)t d\varphi) &= \dots \dots -n \left( F_\varphi + (n-1) P^1 t d\varphi + (n-1)^2 P^2 t^2 d\varphi^2 + \&c. \right) \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} F(\varphi + (n-2)t d\varphi) &= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left( F_\varphi + (n-2) P^1 t d\varphi + (n-2)^2 P^2 t^2 d\varphi^2 + \&c. \right) \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} F(\varphi + (n-3)t d\varphi) &= - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( F_\varphi + (n-3) P^1 t d\varphi + (n-3)^2 P^2 t^2 d\varphi^2 + \&c. \right) \end{aligned}$$

suppondo feitas as multiplicações indicadas em os segundos membros d'estas expressões, e sommando todos os termos, que ficam em huma mesma columna, teremos

$$t^n d^n F_\varphi = A F_\varphi + A^1 P^1 t d\varphi + A^2 P^2 t^2 d\varphi^2 + \dots + A^n P^n t^n d\varphi^n + \&c.$$

Mas pelo Theor. I. he  $A = \circ$ , e pelo Corollario antecedente-

cedente cada huma das Funções  $A^1, A^2, A^3, \dots$  até  $A^{(n-1)}$  he nulla; e he  $A^n = 1.2.3 \dots (n-2)(n-1)n$ . Logo substituindo estes valores nos seus competentes lugares, dividindo por  $t^n$ , e suppondo depois  $t = 0$ , ficará

$$d^n F_\varphi = 1.2.3 \dots (n-2)(n-1)n.P^n d\varphi^n.$$

Formula da qual, suppondo successivamente  $n = 1; n = 2; n = 3; \dots$  se deduz

$$d F_\varphi = P^1 d\varphi.$$

$$ddF_\varphi = 1.2.P^2 d\varphi^2.$$

$$d^3 F_\varphi = 1.2.3.P^3 d\varphi^3.$$

$$d^4 F_\varphi = 1.2.3.4.P^4 d\varphi^4.$$

$$d^5 F_\varphi = 1.2.3.4.5.P^5 d\varphi^5.$$

&c.

e que por tanto mostra ser

$$P^1 = \frac{dF_\varphi}{d\varphi}$$

$$P^2 = \frac{ddF_\varphi}{1.2d\varphi^2}$$

$$P^3 = \frac{d^3 F_\varphi}{1.2.3.d\varphi^3}$$

$$P^4 = \frac{d^4 F_\varphi}{1.2.3.4.d\varphi^4}$$

- - - - -

- - - - -

$$P^n = \frac{d^n F_\varphi}{1.2.3 \dots (n-1)n}$$

valores, que substituidos na Formula

$$F(\varphi + \omega) = F_\varphi + P^1 \omega + P^2 \omega^2 + P^3 \omega^3 + P^4 \omega^4 + \dots$$

a reduzem a

$$F(\varphi + \omega)$$

$$F(\varphi + \omega) = F_{\varphi} + \frac{\omega dF_{\varphi}}{d\varphi} + \frac{\omega^2 ddF_{\varphi}}{1.2.d\varphi^2} + \frac{\omega^3 d^3 F_{\varphi}}{1.2.3.d\varphi^3} + \&c.$$

que he justamente a Formula de Taylor, cuja demonstração indicamos em a já citada Memoria, por meio de huma inducção menos luminosa sim do que a presente, mas que além de não differir d'ella essencialmente, tem a vantagem de ser mais breve.

*Theorema VI.*

Se os termos da serie dos coefficients do binomio  $(1 - x)^n$  se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos numeros triangulares; a saber, o primeiro por  $\frac{n(n-1)}{2}$ , o segundo por  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ , o terceiro por  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ , e assim successivamente, a somma da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 2$ , e será  $= 1$ , sendo  $n = 2$ .

*Demonstração.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \&c.$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \frac{(n-3)(n-4)}{2} + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

cuja somma represento por  $A_1$ , a qual se reduz a

$$\frac{n}{1} \left( (n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} + \&c. \right)$$

e por tanto será

$$A_1 = \frac{1}{2} n A'_{(1)}$$

Porem, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 2$ , he  $(n-1)$  numero inteiro positivo  $> 1$ , e por consequencia (Theor. II.)

$A'_{(1)} = 0$ ; logo tambem  $A_1 = 0$ . Mas sendo  $n = 2$ , he  $(n-1) = 1$ ; e pelo mesmo Theorema he  $A'_{(1)} = 1$ , valor

que substituido na expressaõ de  $A_1$ , mostra que he neste caso particular

$$A_1 = \frac{2 \cdot 1}{2}.$$

*Theorema VII.*

Se os termos da serie, que resulta da multiplicaçãõ ordenada dos coefficients do binomio  $(1-x)^n$  pelos termos da serie dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por  $n$ , o segundo por  $(n-1)$ , o terceiro por  $(n-2)$ , e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações serã nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 3$ , e serã  $= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$ , sendo  $n = 3$ .

*Demonstraçãõ.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

cuja somma represento por  $A'_1$ , e a qual se resolve evidentemente nas duas

$$\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 1 \cdot 2} + \&c.$$

a som-

a somma da primeira das quaes he  $= n A_1$ , e a da segunda  $= n A_1^{(1)}$ , donde se conclue que he

$$A_1'' = n (A_1 + A_1^{(1)})$$

porém cada huma d'estas sommas  $A_1$  e  $A_1^{(1)}$ , he nulla pelo Theorema antecedente, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 3$ , e por consequencia he tambem  $A_1'' = 0$ . Mas sendo sendo  $n = 3$  he  $n - 1 = 2$ , e pelo mesmo Theorema antecedente he  $A_1 = 0$ , e  $A_1^{(1)} = \frac{2 \cdot 1}{2}$ : logo neste caso particular ferá

$$A_1'' = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2}.$$

#### Theorema VIII.

Se os termos da serie, que resulta da multiplicação ordenada dos coefficientes do binomio  $(1-x)^n$  pelos termos da serie dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos quadrados dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por  $n^2$ , o segundo por  $(n-1)^2$ , o terceiro por  $(n-2)^2$ ; e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações ferá nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 4$ , e ferá  $= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$  sendo  $n = 4$ .

#### Demonstração.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^3(n-1)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

cuja

cuja somma represento por  $A_1^{2'}$ , e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)}{2 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^2(n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^2(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he  $= n A_1^{1'}$ , e da segunda  $= n A_{(1)}^{1'}$ , donde se conclue que he

$$A_1^{2'} = n \left( A_1^{1'} + A_{(1)}^{1'} \right)$$

Porém, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 4$ , he  $(n-1)$  numero inteiro positivo  $> 3$ , e pelo Theorema antecedente he  $A_1^{1'} = 0$ , e  $A_{(1)}^{1'} = 0$ , e por consequencia tambem

$A_1^{2'} = 0$ , e  $A_{(1)}^{2'} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$ ; valores, que substituidos na expressão  $A_1^{2'}$  mostraõ que he neste caso particular.

$$A_{(1)}^{2'} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2}.$$

#### Theorema IX.

Se os termos da serie, que resulta da multiplicação ordenada dos coefficients do binomio  $(1-x)^n$  pelos termos da serie dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos cubos dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por  $n^3$ , o segundo por  $(n-1)^3$ , o terceiro por  $(n-2)^3$ , e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 5$ ; e será  $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$ , sendo  $n = 5$ .

De-

*Demonstração.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \dots$$

$$n^1 + (n-1)^3 + (n-2)^5 + \dots$$

se obtem a serie

$$\frac{n^4(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^4(n-2)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \dots$$

cuja somma represento por  $A_1^{i'}$ , e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^4(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)^3(n-2)}{2 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^3(n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \dots$$

$$\frac{n(n-1)^3(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3(n-4)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \dots$$

a somma da primeira das quaes he  $= n A_1^{2'}$ , e a da segunda  $= n A_1^{2'}$ , donde se segue que he

$$A_1^{i'} = n \left( A_1^{2'} + A_1^{2'}$$

Porém, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 5$ , cada huma d'estas sommas he nulla pelo Theorema antecedente, e por tanto será tambem  $A_1^{i'} = 0$ . Mas sendo  $n = 5$ , he  $n - 1 = 4$ , e pelo mesmo Theorema he  $A_1^{2'} = 0$ ; e  $A_1^{2'} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$ , valores que substituidos na expressão de  $A_1^{i'}$ , mostraõ que neste caso particular he

$$A_1^{i'} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2}.$$

*Corollario.*

Attendendo á natureza, e analogia do processo das

Demonstrações dos tres Theoremas precedentes podere-  
mos concluir em geral » Que se os termos da serie, que  
» resulta da multiplicação ordenada dos coefficients do  
» binomio  $(1 - x)^n$  pelos termos da serie dos numeros  
» triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos ter-  
» mos da serie das potencias do gráo  $m$  dos numeros na-  
» turaes, a saber, o primeiro por  $n^m$ , o segundo por  
»  $(n-1)^m$ , o terceiro por  $(n-2)^m$ , e assim successiva-  
» mente a somma  $A_1$  dos termos da serie

$$\frac{n^{m+1} (n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^{m+1} (n-2)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{m+1} (n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

» resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  nu-  
» mero inteiro positivo  $> m+2$ , e que sendo  $m = n+2$   
» será

$$\frac{n^{n-1} (n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^{n-1} (n-2)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{n-1} (n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

» ou

$$A_1^{(n-2)} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = \frac{A^{n'}}{2}.$$

#### Theorema X.

Se os termos da serie dos coefficients do binomio  
 $(1 - x)^n$  se multiplicarem ordenadamente pelos termos da  
serie dos quadrados dos numeros triangulares, a saber, o  
primeiro por  $\frac{n^2(n-1)^2}{2^2}$ , o segundo por  $\frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2^2}$ ,  
o terceiro por  $\frac{(n-2)^2(n-3)^2}{2^2}$ , e assim successivamente a  
somma dos termos da serie resultante d'estas multiplica-  
ções será nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 4$ , e  
será  $= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2}$  sendo  $n = 4$ .

De-

*Demonstração.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.$$

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} + \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2^2} + \frac{(n-2)^2(n-3)^2}{2^2} + \frac{(n-3)^2(n-4)^2}{2^2} + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

cujá somma represento por  $A_2$ , e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he  $= \frac{n^2}{2^2} A_{(1)}^{2'}$ , e a da segunda  $= \frac{n(n-1)}{2^2} A_{(2)}^{2'}$ , donde se segue que he

$$A_2 = \frac{n^2}{2^2} A_{(1)}^{2'} + \frac{n(n-1)}{2^2} A_{(2)}^{2'}$$

Porém, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 4$ , he  $n-2$  numero inteiro positivo  $> 2$ , e por tanto pelo Theorema III.

$A_{(1)}^{2'} = 0$ , e  $A_{(2)}^{2'} = 0$ , donde se conclue, que será tambem

$A_2 = 0$ . Mas sendo  $n = 4$ , he pelo mesmo Theorema

$A_{(1)}^{2'} = 0$ , e  $A_{(2)}^{2'} = 2 \cdot 1$ , valores que substituidos na expressão de  $A_2$  mostraõ, que neste caso particular he

$$A_2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2}$$

*Theo-*

## Theorema XI.

Se os termos da serie, que resulta da multiplicação ordenada dos coefficients do binomio  $(1 - x)^n$  pelos termos da serie dos quadrados dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos numeros naturaes, a saber, o primeiro por  $n$ , o segundo por  $(n - 1)$ , o terceiro por  $(n - 2)$ , e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 5$ , e será  $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2}$ , sendo  $n = 5$ .

## Demonstração.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \dots$$

$$n + (n-1) \quad + (n-2) \quad + \dots$$

se obtem a serie

$$\frac{n^5(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^3(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \dots$$

cuja somma represento por  $A_2'$ , e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^3(n-1)^2}{2^2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \dots$$

$$\frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \dots$$

a somma da primeira das quaes he  $= n A_2$ , e a da segunda  $= n A_2$ , donde se segue que he

$$A_2' = n \left( A_2 + \binom{A_2}{1} \right)$$

Porém, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 5$ , he  $(n-1)$   
nu-

numero inteiro positivo  $> 4$ , e por tanto pelo Theorema antecedente he  $A_2 = 0$ , e  $A_{(1)} = 0$ ; e por consequencia tambem  $A_2 = 0$ . Mas sendo  $n = 5$ , he  $n - 1 = 4$ , e pelo mesmo Theorema  $A_2' = 0$ , e  $A_{(1)} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2}$ , valores que substituidos na expressaõ de  $A_2''$  mostraõ, que he neste caso particular

$$A_2'' = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3}.$$

*Theorema XII.*

Se os termos da serie, que resulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio  $(1 - x)^n$  pelos termos da serie dos quadrados dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos quadrados dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por  $n^2$ , o segundo por  $(n - 1)^2$ , o terceiro por  $(n - 2)^2$ , e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações ferá nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 6$ , e ferá  $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3}$ , sendo  $n = 6$ .

*Demonstração.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^4(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^4(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

cuja somma, seguindo a analogia estabelecida, represento por  $A_2''$ , e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^4 (n-1)^2}{2^2} - \frac{n^2 (n-1)^3 (n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n^2 (n-1)(n-2)^3 (n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^3 (n-2)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)^3 (n-3)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3 (n-4)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he  $= n A_2^{1'}$ , e a da segunda  $= n A_{(1)}^{1'}$ , donde se segue que he

$$A_2^{2'} = n \left( A_2^{1'} + A_{(1)}^{1'} \right)$$

Porém, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 6$ , he  $n-1$  numero inteiro positivo  $> 5$ , e pelo Theorema antecedente he  $A_2^{1'} = 0$ , e  $A_{(1)}^{1'} = 0$ , donde se conclue, que he tambem  $A_2^{2'} = 0$ . Mas sendo  $n = 6$ , he  $n-1 = 5$ , e pelo mesmo Theorema  $A_2^{1'} = 0$ , e  $A_{(1)}^{1'} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2}$ , valores que substituidos na expressão de  $A_2^{2'}$  mostraõ, que he neste caso particular.

$$A_2^{2'} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2}.$$

*Theorema XIII.*

Se os termos da serie, que resulta da multiplicação ordenada dos coefficients do binomio  $(1-x)^n$  pelos termos da serie dos quadrados dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos cubos dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por  $n^3$ , o segundo por  $(n-1)^3$ , o terceiro por  $(n-2)^3$ , e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 7$ , e será  $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2}$ , sendo  $n = 7$ .

*De-*

*Demonstração.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n^2 (n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^2 (n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2 (n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} + \dots$$

$$n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + \dots$$

se obtem a serie

$$\frac{n^5 (n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^5 (n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^5 (n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \dots$$

cujá fomma represento por  $A_2^{i'}$ , e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^5 (n-1)^2}{2^2} - \frac{n^2 (n-1)^4 (n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n^2 (n-1)(n-2)^4 (n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \dots$$

$$\frac{n(n-1)^4 (n-2)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)^4 (n-3)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^4 (n-4)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \dots$$

a fomma da primeira das quaes he  $= n A_2^{2'}$ , e a da segunda  $= n A_2^{2'}$ , donde se segue que he

$$A_2^{i'} = n ( A_2^{2'} + A_2^{2'} )$$

Porém, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 7$ , as duas fommam  $A_2^{2'}$ , e  $A_2^{2'}$  faõ nullas, e por tanto he tambem  $A_2^{i'} = 0$ ,

Mas sendo  $n=7$ , he  $n-1=6$ , e pelo mesmo Theorema he  $A_2^{2'} = 0$ , e  $A_2^{2'} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2}$ , donde se conclue, que neste caso particular he

$$A_2^{i'} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2}$$

*Corollario.*

Attendendo á natureza e analogia do processo das Demonstrações dos tres Theoremam antecedentes, podemos concluir em geral » Que se os termos da serie, que reful-

» ta

» ta da multiplicação ordenada dos coefficients do bino-  
 » mio  $(1-x)^n$  pelos termos da serie dos quadrados dos  
 » numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente  
 » pelos termos da serie das potencias do gráo  $m$  dos nu-  
 » meros naturaes; a saber, o primeiro por  $n^m$ , o segundo  
 » por  $(n-1)^m$ , o terceiro por  $(n-2)^m$ , e assim succes-  
 » sivamente a somma  $A_2^{m_i}$  dos termos da serie

$$\frac{n^{m+2} (n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^{m+2} (n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{m+2} (n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

» resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  nu-  
 » mero inteiro positivo  $> m+4$ , e que sendo  $n = m+4$ ,  
 » será

$$\frac{n^{n-2} (n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^{n-2} (n-3)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{n-2} (n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

» ou

$$A_2^{(n-4)_i} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2} = \frac{A^{n_i}}{2^2}$$

#### Theorema XIV.

Se os termos da serie dos coefficients do binómio  $(1-x)^n$  se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos cubos dos numeros triangulares; a saber, o primeiro por  $\frac{n^3 (n-1)^3}{2^3}$ , o segundo por  $\frac{(n-1)^3 (n-2)^3}{2^3}$ , o terceiro por  $\frac{(n-2)^3 (n-3)^3}{2^3}$ , e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 6$ , e será  $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3}$ , sendo  $n = 6$ .

*Demon-*

*Demonstração.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.$$

$$\frac{n^1(n-1)^3}{2 \cdot} + \frac{(n-1)^3(n-2)^3}{2 \cdot} + \frac{(n-2)^3(n-3)^3}{2 \cdot} + \frac{(n-3)^3(n-4)^3}{2 \cdot} + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2 \cdot} - \frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

cuja somma represento por  $A_3$ , e a qual se poderia semelhantemente obter multiplicando ordenadamente as duas seguintes

$$\frac{n(n-1)^3}{2 \cdot} - \frac{n(n-1)(n-2)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \&c.$$

e que por tanto, pela repetição do artificio praticado nas Demonstrações dos Theoremas antecedentes, se resolve nas tres seguintes

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2 \cdot} - \frac{n^3(n-1)(n-2)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n^3(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{2n^2(n-1)(n-2)^3}{2 \cdot} - \frac{2n^2(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2 \cdot 1} + \frac{2n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2 \cdot} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^3}{2 \cdot 1} + \&c.$$

A somma da primeira das quaes he  $= \frac{n^3}{2 \cdot} A_{(1)}^{3'}$ , a da segunda

$= \frac{2n^2(n-1)}{2 \cdot} A_{(2)}^{3'}$ , a da terceira  $= \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot} A_{(3)}^{3'}$ ,

donde se segue que he

$$A_3 = \frac{n^3}{2 \cdot} A_{(1)}^{3'} + \frac{2n^2(n-1)}{2 \cdot} A_{(2)}^{3'} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot} A_{(3)}^{3'}$$

Porém, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 6$ , he  $n - 3$  numero inteiro positivo  $> 3$ , e por tanto pelo Theorema IV. he  $A_{(1)}' = 0$ ,  $A_{(2)}' = 0$ , e  $A_{(3)}' = 0$ , e por consequencia tambem  $A_3 = 0$ . Mas sendo  $n = 6$ , he  $n - 3 = 3$ , e pelo mesmo Theorema he  $A_{(1)}' = 0$ ,  $A_{(2)}' = 0$ ,  $A_{(3)}' = 3 \cdot 2 \cdot 1$ , valores, que substituidos na expressão de  $A_3$  mostraõ, que neste caso particular he

$$A_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3}$$

*Theorema XV.*

Se os termos da serie, que resulta da multiplicação ordenada dos coefficients do binomio  $(1 - x)^n$  pelos termos da serie dos cubos dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por  $n$ , o segundo por  $(n-1)$ , o terceiro por  $(n-2)$ , e assim successivamente, a somma da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 7$ , e será  $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3}$ , sendo  $n = 7$ .

*Demonstração.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n^3 (n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^3 (n-2)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3 (n-3)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$n + (n-1) \quad + (n-2) \quad + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^4 (n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^4 (n-2)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^4 (n-3)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

cuja somma represento por  $A_3''$ , e a qual se resolve evidentemente nas duas

$$\frac{n^4 (n-1)^3}{2^3}$$

$$\frac{n^4(n-1)^3}{2 \cdot} - \frac{n^2(n-1)^3(n-2)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^3(n-3)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2 \cdot} - \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3(n-4)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he =  $n A_3$ , e a segunda =  $n A_3$ , donde se segue que he

$$A_3'' = n (A_3 + A_3^{(1)})$$

Porém, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 7$ , he pelo Theorema antecedente  $A_3 = 0$ , e  $A_3^{(1)} = 0$ , por ser  $n-1 > 6$ ,

logo tambem será  $A_3'' = 0$ . Mas sendo  $n=7$ , he  $n-1=6$ , e pelo mesmo Theorema he  $A_3 = 0$ , e  $A_3^{(1)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot}$ , va-

lores que sendo substituidos na expressão de  $A_3''$  mostraõ, que neste caso particular he

$$A_3'' = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot}$$

*Theorema XVI.*

Se os termos da serie, que resulta da multiplicação ordenada dos coefficients do binomio  $(1-x)^n$  pelos termos da serie dos cubos dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos quadrados dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por  $n^2$ , o segundo por  $(n-1)^2$ , o terceiro por  $(n-2)^2$ , e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 8$ , e será =  $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot}$ , sendo  $n=8$ .

*Demonstração.*

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2 \cdot}$$

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2 \cdot 2} - \frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-2)(n-2)^3(n-3)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^5(n-1)^3}{2 \cdot 2} - \frac{n(n-1)^5(n-2)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^5(n-3)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

cuja somma represento por  $A_3^2$ , e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^5(n-1)^3}{2 \cdot 2} - \frac{n^2(n-1)^4(n-2)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^4(n-3)^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^4(n-2)^3}{2 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^4(n-4)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he  $= nA_3^1$ , e a da segunda  $= nA_3^{1'}$ , donde se segue que he

$$A_3^2 = n \left( A_3^1 + A_3^{1'} \right)$$

Porém, sendo  $n$  numero inteiro positivo  $> 8$ , he  $n-1$  numero inteiro positivo  $> 7$ , e por tanto pelo Theorema antecedente he  $A_3^{1'} = 0$ , e  $A_3^{1'} = 0$ , e por consequencia he tambem  $A_3^2 = 0$ . Mas sendo  $n = 8$ , he  $n-1 = 7$ , e pelo mesmo Theorema  $A_3^1 = 0$ , e  $A_3^{1'} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$ , valores que substituidos na expressão de  $A_3^2$  mostraõ, que he neste caso particular

$$A_3^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$$

Corol-

*Corollario.*

A marcha do Calculo no processo das Demonstrações dos Theoremas antecedentes affás claramente mostra, que sem necessidade de acumular mais Theoremas a elles analogos podemos concluir em geral „ Que se os termos da serie, que resulta da multiplicação ordenada dos coeffi-  
 „ cientes do binomio  $(1-x)^n$  pelos termos da serie dos  
 „ cubos dos numeros triangulares, se multiplicarem orde-  
 „ nadamente pelos termos da serie das potencias do gráo  
 „  $m$  dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por  $n^m$ ,  
 „ o segundo por  $(n-1)^m$ , o terceiro por  $(n-2)^m$ , e af-  
 „ fim successivamente, a somma  $A_3$  dos termos da serie

$$\frac{n^{m+3} (n-1)^3}{2 \cdot} - \frac{n^{m+3} (n-1)^3 (n-2)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n^{m+3} (n-1)(n-2)^3 (n-3)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

„ resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  nu-  
 „ mero inteiro positivo  $> m + 6$ , e que sendo  $n = m + 6$ ,  
 „ será

$$\frac{n^{n-3} (n-1)^3}{2 \cdot} - \frac{n^{n-3} (n-1)^3 (n-2)^3}{2 \cdot 1} + \frac{n^{n-3} (n-1)(n-2)^3 (n-3)^3}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

„ ou

$$A_2^{(n-6)'} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot} = \frac{A^{n''}}{2 \cdot}$$

*Conclusão.*

Comparando o processo do Calculo nas Demonstrações dos Theoremas VI, X, e XIV podemos tambem concluir em geral. „ Que multiplicando ordenadamente os coeffi-  
 „ cientes do binomio  $(1-x)^n$  pelos termos de serie das  
 „ potencias do gráo  $k$  dos numeros triangulares; a saber,  
 „ o primeiro por  $\frac{n(n-1)^k}{2 \cdot}$ , o segundo por  $\frac{(n-1)(n-2)^k}{2 \cdot}$ ,

» o terceiro por  $\frac{(n-2)^k (n-3)^k}{2^k}$ , e assim successivamente, a

» somma  $A^k$  dos termos da serie

$$\frac{n^k (n-1)^k}{2^k} - \frac{n(n-1)^k (n-2)^k}{2^k \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^k (n-3)^k}{2^k \cdot 1 \cdot 2} + \&c.$$

» resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  nu-  
» mero inteiro positivo  $> 2k$ , e que sendo  $n = 2k$ , será

$$A^k = \frac{2k(2k-1)(2k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^k}.$$

Semelhantemente poderemos concluir, attendendo á natu-  
reza e processo das Demonstrações dos outros Theoremas  
desde o Theorema XIV até ao Theorema XVI » Que fe  
» os termos da serie, que resulta da multiplicaçõ or-  
» denada dos coefficients do binomio  $(1-x)^n$  pelos ter-  
» mos da serie das potencias do gráo  $k$  dos numeros trian-  
» gulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da  
» serie das potencias do gráo  $m$  dos numeros naturaes,

» a somma  $A^{k+m}$  dos termos da serie

$$\frac{n^{k+m} (n-1)^k}{2^k} - \frac{n(n-1)^{k+m} (n-2)^k}{2^k \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{k+m} (n-3)^k}{2^k \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

» resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo  $n$  nu-  
» mero inteiro positivo  $> 2k + m$ , e que sendo  $n = 2k + m$ ,  
» será

$$\frac{n^{n-k} (n-1)^k}{2^k} - \frac{n(n-1)^{n-k} (n-2)^k}{2^k \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{n-k} (n-3)^k}{2^k \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

» ou

$$A^k \stackrel{(n-2k)_1}{=} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^k} = \frac{A^{n_1}}{2^k}$$

Ap-

Appliquação.

Se na expressão de  $d^n F_\varphi$  na supposição de  $d\varphi$  constante, se substitue  $F(\varphi + nt d\varphi + \frac{n(n-1)}{2} t^2 dd\varphi)$  em lugar de  $F(\varphi + nt d\varphi)$ ;  $F(\varphi + (n-1)t d\varphi + \frac{(n-1)(n-2)}{2} t^2 dd\varphi)$  em lugar de  $F(\varphi + (n-1)t d\varphi)$ , e assim semelhantemente em todos os outros termos, de que consta o seu numerador, teremos a expressão de  $d^n F_\varphi$  na supposição de  $dd\varphi$  constante. Mas desenvolvendo em serie cada hum dos ditos termos, teremos

$$F\left(\varphi + nt d\varphi + \frac{n(n-1)}{2} t^2 dd\varphi\right) = F\varphi + n P^1 t d\varphi + n^2 P^2 t^2 d\varphi^2 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} P'' t^2 dd\varphi + \frac{2n^2(n-1)}{2} P^{2'} t^3 d\varphi dd\varphi + \dots$$

$$+ \frac{n^2(n-1)^2}{2^2} P^{2''} t^4 dd\varphi^2 + \dots$$

$$+ \left. \begin{aligned} & n^{n-1} P^{(n-1)'} t^{n-1} d\varphi^{n-1} + n^n P^{n'} t^n d\varphi^n + \&c. \\ & (n-1) \frac{n^{n-1}(n-1)}{2} P^{(n-1)''} t^n d\varphi^{n-2} dd\varphi + n \frac{n^n(n-1)}{2} P^{n''} t^{n+1} d\varphi^{n-1} dd\varphi + \&c. \\ & + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \frac{n^{n-1}(n-1)^2}{2^2} P^{(n-1)'''} t^{n+1} d\varphi^{n-3} dd\varphi^2 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{n^n(n-1)^2}{2^2} P^{n'''} t^{n+2} d\varphi^{n-2} dd\varphi^2 + \&c. \end{aligned} \right\}$$

+ &c. + &c.



formando em todas estas expressões os termos, que se correspondem em cada columna; isto he aquelles, que em cada columna se acharem ter por factor huma mesma potencia de  $t$ , teremos

$$\begin{aligned}
 t^n d^n F \varphi &= A F \varphi + A^{1'} P^{1'} t d\varphi + A^{2'} P^{2'} t^2 d\varphi^2 + \dots + A^{n'} P^{n'} t^n d\varphi^n + \&c. \\
 &+ A^1 P^1 t^2 dd\varphi + 2 A^1 P^2 t^1 d\varphi dd\varphi + \dots + \frac{n}{1} A^1 (n-1)' P^{n-1}' t^{n+1} d\varphi^{n-1} dd\varphi + \&c. \\
 &+ A^2 P^2 t^4 dd\varphi^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{1.2} A^2 (n-2)' t^{n+2} d\varphi^{n-2} dd\varphi^2 + \&c. \\
 &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} A^3 (n-3)' t^{n+3} d\varphi^{n-3} dd\varphi^3 + \&c. \\
 &+ \&c.
 \end{aligned}$$

Mas todos os termos, em que  $t$  se acha elevado a huma potencia menor do que  $n$ , são nullos pelos Theoremas antecedentes; isto he, são nullos todos os termos da primeira linha, que se achão antes de  $A^{n'} P^{n'} t^n d\varphi^n$  por ser

$A = 0$ ,  $A^{1'} = 0 \dots A^{(n-1)'} = 0$ . São nullos todos os termos da segunda linha, que antecedem o termo  $(n-1) A^1$

$P^{(n-1)'} t^n d\varphi^{n-2} dd\varphi$  por ser  $A^1 = 0$ ,  $A^2 = 0 \dots A^{(n-3)'} = 0$ . Semelhantemente são nullos todos os termos da terceira linha, que antecedem o termo  $\frac{(n-2)(n-3)}{2} A^2 P^{(n-4)'} d\varphi^{(n-2)'}$

$t^n d\varphi^{n-4} dd\varphi^2$ ; e assim por diante. Ora dividindo ambos os membros d'esta Equação por  $t^n$ , e suppondo depois  $t = 0$ , todos os termos subseqüentes aos mencionados, isto he, todos os termos, em que  $t$  se acha elevado a potencias mais altas do que  $n$ , se aniquillão; e por tanto fica

$$d^n F\varphi = A_1 P^{n'} d\varphi^n + \frac{n-1}{1} A_1^{(n-2)'} P^{(n-1)'} d\varphi^{n-2} dd\varphi + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} A_2^{(n-4)'} P^{(n-2)'} d\varphi^{n-4} dd\varphi^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_3^{(n-6)'} P^{(n-3)'} d\varphi^{n-6} dd\varphi^3 + \&c.$$

Expressão que tambem se pode escrever d'esta forte

$$d^n F\varphi = A_1^{n'} \left( P^{n'} d\varphi^n + \frac{(n-1)}{2 \cdot 1} P^{(n-1)'} d\varphi^{n-2} dd\varphi + \frac{(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} P^{(n-2)'} d\varphi^{n-4} dd\varphi^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} P^{(n-3)'} d\varphi^{n-6} dd\varphi^3 + \&c. \right)$$

$$\text{por ser } A_1^{(n-2)'} = \frac{A_1^{n'}}{2}; \quad A_2^{(n-4)'} = \frac{A_1^{n'}}{2^2}; \quad A_3^{(n-6)'} = \frac{A_1^{n'}}{2^3}; \quad \&c.;$$

ou tambem assim

$$d^n F\varphi = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)(n-1)n \left( P^{n'} d\varphi^n + \frac{(n-1)}{2 \cdot 1} P^{(n-1)'} d\varphi^{n-2} dd\varphi + \frac{(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} P^{(n-2)'} d\varphi^{n-4} dd\varphi^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} P^{(n-3)'} d\varphi^{n-6} dd\varphi^3 + \&c. \right)$$

por ser  $A_1^{n'} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)(n-1)n$ . Formula, que publiquei sem demonstração na minha já citada Memoria sobre os verdadeiros Principios do Methodo das Fluxões, e que não seria facil deduzir por indução dos resultados particulares achados pelas successivas hypothefes de  $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$ ,  $n=4$  &c.

*Escolio.*

O caminho, que segui para achar as formulas geraes das Fluxões na supposição de  $d\varphi$  constante, e de  $dd\varphi$  constante, pôde conduzir igualmente ao descobrimento de

For-

Formulas semelhantes para o caso de se suppor constante outra qualquer Fluxão de  $\varphi$  : mas os processos do calculo , supposto que analogos , serão muito mais extensões pelo grande numero de proposições , que será preciso primeiro demonstrar : facil he porém de ver , que tudo se reduzirá a examinar em que caso se torna nulla a somma de huma serie , cujos termos são produzidos pela multiplicação successiva de cada hum dos coefficients do binomio  $(1-x)^n$  pelos termos de qualquer serie de potencias dos numeros naturaes , e dos numeros figurados ; e qual he o valor da somma da dita serie no primeiro caso , em que , segundo os successivos valores de  $n$  , ella deixa de ser nulla. A primeira parte d'esta indagação admite huma solução facil ; por quanto com pouca reflexão se vê , que considerando os numeros naturaes como quantidades de huma só dimensão , os numeros triangulares como quantidades de duas dimensões , os piramidais como quantidades de tres dimensões , e assim successivamente , em quanto  $n$  fôr maior que a somma das dimensões de cada termo da serie em questão , a somma d'esta será nulla. Tambem não he difficil de ver , que o primeiro caso , em que ella deixará de ser nulla , será quando  $n$  fôr igual ao numero das dimensões dos termos da dita serie : achar porém qual seja o valor da somma nesse caso particular , he justamente em que reside a difficuldade da questão , e o que se não póde determinar antecipadamente sem o soccorro do Calculo. Como a solução d'esta questão nos não offerece utilidade sensivel , e immediata , por isso nos contentamos com ter aberto a carreira para ella , de maneira que qualquer a possa seguir sem difficuldade , huma vez que entenda ser util adiantar mais algum passo nesta materia.

## OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS.

Feitas no Real Collegio de Mafra

POR D. JOAQUIM DA ASSUMPÇÃO VELHO.

*Observação do Eclipse total da Lua de 10 de Setembro de 1783.*

O Ceo claro e limpo ao principio da noite prometia huma observação desembaraçada e seguida; mas hum vento brando de S.O. espalhou pelo Ceo algumas nevoas altas, e nuvens espessas, que embaraçaram principalmente no meio, e fim da observação, o fazella completamente. A pendula estava perfeitamente regulada pelo tempo medio, verificada por muitas observações anteriores, e ultimamente rectificada por huma boa Mercediana no mesmo dia da observação, e no seguinte. O Sñr. Jeronymo Allen, Missionario Inglez do Collegio de S. Pedro, e S. Paulo de Lisboa, bem conhecido pelas suas luzes nas Sciencias Fysicas, e Mathematicas, veio de proposito ao meu Gabinete para ter parte na observação: e o Illustrissimo Sñr. D. Domingos José Xavier de Lima Telles, Cavalheiro da Ordem de Malta, e Tenente da Armada Real, se dignou ajudarnos com hum zelo bem distincto, e proprio da sua applicação a semelhantes observações. O Sñr. Allen, e eu observamos separadamente por dous Oculos Achromaticos de M. Dollond., o do Sñr. Allen tem a lente objectiva de duas pollegadas de abertura, e tres pés e meio de foco, o meu tem a mesma lente de  $2\frac{1}{4}$  pollegadas de abertura, e cinco pés de foco: a nossa observação separada foi inteiramente concorde naquelles pontos, que ambos marcamos: e ella junta hé como se segue

Tem-

Tempo da Pendula.

- 9<sup>h</sup> 2' 3" Principio certo da Penumbra.  
 9 5 7 Distingua-se bem a Penumbra nas vizinhanças de Grimaldus ,  
 e pelo que se podia julgar , a direção desta Penumbra era  
 de L.E.  $\frac{1}{4}$  S.E. a respeito do Disco Lunar.  
 9 7 41 Toca a sombra no Disco da Lua , e principia a immerção.  
 9 7 49 Chega a Penumbra a Grimaldus , e Aristarcho.  
 9 11 27 Principia a immerção de Kepleio.  
 9 13 0 Total immerção de Aristarcho na Sombra.  
 9 13 12 Principia a immerção de Heraclides.  
 9 14 24 Chega a Penumbra a Copernico.  
 9 20 31 Chega a Sombra a Copernico.  
 9 23 54 Total immerção de Copernico na Sombra.  
 9 26 5 Chega a Penumbra a Tycho.  
 9 28 13 Entra Platao na Sombra.  
 9 29 29 Total immerção de Platao na Sombra.  
 9 35 0 Chega a Sombra a Tycho.  
 9 37 33 Total immerção de Tycho.  
 9 39 36 Immerção total de Menelao.  
 9 41 20 Immerção total de Plinio.  
 9 48 3 Principia a immerção de Mare Neëtaris.  
 9 54 7 Principia a immerção de Mare Crisium.  
 9 59 28 Immerção total do Mare Crisium.  
 10 5 54 Immerção total do Disco Lunar.

Naõ foi possível observar o estado de apparencia , em  
 que ficava a Lua em todo o tempo da sua Immerção , por  
 causa de hum grande nevoeiro , e algumas nuvens espessas ,  
 que a encobrião inteiramente , e por esta mesma ração se  
 naõ pode determinar bem o principio da Emerção do Dis-  
 co Lunar , e com muito trabalho , e ainda com alguma du-  
 vida he que se poderaõ marcar os pontos seguintes :

- 11' 42" 0 Principiava a Emerção de Grimaldus.  
 11 48 30 Já Grimaldus estava inteiramente fóra da Sombra.  
 11 57 12 Total Emerção de Heraclides.  
 12 9 28 Total Emerção do Copernico.  
 12 46 40 Emerção total do Disco Lunar , e fim do Eclipse.

O fim da Penumbra naõ se pôde observar por causa dos nevoeitos , e  
 nuvens , que sobrevieraõ.

Tom. II.

Oooooo

Obscr-

*Observação do Eclipse total da Lua no dia 3 de Janeiro  
de 1787.*

**A** Noite desta observação foi summamente favoravel: o Ceo conservou-se sempre claro e sereno, e daria toda a occasião a hum Astronomo, bem provido de Instrumentos para muitas observações completas. Eu fiz esta juntamente com hum meu Collega o Sñr. D. Diogo da Annuniação Huet, Professor da Cadeira de Filosofia Racional: o Sñr. Huet usou de hum oculo achromatico de Dollond de  $3\frac{1}{2}$  pés de foco, augmentando o diametro dos objectos 55 vezes: o de que eu usei he igualmente achromatico do mesmo Dollond, e augmenta 22 vezes os objectos. A differente força d'estes dous oculos não foi indifferente á observação; como no progresso da Emerção a sombra veio a ser summamente escura, e espessa, o oculo de maior força não distinguia absolutamente mancha alguma antes da Emerção, o de menos força alcançava sufficientemente muitas das mais notaveis. O tempo foi determinado pelas alturas correspondentes do Sol, tomadas em muitos dias, que precedêraõ, e se seguiraõ ao da observação.

Tempo verdadeiro.

9 <sup>h</sup>	3'	0''	Parece á vista simples que a Lua entra na Penumbra.
9	12	0	Já o Limbo oriental da Lua se vê muito offuscado.
9	20	16	Parece principiar a Immerção da Lua na Sombra.
9	21	13	Principio certo da Immerção.
9	23	41	Grimaldus principia a entrar na Sombra.
9	24	59	Grimaldus entra inteiramente na Sombra.
9	26	54	} Galileo.
9	28	19	
9	32	24	} Keplero.
9	33	21	
9	33	52	} Aristarco.
9	36	6	

Tempo verdadeiro.

9<sup>h</sup> 40' 18'' } Copernico.  
9 42 46 }

9 43 50 } Tycho.  
9 45 27 }

9 55 56 } Platao.  
9 57 1 }

9 57 1 } Mare serenitatis.  
10 6 19 }

10 2 38 } Eudoxo.  
10 3 34 }

10 3 0 } Aristoteles.  
10 4 31 }

10 13 58 } Mare Crisium.  
10 18 36 }

10 21 4 Immerfaõ total da Lua.

Foi muito difficiloso determinar o verdadeiro principio da Immerfaõ, porque se naõ podiaõ observar bem os limites entre a sombra, e a penumbra: as primeiras manchas fõraõ ainda marcadas com alguma duvida, pela mesma razaõ. No progresso da Immerfaõ a sombra veio a ser mais bem terminada, e entaõ a Immerfaõ das manchas, e a total da Lua foi marcada mais exactamente. A sombra era summamente escura, e espessa antes da Immerfaõ total. As manchas desapparecêraõ quasi inteiramente pouco tempo depois da sua Immerfaõ.

A Lua ficou visivel, e o seu disco bem terminado em todo o tempo da total Immerfaõ, a sua côr era de hum vermelho escuro, e affoguedo com diferentes ondas escuras, que successivamente foraõ mudando de sitio. Algum tempo antes da Emerfaõ a côr vermelha, que cobria a Lua se desvaneceu taõ consideravelmente, que todas as manchas appareciaõ muito distinctamente, sobre tudo as da parte oriental da Lua, o que fazia duvidar se a Emerfaõ era, ou naõ já principiada: só depois de alguns minutos desta duvida he que conheci os limites da sombra, e que observei o principio da Emerfaõ.

Tem-

Tempo verdadeiro.

11 <sup>h</sup>	59'	26"	Principia a Emerfaõ da Lua.
12	2	42	Grimaldus inteiramente fóra da Sombra.
22	4	12	Galileo total Emerfaõ.
12	6	22	Aristarcho principia a fahir.
12	7	42	Aristarcho fahe inteiramente da Sombra.
12	11	26	Keplero inreiramente fóra da Sombra.
12	20	4	Tycho principia a Emerfaõ.
12	21	22	Tycho total Emerfaõ.
12	23	15	Plaraõ fahe da Sombra.
12	29	20	Eudoxo principia a apparecer.
12	29	57	Eudoxo apparece de todo.
12	54	7	Mare Crisium total Emerfaõ.
12	56	30	Total Emerfaõ da Lua.

Depois de principiar a Emerfaõ a côr avermelhada da Lua se mudou para hum finzento escuro , que foi augmentando gradualmente com o progresso da Emerfaõ , formando-se cada vez mais negra , e espessa.

## NOTICIA DAS OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS

*Feitas em o anno de 1790*

POR CUSTODIO GOMES DE VILLAS-BOAS.

**E**Ste anno foi pouco fertil de observações; porque de quatro Eclipses do Sol que houverão, o que succede raras vezes, nenhum foi visivel no nosso horizonte. Houveraõ mais dois Eclipses da Lua, que ambos fôraõ visiveis em Lisboa, e em toda a Europa; mas não podemos observar se não o de 28 de Abril, que esteve huma noite excellente para isso; porém descontamos depois esta fortuna a 22 de Outubro, que era a noite do segundo, a qual esteve encuberta, e carregada de nuvens, nevoa, e chuva, de forte que apenas se pôde conhecer que a Lua se eclipsara.

As observações dos Satellites de Jupiter tambem fôraõ poucas; porque nos mezes de Julho, Agosto, Setembro, e Outubro, que são os melhores para as observações, andava o planeta muito perto do Sol, e não se podiaõ vêr os Satellites; nem ainda o mesmo Planeta nos mezes de Agosto, e Setembro, em que esteve em conjunção a 4 deste ultimo. Os outros Planetas não estavaõ em circumstancias de nos darem que fazer, e das Estrellas fizemos algumas observações, que varios expôr juntamente com as outras pela ordem chronologica, porque fôraõ feitas, e expostas em tempo verdadeiro como os mais annos. Fôraõ feitas com os mesmos instrumentos, e a pendula regulada da mesma maneira por alturas correspondentes, como difemos no frontespicio das observações, que imprimimos nas Ephemerides de 1791.

*Tom. II.*

Pppppp

Al-

Algumas observações de Saturno, que pertencem a este anno, já fóraõ publicadas nas mesmas Ephemerides, e por isso não fazemos aquí mençaõ dellas.

*Observações de 1790.*

EM JANEIRO.

A 5	Imm. do 2. <sup>o</sup> Satellite de Jupiter	ás . . .	9 <sup>h</sup>	54'	13"
25	Imm. do 1. <sup>o</sup> Satellite de Jupiter	as . . .	9	10	11

EM MARÇO.

A 10	Em. do 2. <sup>o</sup> Satellite de Jupiter	ás . . .	12	0	33
	Boa observação.				
12	Em. do 1. <sup>o</sup> Satellite de Jupiter	ás . . .	11	50	32
14	Em. do mesmo Satellite	. . . ás . . .	6	19	28
26	Em. de $\kappa$ de $\epsilon_9$ no limb. lum. da Lua	ás . . .	7	8	2

algum tanto duvidosa; porque quando vi a Estrella já estava fóra da Lua.

A 22 as duas Immersões do 3.<sup>o</sup> Satellite de Jupiter, que deviaõ acontecer a 15, e a 22, ambas observei com cuidado, e nenhuma pude vêr, de que infiro que o Satellite estava detraz do planeta, quando entrou na sombra, e a de 15 succedeu muito antes do tempo em que a dava o calculo; isto he, ás 10 hor. e 30 min. com pouca differença.

EM ABRIL.

*A 28 Observação do Eclipse da Lua.*

Principio da Penumbra	ás . . . . .	9 <sup>h</sup>	16'	10"
Penumb. mais forte	ás . . . . .	9	31	10
Julguei ter começado o Eclipse	ás . . . . .	9	33	57
Começa a Imm. de Keplero	ás . . . . .	9	39	18
Começa a Imm. de Mare humorum A	ás . . . . .	9	48	39
Imm. de Mare nubium B	ás . . . . .	9	49	1
Imm. total de Plato	17 ás . . . . .	9	54	35
Infula Sinus Medii	19 ás . . . . .	10	3	25

Co-

Começa a Imm. de Tycho ás . . . . .	10 <sup>h</sup>	4'	26"
Imm. total da mesma ás . . . . .	10	6	19
Imm. de hum pònto branco ás . . . . .	10	8	39
Imm. de Mare serenitatis P ás . . . . .	10	15	43
Começa a Imm. de Mare Crisum H ás . . . . .	10	19	41
Imm. de Tarentius 47 ás . . . . .	10	21	40
Imm. total de Mare Crisum ás . . . . .	10	24	38
Imm. total da Lua ás . . . . .	10	31	40

Logo que começou o Eclipse, começou também a Lua a fazer-se côr de fogo, e assim se foi espalhando esta côr até que as 11 horas se achava toda igual, mas a côr era fraca, e deixava vêr perfeitamente a Lua. A noite estava muito clara e serena, soprando huma viração do Norte.

As 11<sup>h</sup> 5' 11" eclipsou-se huma Estrella pequena na parte inferior do Limbo, que custava a vêr. As 11<sup>h</sup> 23' 15" eclipsou-se outra igualmente pequena quasi no mesmo ponto, poucos segundos depois eclipsou-se outra terceira, ainda mais pequena, e pouco mais acima. As 11<sup>h</sup> 59' 46" Imm. de outra Estrella, que parecia da 6.<sup>a</sup> grandeza, pouco mais abaixo donde devia começar o Eclipse. Cinco, ou seis minutos antes disso se fez a Em. da 2.<sup>a</sup>, que perdi por amor daquella.

Começa a Emerfão da Lua ás . . . . .	12 <sup>h</sup>	7'	50"
Em. de Helicon 12 ás . . . . .	12	16	29
Em. de Copernico ás . . . . .	12	20	11
Meio da Em. de Tycho 21 ás . . . . .	12	28	52
Em. de Infula Sinus Medii 19 ás . . . . .	12	40	38
Começa a fahir Mare Crisum ás . . . . .	12	57	41
Acaba de fahir a mesma ás . . . . .	13	1	40
Fim do Eclipse total ás . . . . .	13	5	46
Ainda se vê a Penumbra ás . . . . .	13	7	43
Apenas se vê a Penumbra com oculo, mas ainda he mui sensivel á vista simples ás	13	9	40

## EM MAIO.

A 27 Em. de  $\beta$  de Capricornio ás . . . 7 22 48

mas poderia acontecer mais cedo, porque quando ví a Eitrella já estava fóra, e o Crepusculo era muito forte porque era ao sol posto, mas não me parece que tinha mais de 15" ou 20" de erro.

## EM JUNHO.

A 7 Em. do 2.º Satellite de Jupiter ás . . . 9<sup>h</sup> 0' 1"

Em 22 de Outubro não pude observar o Eclipse da Lua, porque choveu, só perto das 11 horas ví que ella estava já quasi eclipsada de todo.

## EM DEZEMBRO.

A 4 Imm. do 1.º Satellite de Jupiter ás . . . 15<sup>h</sup> 47' 26"



MEMORIAS  
DOS  
CORRESPONDENTES.



## ENSAIO SOBRE AS BRACHYSTOCHRONAS,

E

## REFLEXÕES

*Sobre as Prop. 42, e 76 do II. Tomo da Mechanica de Euler.*

POR FRANCISCO DE PAULA TRAVASSOS.

§. 1. **D**eterminar a linha, que hum moyel sollicitado no vacuo pela propria gravidade deve descrever no menor tempo possivel entre dous pontos naõ exis-  
tentes na mesma vertical, nem horizontal, he o famoso Problema proposto por Joaõ Bernoulli nas Actas de Leipzig em 1696. Os mais célebres Geometras o acháraõ digno das suas meditações: delle com tudo só entaõ apparecêraõ as soluções de Leibnitz, Newton, Jacob Bernoulli, e o Marquez do Hospital, os quaes por caminhos differentes, e particulares acháraõ todos ser a Cycloide a linha pedida.

§. 2. Alguns annos depois por occasiaõ das indagações sobre as Isoperimetas este grande Geometra, e seu irmaõ Jacob Bernoulli estabelecêraõ algumas regras geraes para a soluçãõ dos problemas de semelhante natureza, nos quaes se trata de achar, naõ a maxima ou minima ordenada em huma curva dada, o que se consegue pelos principios ordinarios do Calculo Differential, mas as mesmas curvas, em que certa expressãõ integral indefinida proposta seja hum Maximum, ou Minimum a respeito de todas as outras curvas possiveis.

§. 3. Estas regras assim dispersas fôraõ reduzidas a methodo por Euler na obra intitulada *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes &c.*, em  
Tom. II. A que

que ensina a resolver semelhantes problemas com huma generalidade, a que antes d'elle parecia não poder chegar-se, e depois não haver mais que esperar. Com tudo de la Grange nas Memorias de Turim para 1760, e 1761 offerreco hum methodo puramente analytico, mostrando, que as formulas de Euler não tem a generalidade, que elle dá ás suas, fazendo variar ao mesmo tempo todas as ordenadas, e abscissas da curva em lugar de huma só ordenada: donde resulta, que a curva variada pode não ter ponto algum commum com a curva do Maximum, ou Minimum.

§. 4. Eis-aqui o problema fundamental, e a soluçãõ, que d'elle se acha na Mem. citada.

*Problema.*

» Sendo proposta huma formula integral indefnida re-  
 » presentada por  $\int Z$ , em que  $Z$  designa huma funcão  
 » qualquer determinada das variaveis  $x, y, z$ , &c., e  
 » suas differenças  $dx, dy, dz$ , &c.  $d^2x, d^2y, d^2z$ , &c. &c.,  
 » achar a relaçaõ, que estas variaveis devem ter entre si,  
 » para que a formula  $\int Z$  seja hum Maximum, ou Mi-  
 » nimum?

*Soluçãõ.*

» Segundo o methodo conhecido de *Maximis*, et *Mi-*  
 » *nimis* será preciso differenciar a proposta  $\int Z$ , confide-  
 » rando as quantidades  $x, y, z$ , &c.  $dx, dy, dz$ , &c.  $d^2x$ ,  
 » &c. &c. como variaveis, e fazer a differencial, que re-  
 » sulta, igual a zero. Marcando pois estas variações por  
 »  $\delta$ , se terá a equaçãõ do Maximum, ou Minimum  
 »  $\delta \int Z = 0$ ; ou, o que he equivalente,  $\int \delta Z = 0$ . Ora  
 » seja  $Z$  tal, que

$$\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + r\delta d^3x + \&c.$$

+

”  $+ N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2 y + R\delta d^1 y + \&c.$

”  $+ v\delta z + w\delta dz + \chi\delta d^2 z + \rho\delta d^1 z + \&c.$

”  $+ \&c.$

” virá a equação

”  $\int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2 x + \int r\delta d^1 x + \&c.$

”  $+ \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2 y + \int R\delta d^1 y + \&c.$

”  $+ \int v\delta z + \int w\delta dz + \int \chi\delta d^2 z + \int \rho\delta d^1 z + \&c. = 0.$

” Mas pelos principios do Methodo das variações he

”  $\delta dx = d^1 x$ ,  $\delta d^2 x = d^2 \delta x$ , e assim nas mais expressões;

” além disto pelo methodo das integrações por partes se

” acha

”  $\int p d^1 x = p \delta x - \int dp \delta x$ ;  $\int q d^2 x = q d^1 x - dq \delta x + \int d^2 q \delta x$ ;

”  $\int r d^1 x = r d^2 x - dr \delta x + d^2 r \delta x - \int d^3 r \delta x$ ;

” e assim por diante. Logo a equação precedente se mudará nesta

” (A) . . .  $\int (n - dp + d^2 q - d^3 r + \&c.) \delta x + \int (N - dP +$

”  $d^2 Q - d^1 R + \&c.) \delta y + \int (v - d w + d^2 \chi - d^1 \rho + \&c.) \delta z +$

”  $\&c. + (p - dq + d^2 r - \&c.) \delta x + (q - dr + \&c.) d^1 x +$

”  $(r - \&c.) d^2 x + \&c. + (P - dQ + d^2 R - \&c.) \delta y +$

”  $(Q - dR + \&c.) d^1 y + (R - \&c.) d^2 y + \&c. + (w - d\chi +$

”  $d^2 \rho - \&c.) \delta z + (\chi - d\rho + \&c.) d^1 z + (\rho - \&c.) d^2 z$

”  $+ \&c. = 0$  : donde se tirará primeiramente a equação

” indefinida (B) . . .  $(n - dp + d^2 q - d^3 r + \&c.) \delta x +$

” (N—

$$\begin{aligned}
& \text{» } (N - dP + d^2 Q - d^3 R + \&c.) \delta y + (v - d\omega + d^2 \chi - d^3 \rho + \&c.) \delta z \\
& \text{» } + \&c. = 0; \text{ e depois a equação determinada } (C) \dots \\
& \text{» } (p - dq + d^2 r - \&c.) \delta x + (q - dr + \&c.) d\delta x + (r - \&c.) d^2 \delta x \\
& \text{» } + \&c. + (P - dQ + d^2 R - \&c.) \delta y + (Q - dR + \&c.) d\delta y \\
& \text{» } + (R - \&c.) d^2 \delta y + \&c. + (\omega - d\chi + d^2 \rho - \&c.) \delta z \\
& \text{» } + (\chi - d\rho + \&c.) d\delta z + (\rho - \&c.) d^2 \delta z + \&c. = 0.
\end{aligned}$$

» Esta equação se refere ao ultimo ponto da integral  
 »  $\int Z$ ; mas he preciso observar, que, como cada hum dos  
 » termos, v. g.  $p \delta x$ , depende de huma integração par-  
 » cial da formula  $\int p d\delta x$ , se pode ajuntar-lhe, ou dimi-  
 » nuir-lhe huma quantidade constante. Ora a condição,  
 » pela qual esta constante deve determinar-se, he, que ella  
 » faça desvanecer o termo  $p \delta x$  no ponto, em que prin-  
 » cipia a integral  $\int p d\delta x$ : será logo preciso diminuir de  
 »  $p \delta x$  o seu valor neste ponto: donde resulta a regra se-  
 » guinte. Seja o primeiro membro da equação (C) ex-  
 » presso em geral por  $M$ , e seja o valor de  $M$  no pon-  
 » to, em que principia a integral  $\int Z$ , designado por  $'M$ ,  
 » e no ponto, em que este integral acaba, designado por  
 »  $M'$ : ter-se-ha  $M' - 'M = 0$  por expressão completa da  
 » equação (C).

» Com tudo para se desfazer nas equações achadas  
 » das diferenças indeterminadas  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , &c.  $d\delta x$ ,  
 »  $d\delta y$ ,  $d\delta z$ , &c. &c. se examinará, se pela natureza do  
 » problema ha entre ellas alguma relação dada; e ten-  
 » do-as reduzido ao menor numero possível, se fará de-  
 » pois o coeſiciente de cada huma das que ficarem, igual  
 » a zero.

» Se ellas são absolutamente independentes humas das

» ou-

” outras , a equação (B) nos dará logo as seguintes :

”  $n - dp + d^2q - d^3r + \&c. = 0,$

”  $N - dP + d^2Q - d^3R + \&c. = 0,$

”  $v - d\omega + d^2\chi - d^3\rho + \&c. = 0,$  ”

§. 5. Tal he o problema geral, de que vou fazer applicação aos tres seguintes objectos.

I.º Indagar a aquação geral das brachystochronas, quaesquer que sejaõ as forças, que sollicitem o movel tanto no vacuo, como nos meios resistentes segundo qualquer lei.

II.º Deduzir da equação geral a falsidade das Prop. 42, e 76 do segundo Tomo da Mechanica de Euler, nas quaes este celebre Geometra estabelece por caracter das brachystochronas a igualdade entre as forças centrifuga, e normal.

III.º Substituir o verdadeiro caracter das brachystochronas tirado da sua equação.

I.

§. 6. Problema. Achar a linha brachystochrona tanto no vacuo, como nos meios resistentes em qualquer hypothese de forças, que sollicitem o movel?

Solução. Designando por  $x$  a abscissa vertical, por  $y$ , e  $z$  as duas coordenadas horizontaes, e orthogonaes, a

expressão do tempo será  $\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{u}$ , ou  $\int \frac{ds}{u}$ , sendo

$ds$  o elemento da curva, e  $u$  a velocidade effectiva em cada ponto. Pela comparação desta com a expressão ge-

ral  $\int Z$  temos  $Z = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{u}$ , e  $\delta Z =$  . . .

$$\frac{dx}{u\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \delta dx + \frac{dy}{u\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \delta dy + . .$$

$$\frac{dz}{u\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \delta dz - \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{u^2} \delta u ; \text{ mas pe}$$

los principios de Dynamica, representando por  $T$  a força tangencial, he no vacuo  $udu = Tds$ , e conseguintemente

$$u\dot{u} = T\dot{s}; \text{ logo } \delta Z = \frac{dx}{uds} \delta dx + \frac{dy}{uds} \delta dy + \frac{dz}{uds} \delta dz -$$

$$\frac{Tds}{u^3} \dot{s} = \frac{dx}{uds} \delta dx + \frac{dy}{uds} \delta dy + \frac{dz}{uds} \delta dz -$$

$$\frac{Tds}{u^3} \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}; \text{ e fazendo } \frac{\delta y}{\delta x} = p, \frac{\delta z}{\delta x} = q,$$

$$\text{será } \delta Z = \frac{dx}{uds} \delta dx + \frac{dy}{uds} \delta dy + \frac{dz}{uds} \delta dz - \dots$$

$$\frac{Tds\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3} \delta x. \text{ Logo no valor geral de } \delta Z \text{ será}$$

$$u = - \frac{Tds\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3}, p = \frac{dx}{uds}, P = \frac{dy}{uds}, \varpi = \frac{dz}{uds},$$

e todas as mais quantidades  $q, r, N, Q, R, v, \chi, \rho$ , &c. iguaes a nada.

§. 7. Ora, como o problema he achar em geral entre todas as linhas possiveis aquella do mais breve descenso, e não ha por consequencia relação alguma dada entre as differenças  $\delta x, \delta y$ , &c., mas são absolutamente independentes humas das outras, teremos as tres equações seguintes:

$$(1.^a) \frac{Tds\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3} + d\left(\frac{dx}{uds}\right) = 0, (2.^a) d\left(\frac{dy}{uds}\right)$$

$$= 0, (3.^a) d\left(\frac{dz}{uds}\right) = 0. \text{ E como estas tres equações de-}$$

vem representar huma curva unica, he preciso, que ellas se possaõ reduzir a duas sómente. Com effeito se acha a primeira, sommando a  $(2.^a)$  multiplicada por  $\frac{2dy}{uds}$  com a

$$(3.^a) \text{ multiplicada por } \frac{2dz}{uds}, \text{ integrando, substituindo } 1 -$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \text{ por } \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2, \text{ e differenciando de novo.}$$

§. 8. Integrando por tanto as duas  $d\left(\frac{dy}{uds}\right) = 0$ , e  $d\left(\frac{dz}{uds}\right) = 0$ , temos  $\frac{dy}{uds} = a$ ,  $\frac{dz}{uds} = b$ ; logo  $\frac{dy}{dz} = \frac{a}{b}$ , que he equação á linha recta, projecção orthogonal da curva sobre o plano horizontal. Donde se conclue, que a curva está em hum plano vertical, e he por consequencia de simples curvatura. Se a referirmos pois a duas coordenadas orthogonaes tomadas no seu mesmo plano, huma  $x$ , e outra  $t$ , que tenha a mesma origem que  $y$ , e  $z$ , será  $t = \sqrt{y^2+z^2} = y \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = z \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ . Logo  $y = \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ,  $dy = \frac{adt}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ,  $z = \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ,  $dz = \frac{bdt}{\sqrt{a^2+b^2}}$ , e  $ds = \sqrt{dx^2+dt^2}$ .

§. 9. Substituindo por  $dy$  o seu valor na equação  $\frac{dy}{uds} = a$ , ou o de  $dz$  na outra  $\frac{dz}{uds} = b$ , virá de qualquer forte  $uds = \frac{dt}{\sqrt{a^2+b^2}} = cdt$ ; e  $dt = \frac{udx}{\sqrt{c^2-u^2}}$ .

§. 10. Se o meio he resistente, e a resistencia representada em geral por  $R$ , em lugar de  $n = -\frac{Tds\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3}$ , que achámos na hypothese do vácuo, será  $n = -(T-R)ds \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3}$ , ficando tudo o mais da mesma forte, e as tres equações, que vem nesta hypothese, se reduzem ás mesmas duas  $d\left(\frac{dy}{uds}\right) = 0$ , e  $d\left(\frac{dz}{uds}\right) = 0$ . Logo

$$dt =$$

$dt = \frac{u dx}{\sqrt{c^2 - u^2}}$  he a equação geral das brachyftochronas,

affim no vacuo; como nos meios refiftentes.

§. 11. Esta equação he conforme com a que se acha no N.º. 37 das obras de Joaõ Bernoulli; em que depois de mostrar, que a brachyftochrona não deve differir da curva, que hum raio de luz defcreve, atravessando hum meio diaphano de densidade continuamente variavel, segundo qualquer lei, acha para a curva descripta pelo raio de luz a dita equação: e a deduz de hum principio fyfico, ou antes metafyfico estabelecido por Fermat, e demonstrado depois por Leibnitz, e Huyghens; a saber, Que hum raio de luz, passando de hum meio menos denso para outro mais denso, se refrange de forte, que o caminho desde o ponto luminoso até o illuminado se faça no menor tempo poffivel: donde se infere, que a razão entre o seno do angulo de incidencia, e o do angulo de refração he a inverfa das densidades, ou a directa das velocidades, com que o raio penetra os meios.

§. 12. Como o methodo precedente se applica da mesma forte, ou a curva deva ter a propriedade de Maximum, ou de Minimum, fazia-se preciso hum criterio para distinguir estes dous casos.

Este he, o que deu le Gendre nas Mem. da Acad. Real das Scienc. de Pariz para 1786; aonde mostra, que se  $v$  he função de  $x, y, p, q, r$ , &c. sendo  $p = \frac{dy}{dx}$ ,  $q = \frac{dp}{dx}$ , &c. a quantidade  $\int v dx$  ferá hum Maximum, ou hum Minimum, segundo que  $\frac{d^2v}{dr^2}$  for huma quantidade negativa, ou positiva, entendendo por  $r$  a ultima das quantidades  $p, q, r$ , &c., e sendo  $\frac{d^2v}{dr^2}$  o coefferente de  $dr$  na differencial de  $\frac{dv}{dr}$ .

§. 13. Fazendo applicaçãõ ao presente problema , em que  $\int \frac{ds}{u} = \int \frac{dt \sqrt{1+p^2}}{u}$  (fazendo  $\frac{dx}{dt} = p$ ) he a expressãõ do Maximum , ou Minimum , teremos  $v = \frac{\sqrt{1+p^2}}{u}$ ,  $\frac{dv}{dp} = \frac{p}{u\sqrt{1+p^2}}$ , e  $\frac{d^2v}{dp^2} = \frac{1}{u(1+p^2)^{3/2}}$ , quantidade positiva. Logo o tempo na curva achada , ou  $\int \frac{dt \sqrt{1+p^2}}{u}$  he hum Minimum.

§. 14. Para fazermos alguma applicaçãõ da equaçãõ geral das brachystochronas , supponhamos , que o movel he sollicitado no vacuo por huma força acceleratriz variavel  $P$ , que obra unicamente no sentido vertical.

Teremos nesta hypothese  $udu = Pdx$ ; donde  $u^2 = 2fPdx$ , e  $u = \sqrt{2fPdx}$ : o que substituído na equaçãõ geral  $dt = \frac{udx}{\sqrt{c^2 - u^2}}$  a torna em  $dt = \frac{dx \sqrt{2fPdx}}{\sqrt{c^2 - 2fPdx}}$ ; da qual se deduz

facilmente  $ds = \frac{cdx}{\sqrt{c^2 - 2fPdx}}$ ; que he a mesma , que se acha na Prop. 41 do segundo tomo da Mechanica de Euler.

Se o movel além da força acceleratriz vertical  $P$  fôr sollicitado tambem por outra acceleratriz horizontal  $Q$ , ferá  $udu = Pdx + Qdt$ , e  $u = \sqrt{2f(Pdx + Qdt)}$ ; logo  $dt = \frac{dx \sqrt{2f(Pdx + Qdt)}}{\sqrt{c^2 - 2f(Pdx + Qdt)}}$ , por ser a força tangencial  $T = \frac{Pdx + Qdt}{ds}$ .

Se o meio fôr resistente, e a resistencia representada  
Tom. II. c por

por  $R$ , ferá  $udu = (T-R) ds$ ; logo  $u = \sqrt{2f(T-R)ds}$ ;

$$e \ dt = \frac{dx\sqrt{2f(T-R)ds}}{\sqrt{c^2 - 2f(T-R)ds}}.$$

## II.

§. 15. Vamos agora ver, como da equação achada se deduz a falsidade das Prop. 42, e 76 do seg. tomo da *Mechanica* de Euler.

Da equação  $uds = cdt$ , ou  $\frac{u}{\left(\frac{dt}{ds}\right)} = c$  se tira pela dif-

ferenciação  $du \left(\frac{dt}{ds}\right) = ud \left(\frac{dt}{ds}\right)$ ; mas chamando  $r$  ao raio osculador, he  $d \left(\frac{dt}{ds}\right) = \frac{dx}{r}$ ; logo ferá  $du \left(\frac{dt}{ds}\right) = \frac{udx}{r}$ ; donde  $\frac{u^2}{r} = \frac{udu dt}{dx.ds}$ . E sendo no vacuo  $udu = Tds =$

$$Pdx + Qdt, \text{ teremos } \frac{u^2}{r} = (Pdx + Qdt) \frac{dt}{ds.dx} = P \frac{dt}{ds} + \frac{Qdt^2}{ds.dx} = P \frac{dt}{ds} + Q \frac{(ds^2 - dx^2)}{ds.dx} = Q \frac{ds}{dx} + \frac{Pdt - Qdx}{ds}. \text{ Mas } \frac{u^2}{r}$$

he a expressão da força centrífuga, e  $\frac{Pdt - Qdx}{ds}$  a da for-

ça normal, que chamemos  $N$ . Logo  $\frac{u^2}{r} = Q \frac{ds}{dx} + N$ .

Donde se segue, que na *brachystochrona* no vacuo ferá a força centrífuga igual á normal unicamente, quando  $Q = 0$ ; isto he, quando as forças acceleratrizes forem somente verticaes: e por consequencia tambem na hypothese da gravidade obrar por direcções parallelas; na qual, como acima disse, foi primeiramente resolvido este problema, e achada a *Cycloide*.

§. 16. Nos meios resistentes he  $udu = (T-R) ds =$   
 $Pdx$

$Pdx + Qdt - Rds$ . Logo a equação  $\frac{u^2}{r} = \frac{u du dt}{ds dx}$  se torna

em  $\frac{u^2}{r} = \frac{Qds}{dx} - \frac{Rdt}{dx} + N$ : e por consequencia nos meios

*resistentes nunca he na brachystochrona a força centrífuga igual á normal.*

§. 17. De tudo isto se conclue, que a força centrífuga he igual á normal na linha do mais breve descenso somente, quando o movel no vacuo fôr sollicitado por forças acceleratrizes unicamente verticaes variaveis, ou constantes; e por consequencia que a Prop. 76 he sempre falsa, e a 42 só não he falsa, quando as forças acceleratrizes fôrem unicamente verticaes.

§. 18. Tomando pois por principio o caracter estabelecido por Euler, representado pela equação  $\frac{u^2}{r} = N$ , só acharemos a verdadeira equação da brachystochronas, quando o movel fôr sollicitado no vacuo por forças acceleratrizes sómente verticaes.

Seja por exemplo sollicitado sómente pela força da gravidade constante: teremos nesta hypothese  $u^2 = 2gx$ ,  $N = g \frac{dt}{ds}$ ; logo  $\frac{u^2}{r} = N$  se torna em  $\frac{2gx}{r} = g \frac{dt}{ds}$ , ou

$\frac{2gx}{dx} = g \frac{dt}{ds}$ ; donde se tira  $\frac{dx}{2x} = \frac{d(\frac{dt}{ds})}{\frac{dt}{ds}}$ ; integrando,

$\frac{1}{2} \log. x = \log. \left(\frac{dt}{ds}\right) + \frac{1}{2} \log. a$ ;  $\sqrt{x} = \frac{dt}{ds} \sqrt{a}$ ,  $ds = \frac{dt \sqrt{a}}{\sqrt{x}}$ , ou  $dt = \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$ , que he a equação á Cycloide, e

identica com a que nesta hypothese se tira da equação geral

$$dt = \frac{u dx}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$

Seja

Seja sollicitado o movel pela força acceleratriz vertical variavel  $P$ , e  $Q = 0$ ; ferá  $u^2 = 2\int P dx$ ,  $N = \frac{P dt}{ds}$  :

$$\text{logo } \frac{u^2}{r} = N \text{ ferá } \frac{2\int P dx}{\frac{dx}{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}} = P \frac{dt}{ds}, \frac{P dx}{2\int P dx} = \frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}}; \text{ e inte-}$$

grando,  $\frac{1}{2} \log. (\int P dx) = \log. \left(\frac{dt}{ds}\right) + \log. c$ , e  $\sqrt{\int P dx} = \frac{c dt}{ds}$ , ou  $dt = \frac{dx \sqrt{\int P dx}}{\sqrt{c^2 - \int P dx}}$ ; que he a mesma, que no §.

14 se deduzio da equação geral.

§. 19. Mas se o movel fôr sollicitado ao mesmo tempo pelas forças acceleratrizes  $P$ , e  $Q$ , não se poderá da equação  $\frac{u^2}{r} = N$  tirar a verdadeira equação da brachystochrona.

Com effeito nesta hypothese ferá  $u^2 = 2\int (P dx + Q dt)$ , e  $N = \frac{P dt - Q dx}{ds}$ ; logo  $\frac{u^2}{r} = N$  se tornará em . . .

$$\frac{2\int (P dx + Q dt)}{\frac{dx}{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}} = \frac{P dt - Q dx}{ds}, \text{ ou } 2\int (P dx + Q dt) d\left(\frac{dt}{ds}\right) =$$

$$P dx \cdot \frac{dt}{ds} - \frac{Q dx^2}{ds} = P dx \cdot \frac{dt}{ds} - \frac{Q(ds^2 - dt^2)}{ds} = (P dx + Q ds) \frac{dt}{ds} -$$

$$Q ds; \text{ da qual se tira } \frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}} = \frac{P dx + Q dt}{2\int (P dx + Q dt)} -$$

$\frac{Q ds^2}{2 dt \int (P dx + Q dt)} = \frac{T ds}{2 \int T ds} - \frac{Q ds^2}{2 dt \int T ds}$ ; a qual só póde

reduzir-se á verdadeira equação achada no §. 14, quando

$$\frac{Q ds^2}{2 dt \int T ds} = 0, \text{ ou quando } Q = 0.$$

§. 20. Ainda que a certeza, e evidencia dos principios, de que me servi, e a identidade da equação, que delles deduzi, com a que Joaõ Bernoulli derivou de principios totalmente differentes, não deixe lugar a duvidar das conclusões, que tirei; com tudo a authoridade de Euler he de tanto pezo, que julgo preciso mostrar o paralogismo, que ha na sua demonstração.

§. 21. Na Prop. 40 chama elle  $v$  a altura devida á velocidade no ponto  $M$ ,  $v + du$  a devida á velocidade em  $m$ , e  $v + du + ddw$  a devida á velocidade em  $n$ . Ora, sendo  $v$  a altura devida á velocidade em  $M$ ; se o movel se moveffe pela vertical  $BMG$ , seria  $v + dv$  a altura devida á velocidade em  $G$ . Logo, estando os pontos  $G, m, n$  na mesma horizontal, temos  $v + dv, v + du, v + du + ddw$  por alturas devidas ás velocidades em  $G, m, e n$ . Mas no Corol. 3.º da Prop. 40 suppõe, que sempre  $du = dv$ . Logo suppõe implicitamente, que sempre as velocidades são as mesmas em  $G, e m$ ; o que com tudo só tem lugar, quando as forças acceleratrizes são unicamente verticaes, como elle mesmo mostra no Prop. 12, Corol. 1.º, e 2.º do II. Tom. da Mechanica.

Logo, sendo a Prop. 42 deduzida desta igualdade, he evidente, que ella só será verdadeira, quando a dita igualdade tiver lugar; isto he, no caso de serem as forças acceleratrizes unicamente verticaes: o que concorda com o que acima conclui.

Então porém não só he  $du = dv$ , mas tambem  $ddw = 0$ ; porque as velocidades nos pontos  $G, m, e n$ , e em todos os mais, que estivessem na mesma horizontal, serão iguaes. He isto com effeito, o que se observa na Prop. 41.

### III.

§. 22. Se na equação  $\frac{u^2}{r} = \frac{u du . dt}{ds . dx}$  substituirmos por  $udu$  o seu valor  $Tds$  no vacuo, e  $(T-R) ds$  nos meios resistentes,

Tom. II. D tes,

tes, teremos no primeiro caso  $\frac{u^2}{r} = T \frac{dt}{dx}$ , e no segundo  $\frac{u^2}{r} = (T-R) \frac{dt}{dx}$ . Mas  $\frac{dt}{dx}$  he a tangente do angulo, que a curva, ou a sua tangente faz em cada ponto com a vertical. Logo da equação geral das brachystochronas se deduzem as duas seguintes Proposições, que estabelecem o seu verdadeiro caracter.

*Prop. I.<sup>a</sup>*

*Nas brachystochronas no vacuo he a força centrifuga igual á força tangencial multiplicada pela tangente do angulo, que a curva, ou a sua tangente faz em cada ponto com a vertical.*

*Prop. II.<sup>a</sup>*

*Nas brachystochronas nos meios resistentes he a força centrifuga igual á dita tangente multiplicada pela differença entre a força tangencial, e a resistencia do meio.*

§. 23. Se quizermos por exemplo a equação da brachystochrona no vacuo, quando o movel he sollicitado por quaesquer forças acceleratrizes vertical, e horizontal, da

$$\begin{aligned} \text{equação } \frac{u^2}{r} = T \frac{dt}{dx} \text{ teremos } \frac{2fTds}{r} = T \frac{dt}{dx}, \text{ ou } 2f \frac{Tds \cdot d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{dx} \\ = Tds \cdot \frac{dt}{ds \cdot dx}; \text{ ou } \frac{Tds}{2fTds} = \frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{dt}, \text{ e integrando } \frac{1}{2} \log. (fTds) \\ = \log. \left(\frac{dt}{ds}\right) + \log. c; \sqrt{fTds} = c \frac{dt}{ds}, \text{ e } dt = \frac{dx \sqrt{fTds}}{\sqrt{c^2 - fTds}}. \end{aligned}$$

§. 24. Semelhantemente se achará a equação das brachystochronas nos meios resistentes pelo caracter estabelecido na Prop. II.<sup>a</sup>

## OBSERVAÇÃO ANATOMICA

*De hum feto humano , que em consequencia de hum parto laborioso passou á bexiga urinaria.*

POR MANOEL JOAQUIM DE SOUSA FERRÁS.

**A** Noticia dos mais raros phenomenos da natureza, sendo com prazer acolhida na Republica Litteraria, tanto pela instrucção que dahi nasce, como pela satisfação que resulta para o Filosofo, que medita sobre as operações naturaes, admira os seus maravilhosos effectos, buscando imitallos, e indaga seus desvios para remediallos, ou prevenillos, se lhe fôr possível: he justo, que eu me apresse a publicar o seguinte facto, que a Anatomia me deu a conhecer.

Huma mulher de 25 annos de idade, robusta, e de temperamento bilioso, estando já no principio do setimo mez da sua gravidação, foi acommettida por huma violenta paixão, a qual durando quatro dias consecutivos, lhe causou notaveis desaranjos na economia animal, enfraquecendo principalmente as forças tonicas e digestivas, e irritando summamente o genero nervoso. Por conseguinte abortou incompletamente, quero dizer, houverão grandes dores no hypogastrio, e na região lombar, acompanhadas de fortes contracções do utero, do diaphragma, e dos musculos abdominaes, rompêrao-se as tunicas, que envolviao o feto, évacuou-se o liquido, em que nadava, e por fim sobreveio a hemorrhagia, que precede a separação da placenta, a qual pouco depois tambem sahio.

Por tanto causou justa admiração, que o feto não sahisse

fe á luz, não obstante os extraordinarios esforços da mãe, e o continuo tenefino, em consequencia dos quaes sentio ella huma violenta dor no ventre inferior, e depois começou a achar-se melhor. Desde então deixárao as ourinas de sahir pela urétra, e vinhaõ pela vagina misturadas com os lóchios, o que fez suspeitar com fundamento, que havia communicação da bexiga para o utero, em consequencia de alguma rotura causada pelos violentos esforços da mãe. Gradualmente se foi augmentando depois a sensibilidade do abdomen pela inflammação, que ali se formava; os lochios degeneráraõ em materia podre, e de cheiro cadaveroso, a qual irritava, e roía as partes por onde passava. Então não houve mais duvida ácerca de estar morto o feto, e com effeito as suas putridas exhalações, communicando-se á massa humoral por meio dos vasos lymphaticos inhalantes, deraõ origem a huma hectica.

Ao principio de Julho de 1792 esta infeliz mulher se recolheu ao Hospital geral desta Cidade do Porto, isto já seis mezes depois do frustrado aborto: queixava-se então de continua afflicção, e de grande calor interno, e tambem pelas partes genitae: o seu pulso era pequeno, e ligeiro; hum tumor duro, e desigual occupava a parte inferior do ventre, e julgava-se que era produzido pelos ossos do feto reprimidos no utero pela constricção do seu collo, e por isso se applicáraõ alguns relaxantes emollientes, ordenou-se que ella tomaria semicupios tepidos todos os dias, fizeram-se algumas injeções no utero, pelas quaes se extrahiaõ alguns ossinhos, e prescreveo-se o uso da quina para restaurar as forças, e oppôr-se á degeneração septica dos humores; mas foi logo interrompida a sua administração, por quanto a doente dizia com razoõ, que ella lhe augmentava os calores, e ardores.

A 20 de Agosto sahirao alguns ossos por esforços naturaes, e já então as pernas começavaõ a inchar; o fluxo alvino era frequente; a doente não podia dormir, e tinha fuores frios pela cabeça, e agudas dores no ventre; o pulso

fo estava apressado, e muito abatido. A 29 sahiraõ mais ossos, e entaõ me disse a enferma, que se achava muito mal, e que tinha dores por todo o corpo; no dia seguinte apparecêraõ todos os symptomas mortaes, a fyfionomia se fez hippocratica, extinguiu-se a falla, a lingua ficou secca, e negra, e da mesma sorte os dentes, os olhos se fixáraõ tendo perdido o seu lustre natural, e o pulso juntamente com a respiraçaõ perdeu a regularidade.

A 31, tendo a morte finalizado tantos soffrimentos, abri o cadaver, e eis-aqui os fenomenos, que se me apresentáraõ: logo que comecei a incisaõ dois dedos affima do embigo, onde estava a ponta do tumor, fez-se huma explosaõ de ar corrupto, e apparecêraõ as pontas de algumas costellas do feto já descarnadas, e denegridas: continuando a incisaõ até abaixo, e separando a synfise do pubis, abri todo o tumor, naõ podendo evitallo por causa da intima adherencia, que havia entre o seu involucro, e os musculos abdominaes; e era por ventura o utero que continha os ossos, como se tinha pensado? naõ certamente. . este singular fenomeno me causou justa admiraçaõ, e excitou-me a profeguir a minha indagaçaõ; era pois a bexiga urinaria, onde se achavaõ os restos do feto; com effeito descobri na sua parte posterior huma grande rotura correspondente á vagina; entaõ foppus que na occasiaõ do aborto, tendo-se o feto apresentado obliquamente, fôra obrigado pelos violentos esforços da mãi a romper, e forçar a entrada para a bexiga, ou isto fôsse logo, quando ella sentio a forte dor, ou depois em consequencia da supuraçaõ daquellas partes offendidas, e dilaceradas.

A bexiga estava por todos os lados adherente ás partes circunvisinhas, e o utero no estado natural, porém cuberto de huma grossa membrana, a qual o unia á bexiga; os intestinos entortilhados estavaõ collados huns aos outros, tudo por consequencia immediata da longa inflammaçaõ do abdomen, a qual coagulando o muco, que lubrificava estas visceras, o transtornou em membranas.

Entre os ossos do feto encontrei huma grossa lombriga morta, e não descobrindo passagem por onde ella poderia ter vindo dos intestinos, pensei, não que fosse originada da podridaõ, como dizia Aristoteles, mas sim de hum ovo ( pois *omne vivum ex ovo* ) ahi introduzido pela rotura da vagina por meio do ar, ou tambem pelo chylo da mãi, pois em fetos recém-nascidos se tem achado muitas vezes lombrigas.

Subindo aos hyppocondrios notei, que o figado estava muito obstruhido ainda que com a côr natural, e que a bexiga do fel abundava de atrabiles, cuja degeneraçãõ, de que tanto fallou Hippocrates, alguns Medicos tem negado sem razãõ; o baço pelo contrario tinha menor diametro, e maior consistencia, do que em estado natural.

Quantos outros fenomenos singulares teriaõ enriquecido os nossos annaes, e illustrado a Medicina, se acaso entre nós não existisse geralmente hum horror insensato contra as indagações Anatomicas. Nos paizes mais cultos da Europa já as leis franqueáraõ este caminho para a util instruçãõ, mas não sei para quando differimos arrancar este abuso, mostrondo ao público as vantagens, que dahi resultariaõ para o bem da sociedade, e quanto he prejudicial a sua obstinaçãõ.

## SINGULAR OBSERVAÇÃO,

*Que confirma a sympathia do estomago com a cabeça.*

POR MANOEL JOAQUIM DE SOUSA FERRÁS.

O Author da natureza construiu de hum modo taõ sábio e artificiozo o corpo humano, que ficáraõ suas partes mutuamente dependendo humas das outras, e como por alliança unidas estreitamente, a fim de conspirárem para a conservação do todo ; de forte, que sendo huma dellas offendida, as mais daõ promptamente indicios claros do seu resentimento, e lhe prestaõ todo o auxilio ; isto por intervenção do principio vital, e do systema nervoso, muscular, sanguineo, e cellular. *Consentiente una, consentiunt omnes* (†). Hippocrates nas suas admiraveis observações.

Mas esta correspondencia se mostra mais intima entre humas, que outras partes, como por exemplo, entre o estomago, e a cabeça. Desta he que pertendo fallar, visto ser o seu conhecimento mais util, e mais necessario para a praxe Medica, expondo finalmente huma curiosa observação, que a confirma, e attesta de hum modo naõ equivoco.

Esta maravilhosa fabrica do nosso Fysico, á que já os Antigos attenderaõ com particularidade, dando-lhe o nome de *consenso, ou sympathia*, merece todo o cuidado no tratamento das molestias ; por quanto decide as indicações, e os meios de as satisfazer : tambem fornece ao Fysiologista objecto de observações interessantes para a explicação de alguns phenomenos, os quaes, naõ obstante a sua naturalidade, se appresentaõ com aspecto admiravel e estupendo.

De

De todas as visceras he o estomago aquella , que tem com todas as partes do corpo a mais insignie sympathy ; por quanto não só as excita , e fortalece instantaneamente , pela força tonica dos alimentos ( como se observa logo que se come ) e as nutre depois com a substancia alimentar , que produz a digestão ; mas tambem as faz participantes dos sentimentos de suas afflicções , e incommodos.

Nem isto he muito de admirar , se com effeito o Creador supremo o constituiu parte principal do corpo , e fonte alimentar , donde as mais houvessem de receber quotidianamente os auxilios necessarios , para a reparação dos continuos estragos das funcções da vida ; o que moveo Hippocrates a dizer , *Ventriculus dat omnibus , et ab omnibus accipit ; marisque potestatem habet* ; Van-Helmont pela mesma razão nelle collocou o assento da vida , e o maior poder do corpo.

Com tudo o seu commercio mais intimo , e a sua maior influencia he sobre a cabeça ; razão porque ordinariamente dimanão delle as molestias da cabeça ; o que deu motivo para a util divisaõ dellas em Idiopaticas , e sympathicas.

As obras dos mais celebres Medicos , tanto modernos como antigos , abundaõ de observações e factos , que provaõ a realidade desta uniaõ ; Hippocrates , Galeno , Hoffmann , Stoll , Tissot , e outros muitos notáraõ , frequentes vezes , que a saburra estomacal era a causa de agudas dores de cabeça , de Frenezia , Mania , Vertigens , Ophthalmias , Othalgias , e Odonthalgias ; a Apoplexia ordinariamente provém da nimia repleção do estomago ( como vi succeder em França a hum amigo , e condiscipulo ) , e tambem do seu vicio bilioso , e pituitoso ; da sua inanição , ou atonia resulta sempre a vertigem , o desfalecimento , e tambem o delirio chronico , assim como observou Vith ; finalmente he constante , que a sua irritabilidade natural , ou excitada por qualquer estimulo , produz convulções nas partes superiores , a Epilepsia , o Trismo , e outras queixas nervosas , e por ultimo a alienação do espirito ; disto sôraõ

teste-

testemunhas Van-Swieten, Stoll, Rosen, e Harrisio; e a pratica no-lo mostra todos os dias.

Nem eu descubro outra fonte, donde tragaõ origem os delirios das febres gastricas, os chamados feitiços, e muitos desarranjos do cerebro, os quaes hum emetico dissipa instantaneamente. Van-Helmont nos refere, que tendo certo homem comido duas oitavas de sementes de Meimendro branco, *Hyosciamus albus*, ficára subitamente louco, mas que hum vomitorio logo o restituira ao antigo estado: muitos effeitos deste genero sabemos terem causado as Daturas, a Belladonna, e outras da Pentandria, como tambem o Ranunculo malvado, o Rhapsiano Rhapsianistro, o Lólio temulento &c.

A observação, que vou expôr, e que he digna de occupar por hum instante a imaginação de qualquer observador da natureza, prova sufficientemente, que hum estimulo fisico reprezado no estomago, vellicando os seus numerosos e sensiveis nervos, e promovendo as suas oscillações, e as das tunicas musculares, por onde se distribuem, faz com que estas se communicem logo á cabeça; onde perturbando, e atropelando a regularidade da circulação dos espiritos animaes, e desarranjando por conseguinte as funções intellectuaes, induzem o desvario, e a alienação da alma; a qual sem a perfeita harmonia do sensorio commum, não póde cogitar, nem imaginar recta e perfeitamente.

Huma mulher de 42 annos de idade, robusta, e de bom temperamento, tendo sido conduzida por outras, que se diziaõ amigas, a huma merenda fóra da Cidade, estas depois de a terem regalado com alguns guizados, e licôres espirituosos a ponto de a embriagarem, lhe fizeraõ comer insensivelmente huns bolos doces, dentro dos quaes tinhaõ maliciosamente semeado pedaços de cabellos grossos, e entortilhados no intento de a enfeitçarem; voltando ella muito satisfeita, não sentio incommodo algum nas vinte e quatro horas seguintes, excepto a inappetencia de comer; passado este intervallo, começou a queixar-se de nau-

feia, e oppressão no estomago, ao que brevemente succedeu a alienação do espirito, e demencia, com perda de todo o conhecimento, até de seu marido.

Neste misero estado permaneceu dois dias, sem que nelles comesse, ou bebesse cousa alguma, nem tão pouco se entregasse ao somno; hora parecendo meditar profundamente, hora alegrar-se muito, e por fim enchendo-se de furor maniaco, e querendo fahir para fóra.

Sendo eu chamado em seu auxilio, depois de ter ouvido a narraçãõ de todas as precedencias, suspeitando que a indigestãõ de algum máo alimento, que houvesse comido na tal merenda, fosse a causa primaria desta doença, resolvi dar-lhe immediatamente dous grãos de tartaro emetico desfeitos em agoa sufficiente; com effeito meia hora depois de tomado este remedio, tive a satisfacção de ver fahir pelo vomito hum bolo de cabellos duros, e entortilhados, de grandeza de huma castanha, em cuja superficie appareciãõ algumas pontas; entãõ, como por milagre, recuperou a doente o seu antigo juizo, e logo se queixou de estar muito moida, e muito debilitada; porém a respeito do como lhe tinha acontecido aquelle caso, bastantemente lhe admirava, e ácerca do que tinha dito, e feito, durante a alienaçãõ do espirito, me assegurou que nada sabia, nem de cousa alguma se lembrava.

Eis-aqui como esta mulher foi enfeitçada, e como no Brazil os Negros enfeitçãõ, servindo-se de meios semelhantes, e de alguns venenos, que unicamente atacaõ os nervos.

Segundo esta exposiçãõ, facilmente se collige a razãõ de todos estes fenomenos, e a sua explicaçãõ; o que julgo ser deste modo: nas primeiras vinte e quatro horas, naõ sentio esta mulher incommodo algum notavel, por estarem os cabellos dispersos, e envolvidos pela massa dos alimentos; porém logo que esta foi digerida, e expellida do estomago, ficando unicamente os cabellos, por serem summamente indigestos, fóraõ-se ajuntando, e entortilhan-

lhando huns nos outros pelas mesmas contracções do estomago nauseado ; de maneira que estando formado o bolo, as pontas da sua circumferencia vellicavaõ, e offendiaõ os nervos do estomago, cuja irritação communicando-se ao cerebro, ali causava commoções, que perturbando a ordem dos espiritos, davaõ lugar ao defarranjo das funções da alma ; porém huma vez que foi lançado pelo vomitõ o estímulo, causa primaria de tudo, cessáraõ as oscilações, e se restabeleceu promptamente a harmonia do sensorio commum, e a antiga saude.

## OBSERVAÇÃO

*De huma Thísica tuberculosa, e de huma concreção calcárea, achada no utero.*

POR MANOEL JOAQUIM DE SOUSA FERRÁS.

**H**Uma mulher de 27 annos de idade, e de constituição delicada, queixava-se, ha tempos, de tosse secca, alguma dyspnêa, e calor sobrenatural nos bofes, ao que ás vezes succedia a expectoração de muco tenue, misturado com alguns raios de sangue vivo; a constipação cutanea, que tinha ordinariamente, não só por causa da fatal inconstancia de temperatura, que este clima tem experimentado, ha alguns annos a esta parte, mas ainda pelo seu natural relaxamento de póros, dirigia todas as fluxões para os bofes, como centro mais fraco, e incapaz de reacção; por cujo motivo ficando elles continuamente opprimidos pela abundancia e tenacidade das materias da perspiração, lentamente se fôraõ formando tuberculos, e vomicas, donde nasceu a Thísica pulmonar.

Conduzio muito para o rapido progresso desta queixa o desprezo, que della fazia a doente, entregando-se com excessõ a bebidas espirituosas, e a alimentos de má qualidade, sem recorrer á Medicina, antes que a molestia se arraigasse, e se fizesse mais poderosa que a natureza; esta incomprehensivel arte do Creador, ou força Divina, que por leis sabias, e constantes rege o universo, mantendo as leis primordiaes, oppondo-se á destruição dos entes, e reproduzindo-os, por huma regular successão!

Sendo eu chamado para tratalla, tive o dissabor de  
fa-

fazer hum prognostico funesto, em razão do auge, a què vi a molestia levada, e não encubri a insufficiencia das minhas forças, para vencer tão poderoso inimigo; estava pois a doente muito extenuada, mas ainda com bastantes forças; o que admirava, visto o seu fastio, e a colliquaçã, que se fazia pela expectoraçã, suores, e diarrhéa; o pulso era duro, apressado, e irregular; a tosse vehemente, e tambem a suffocaçã.

Isto não obstante, determinei pôr em pratica todos os meios, que nos prescreve a arte em casos semelhantes, para abater o calor hectico, resolver as estagnações, e tuberculos dos bofes, repellindo, e evacuando as materias, e por fim corroborando-os, e dissipando a sua irritaçã; entre outros remedios, usei do Lichen Islandico, da Veronica, e Polygala; planta esta, que aqui florece abundantemente, sem que ninguem a conheça (como muitas outras Medicinas), e que, segundo tenho experimentado, merece bem os elogios de Collin, e Stoll.

Porém tudo foi baldado (como se podia crer); chegou apressadamente a morte, e a doente lhe tributou a sua devida homenagem; entã propuz abrilla, não só para que os parentes vissem o deploravel estado do peito, mas ainda para que se defenganassem a respeito da presumpçã, que tinhaõ de prenhez, em attençã a alguns indicios, que precedêraõ, e principalmente a hum tumor duro, que a doente sentia na regiã uterina, o qual bastantemente a incomodava; com effeito, sendo accollhida a minha proposiçã (ainda que com bastante repugnancia) executei-a com grande satisfacçã, por me ser aqui ordinariamente vedado lêr em semelhantes livros os segredos da natureza, e observar por esta via o genio das molestias, e os meios de que se servem para contaminar, e aniquilar a maquina humana; mas ah! que louco prejuizo! por ventura não he este o caminho, por onde temos vindo a ser uteis á humanidade, analysando as doenças no seu mesmo centro, e aprendendo como, e onde as devemos combater? não he

por esta manobra, que nos fazemos dignos do sagrado depósito da faude humana, instruído-nos no conhecimento da estrutura do corpo, e do jogo, e uso de todas as suas partes, para saber remediar o seu desarranjo?

Abrindo primeiramente o abdomen, divisei estar o utero fóra do diametro natural, isto he, do tamanho de huma laranja, aberto este tumor, fiquei affás maravilhado de achar a sua cavidade cheia de huma materia calcarea, de mediocre consistencia, a qual tendia a calculo; o que me fez recordar do singular caso, que se acha nas *Anecdotos de Medicina*, de huma Franceza da Cidade de Sens, a qual nove mezes depois de ter concebido, abortou incompletamente, por ficar dentro a criança, cujo tumor de dia em dia se foi endurecendo; por fim morrendo ella 24 annos depois, se lhe achou no utero hum globo de gesso, dentro do qual estava o esqueleto do feto, quasi petrificado.

Sendo o utero o emunctorio geral, para onde se dirigem todos os humores superfluos, e grosseiros, como diz o célebre Rodrigo de Castro, he natural que ahí se formem lentamente incrustações, e concreções terrosas, e lapideas, dos depositos das ditas fluxões, por via do calor natural da parte, o qual dissipa os humores mais tenues, e une os mais grossos, e feculentos; o que succede em todas as cavidades do corpo, como consta pela tradiçãõ dos Anatomicos.

Tambem conduzem para as concreções uterinas as fêzes, que deixãõ os menstruos reprimidos, ou suprimidos; o que penso ter succedido á minha doente, por quanto só depois da sua falta de assistencia he que o tumor se foi manifestando no ventre inferior; Schéele, e Bergmann imaginãõ como causa d'estas concreções calculosas o predominio de certo ácido, a que chamaõ *Lithico*, o qual dissolvendo partes sólidas, e precipitando humores, fornece lhes hum sedimento terroso; bem como succede nos gotosos, e rheumaticos inveterados.

Abrindo depois o thorax, achei nelle grande extravasãõ

sação de sôro ; producto da transsudação das vêas pulmonaes , e vasos lynfaticos , por causa do sangue , que ahi regurgitava , e estagnava , e tambem da falta de reabsorção , ou inhalação. Pelos bofes estavaõ disperfos muitos tuberculos de differente grandeza , e consistencia ; e na parte esquerda achei huma vômica , cujo humor era branco , e de máo cheiro ; donde colligi a razaõ por que a doente nunca se pôde deitar , nem inclinar sobre aquelle lado , por motivo da grande ancia , e suffocação , que lhe sobrevinha immediatamente.

He para notar-se , que sem embargo d'estas lesões , e da tosse violenta , que continuamente a mortificava , ella não sentia dôr alguma no peito ; o que próva a insensibilidade dos bofes em tal circumstancia ; a expectoração nunca foi purulenta , nem de máo cheiro ; razaõ por que nunca presumi haver ulceração interna , mas sim tuberculos , cuja inflammação , e suppuração promovem a Thísica ; o que frequentemente succede nesta Cidade.

*Porto 20 de Outubro de 1794.*

## OBSERVATIONES ASTRONOMICAE HABITAE

AB ANDREA RODRIGUES.

CUM maior sequentium observationum pars facta sit in specula Astronomica, ubi Eclipsium tempore tene-  
mur adesse, sciendum est 1.º Palatium Imperatoris, et domos Europæorum situm esse in urbe Tartarorum, in  
ejus angulum, qui respicit ortum, est Imperialis specula  
in propugnaculo ad moenia, qui locus diversus est a Tribu-  
nale Astronomico, quod in eadem Civitate Tartara non mul-  
tum distat a Palatio: prædicta specula distat 6" secunda  
temporis ad ortum a Pekinense meridiano, qui secat ur-  
bem, et Palatium, ac primus a Sinis numeratur meridia-  
nus. Collegium vero Patrum Lusitanorum distat ad occasum  
a meridiano 7" temporis secunda, et a specula 13"; et Re-  
sidentia S. Josephi P.P. etiam Lusitanorum, quæ sita est  
fere juxta magnam Palatii januam Orientalem, distat fere  
unum secundum temporis ad ortum à meridiano, et ab specu-  
la 5" temporis.

Sciendum 2.º has observationes factas esse ad tempus  
verum, seu app. ad quod adaptatum, correctumque fuit  
horologium partim per altitudines Solis correspondentes,  
partim per lineam meridianam, in iis quæ factæ sunt in  
specula interdum desiderantur secunda, ea de causa, quia  
quisque debet portare suum parvum horologium, in quo  
raro notantur secunda, Sinenses enim, quamvis de calculo  
sint valde solliciti, de observatione tamen parum curant;  
nam statim post observationem monetur Imperator de ob-  
servatione diligenter facta, et ad adamussim calculo corres-  
pondente, nec aliter moneri potest.

Sciendum 3.º Sinenses dividere diametrum Lunæ, ac  
Solis in decem partes æquales, seu digitos, singulos deinde  
digi-

digitos partiuntur in 60 minuta, ac quodlibet minutum in 60 secunda, idcirco sequentes observationes factae sunt more Sinenfi.

Anno 1753 die 16 Maii in Collegio Pekinensi observavit Pater Augustinus Alerstein Mercurium in Sole. Ingressus h. 6. 44' mane: medium h. 10. 9'. Totalis egressus h. 1. 32' p. merid. in medio Mercurius distabat à centro Solis ad austrum h. 24.

Anno 1755 die 12 Januarii Luna texit Aldeberam: Ingressus recta contra Galileum h. 11 6' 14" p. merid. egressus per Langrenum h. 12 26' 58" med. noctis. In residentia.

Anno 1760 die 13 Junii observavi in residentia Solis Eclipsim. Initium h. 4 26' 0 p. merid. maximam obscurationem h. 5 57' fin. h. 6 23' 4" dig. 9 42'. Dubitavit Imperator de magnitudine istius Eclipsis, vocansque coram se P. Alerstein, tunc temporis Tribunalis Praesidem, illum interrogavit quomodo ita magna fuit Eclipsis, cum in magna obscuratione, adhuc coelum erat satis clarum; et nondum satisfactus expedivit statim cursores ad Provincias *Hu Kuam*, et *Xan tum*, an revera ibi esset, sicut praenunciabatur; responsumque accepit a Proregibus, quod tempora maioris obscurationis adhuc viderentur homines tamquam arbores.

Anno 1762 die 17 Octobris observavi in residentia Init. Eclip. Solis h. 4 40' p. merid. occidit Sol. h. 5 40' cum dig. 5 40'.

Anno 1765 die 30 Augusti observavi in residentia tubo 6 ped. Init. Eclip. Lunae h. 9 51' 2" p. merid. Immerf. h. 10 50' 20": Emerf. momentum h. 12 31' 36" fin. h. 1 30' 38" p. med. noctem: dig. 19.

Anno 1766 die 25 Februarii in resid. tubo 7 ped. observavi Lunae Eclipsim Init. h. 2 18' 42" mane: max. obscur. h. 3 15' 0, fin. h. 4 30' 32": dig. 3 34'.

Anno 1766 die 19 Aprilis in resid. Luna obtexit dimidiam partem Jovis: appulsus ad limbum Lunae h. 8 59' 30": Egref. totalis h. 9 8' 55".

Anno 1768 die 23 Decembris in resid. observavi tub. 6 ped. Init. Eclip. Lunæ h. 9 4' 44" p. merid. Immerf. h. 10 4' 42" : Emmerf. h. 11 43' 4" fin. h. 12 41' 58" dig. 18 44'.

Anno 1770 in resid. observavi init. Eclip. Solis die 25 Maii h. 7 31' 16" mane : fin. h. 9 20' 26" dig. 4 8'

Anno 1771 die 23 Octobris in resid. tub. 5 ped. observavi Init. Eclip. Lunæ h. 11 20' 20" p. merid. : finem. h. 1 37' 50" : dig. 4 10'.

Anno 1772 die 29 Januarii Luna obtexit Scorpionis stelam v. Appulfus h. 4 16' 35". Egressus h. 5 33'.

Anno 1772 die 11 Octobris observavi in resid. Init. Eclip. Lunæ h. 11 13' 42" p. merid. Immerf. h. 12 22' 10" Emmerf. h. 2 2' 25" : fin. h. 3 13' 30" , dig. 16 40'.

Anno 1773 die 23 Martii in resid. tubo 6 ped. Init. Eclip. Solis h. 1. 0' 12" max. obscurat. h. 2. 20' 10" : fin. h. 3 37' 20" dig. 4 : nimis aberravit haec Eclip. a calculo Tribunalis.

Anno 1773 die 26 Decembris Luna obtexit Aldeberam h. 4 54' p. merid. Egref. h. 5. 34' 0".

Anno 1774 die 6 Serembris observavi in resid. tubo 6 ped. Init. Eclip. Solis h. 7. 15' 30" mane : max. obscurat. h. 8 13' 2" : fin. h. 9 19' 15" dig. 3 50'.

Anno 1775 in specula Astronomica die 15 Januarii tubo 5 ped. observavi Init. Eclip. Lunæ recta contra Harpalum, h. 9 19' 30" : sum. obscur. h. 10 40' 30" : fin. 12 6' 8" p. m.

Anno 1775 die 26 Augusti in specula tubo 6 ped. cum dimidio observavi Init. Eclip. Solis h. 11 23' 56" ; Coelum erat aliquantulum nebulosum Solis tamen distingui potuit, max. obscur. in camera obscura h. 12 54' 58" : fin. h. 2 46' 56" : dig. 4 48'.

Anno 1775 die 6 Decembris Luna textit Aldeberam. Ingres. inter Grimaldum, et Aristarcum h. 5 34' 30" : egref. juxta Mare crisium h. 6 31' 38" : in resid.

Anno 1776 die 21 Januar. praenuntiabat. Solis Eclip. Init. ex calculo h. 9. 36 mane: med. h. 10 20' : fin. h. 11 6: dig. 1 47': at propter tempus nebulosum observari non licuit.

Anno 1776 die 4 Febr. in specula tubo 6 ped. Init. Eclip. Lunae h. 8 4' 30" p. merid. Luna recta contra Gazendum. Immerf. h. 9 5'. Emerf. h. 10 53' : fin. h. 11 57' 50" : dig. 18. Citius incepit, quam calculus praedicebat.

Anno 1777 die 23 Januarii in specula. Init. Eclip. Lunae h. 10 38' 30" max. obscurat. h. 12 4: fin. h. 1 23' 30" : p. med. noct. dig. 5 38'.

Anno 1777 die 20 Julii in specula tub. 5 ped. Init. Eclip. Lunae h. 7 56' 30" : med. h. 8 32' ; fin. h. 9 7' 30" : dig. 0 57' quia non perveniebat ad dig. unum de more; non fuit monitus Imperator de observatione.

Anno 1779 die 24 Novembris in specula tubo 6 ped. cum dimid. Init. Eclip. Lunae h. 1 57' mane, Immerf. h. 2 56'. Emerf. h. 4 36', fin. h. 5 35' : toto Eclipsis tempore Luna fuit conspicua, post totalem Immerf. apparebat fusca; ac sanguinolenta, dig. 17 30'.

Anno 1780 die 18 Maii in ortu Lunae h. 7 10' p. merid. praedicebat. Eclipsis Lunae, dig. 9 7' post max. obscurationem, sed vapores ita crassi ut Lunae faciem omnino impedirent: apparuit tandem eclipsata Luna h. 7 30' ; ac pars maior eclipsata ita obtenebrata apparebat, ut nihil albedinis, aut rubedinis inspiceret, eodem modo usque ad finem, quem in specula tubo 6 ped. observavi h. 8 30' p. merid.

Anno 1782 die 21 Setemb. in specula Init. Eclipsis Lunae h. 9 5' 30" p. merid.: sum. obscur. h. 10 12' : fin. 11 12' : dig. 3 16' : Eandem observavit in residentia P. Joannes de Seixas. Init. h. 9 6' 30" : fin. h. 11 12' 29" :

Anno 1783 die 19 Martii in specula Init. Eclip. Lunae h. 3 18' 30" mane. Immerf. h. 4 18' : Luna occidit h. 6 2' ante Emerfionem. Acceleravit aliquantulum a calculo Tribunalis.

Anno 1784 die 16 Augusti expectabatur hic Eclipsis Solis Init. h. 5 32' mane; summam h. 6 14' : fin. h. 6 59' : dig. 1 5' ; at coelum fuit ita nebulosum ut nihil observari potuerit ; imo post h. 8. inaecepit pluvia non parva, et ita monitus a nobis fuit Imperator.

Anno 1784 die 30 Augusti in specula tub. 6 ped. Init. Eclip. Lunae h. 9 13' p. merid. sum. h. 10 34' : fin. h. 11 56' : dig. 6 40'.

Anno 1785 die 5 Augusti in specula tub. 6 ped. cum dimidio Init. Eclip. Solis h. 6 38' ; sum. h. 7 39' : fin. h. 8 49' : dig. 4 17' : adamussim cum calculo Tribunalis.

Anno 1786, 1787, ac 1788 : jam misi in Lusitaniam.

Anno 1789 d. 17 Novembris in specula tubo 6 ped. Init. Eclip. Solis h. 9 7' 12" : sum. h. 10 21' : fin. h. 11 39' 58" mane : dig. in camera obscura 5 39'. Eandem Eclip. observavit in residentia P. Ignatius Franciscus tubo 5 ped. Init. h. 9 7' 17" : fin. h. 11 39' 52" : coelum erat clarissimum : acceleravit a calculo Tribunalis aliquot min.

Anno 1791 die 18 Aprilis. Imperatoris *Kien Lum* 56. Lunae tertiae die 16. In residentia S. Josephi Patrum Lusitanorum tubo 7 ped. cum dimidio observavi Lunae Eclipsim. Horologium correptum per lineam merid.

Init. Eclipsis	hor.	11.	3' 30"	p. m. temp. vero.
Sum. obscurat.	h.	12.	31 20	p. mer.
Finem Eclip.	h.	1.	58 20	p. med. noct.
Durat Eclip.	h.	2.	54 50	
Dig. Eclip.		7	40'	

Coelum erat satis clarum, quamvis, toto Eclipsis tempore, flaret ventus australis vehemens. Lunae pars obscurata ita nigra, ut nihil distingueretur, aut appareret usque ad finem Eclipsis.

An-

Anno 1793 die 26 Februarii, id est, Imp. *Kien Lum* anno 58 Lunae primae die 16 tubo 6 ped. in residentia S. Josephi observavi Initium Eclipsis Lunae partialis, recta fere contra Petavium ad laevam partes superioris disci Lunae h. 5 10' 30" : aer satis serenus usque ad h. 6 10' temp. ver., quo tempore amplius videri non potuit propter montes occidentales in quibus Luna se abscondit cum Eclip. dig. 4 50'.

Anno Imperatoris *Kien Lum* 58. Lunae sextimae die 15, id est, anno 1793 die 21 Augusti, sereno coelo, tubo 6 ped. observavi Pekini in residentia S. Josephi P.P. Lusitanorum Initium Eclipsis Lunae partialis a parte sinistra inferioris limbi orientalis recta inter Aristotelem, ac Platonem tempore vero h. 9 15' 4" p. merid. : max. obscurationem h. 10 39' 4" : finem h. 12 3' 3" : dig. 7 20' more Sinensi, sive 8 48' more Europ.

Anno 1794 die 15 Februarii Pekini in resid. S. Josephi tubo 5 ped. observavi Lunae Eclip. incipientem a superiori Lunae limbo partis sinistrae recta fere contra Ticonem Init. h. 3. matutina 54' 50" tempore vero. Immersionem totalem h. 5 2' 30", max. obscurationem h. 5 33' 0" : occidit Luna h. 6 43' cum Eclip. dig. Sinens. 11 31' ab inferiori Lunae limbo dextrae partis. Coelo sereno.

Anno *Kien Lum* 60 Lunae primae die prima, id est, anno Christi 1795 die 21 Januarii observavi Pekini in resid. S. Josephi PP. Lusitanorum Solis Eclip. horizontalem : ortus Solis h. 7 11' : apparuit Sol sereno Coelo, cum Eclipsi dig. 7 19' a parte inferiori sinistra Solis, post max. obscurationem, quae ex calculo praenuntiabatur h. 6. 54', dig. 8 54' more Sinico : fin. ejusdem Eclip. h. 8. 0' 40" temp. vero.

Eodem anno 60 Imper. Lunae sextimae die 17, id est, 1795 die prima Augusti observavi in eadem resid. S. Josephi tubo 6 ped. initium Eclip. Lunae partialis h. 2. matutina 4' 55" erant tamen aliquae nubeculae circa Lunae limbum : medium Eclip. h. 3 13' 53" : fin. ejus h. 4 22' 52" temp. vero : dig. 2 16' more Sinensi.

*Accedit Observatio Eclipsis Solis die 15 Julii 1730, habita Pekini in publico ejus Regiae Observatorio, a PP. Ignatio Kegler, et Andrea Pereira Societatis Jesu.*

**E**O die coelum a summo mane dense obnubilatum, ac postea in pluvias resolutum, copiosos imbres dejecit proxima ante Eclipsim hora; ita ut Eclipsim alii quidem observari posse pene jam desperarent, alii vero non apparituram sibi gratularentur: cum ex insperato sub ipsum Eclipsis initium sistere pluviae, simulque nubes rarefcere caeperunt, ac post horae quadrantem per rariora nubila nudis oculis spectabile apparere corpus Solis, superne ex parte borea non nihil ad dexteram, seu occidentem versus Eclipsi infectum circiter sesquidigitum. Igitur purgata e vestigio aëra, et madore utcunque absterfo, exprompsimus, quod pro observatione coram spectatoriibus multis commonstranda praeparaveramus organon, ad speciem Solis scilicet per telescopium 6 pedum sinicorum excipiendam in orthogonaliter subjecta mensula, e cujus centro ad amplitudinem apparentis speciei accurate descriptus erat circulus per 10 digitos more Sinico divisus. Parati quoque habebantur in charta munda plures circuli similiter divisi, et super illum successively applicandi, in quibus praesignatae erant phases eclipticae per singulos digitos appariturae, secundum inclinationes Lunae ad lineam verticalem Solis. Interim vero dum Sol tenues nubes penitus evinceret, clareque distinctam in disco speciem redderet, aliud ad Solem dirigebatur telescopium duabus lentibus objectivis instructum, in ea inter se distantia, ut filare reticulum, in foco telescopii dispositum, pariterque per 10 digitos divisum, exacte quadraret apparenti magnitudini Solis atque per istud primo observatus fuit appulsus Lunae.

- H. II 45' a. m. ad dig. III. id est Europ. dig. 3 36'  
 H. II 51' . . . . . ad dig. IV. . . . . 4 48.

Postea clarissime allucente Sole per hujus speciem in disco notati fuerunt, ut sequitur.

- H. O. 2' p. m. ad centrum seu dig. v. Europ. 6 0'  
 H. O. 14' . . . . . ad dig. VI. . . . . 7 12  
 H. O. 26 $\frac{1}{2}$ ' . . . . . ad dig. VII. . . . . 8 24  
 H. O. 40' . . . . . ad dig. VIII. . . . . 9 36  
 H. O. 51' max. Eclip. dig. VIII $\frac{1}{4}$ ' . . . . . 9 54  
 H. I. 2' regress. ad dig. VIII. . . . . 9 36  
 H. I. 16 20'' . . . . . ad dig. VII. . . . . 8 24  
 H. I. 27 50' . . . . . ad dig. VI. . . . . 7 12

Dein rursus tenui nebula involutus Sol suam speciem infuscavit, telescopio tamen praefato clare visibilis ad cujus reticulum observatus est

- H. I. 39' p. m. regress. ad dig. v. seu cent. 6 0'  
 H. I. 50' . . . . . ad dig. IV. . . . . 4 48  
 H. 2. 0' . . . . . ad dig. III. . . . . 3 36

Iterum emergens e nebula Sol clarissimam exhibuit speciem, ad quam porro notati sunt

- H. 2. 9' 20'' recessus ad dig. II. . . . . 2 24  
 H. 2. 18 20' . . . . . ad dig. I. . . . . 1 12  
 H. 2. 27 10' finis Eclipsis, qui itidem per aliud telescopium excellens 14 pedum Sinicorum eodem momento est annotatus.

Horologium denique correxit, atque direxit Sol ipse tum in magno sciatherico, armillaque aequatoria Observatorii singula minuta horaria commonstrans, tum per captas aliquot altitudines eadem momenta temporis comprobans.

Praeterea aliquot in Sole macularum occultationes, et refectiones observatae sunt. Macula maior, quae erat in ipsa

ipsa perepheria dig. II. ad Nord-Ost immerfa est h. 0 22'  
 p. m. fequentes aliae minores ibidem inter dig. II. et I.  
 immerfae sunt 1.<sup>a</sup> h. 0. 27' 50'' ; 2.<sup>a</sup> h. 0. 31' 40'' ; 3.<sup>a</sup>  
 h. 0. 37' 10'' ; 4.<sup>a</sup> h. 0. 38' 35''. Maculae duae inter dig.  
 III. et IV. verfus Sud-west relectae sunt una h. 1. 18' 45'' ;  
 altera h. 1. 23' 50'' , quarum immerfiones non fuerunt  
 annotatae. Maculae 4 ad Nord-oft relectae fuerunt 1.<sup>a</sup> h. 2.  
 5' 20'' ; 2.<sup>a</sup> h. 2. 7<sup>h</sup> 30'' ; 3.<sup>a</sup> h. 2. 11' 25'' ; 4.<sup>a</sup> h. 2.  
 12' 25'' . . . . .

OBSERVATIO ECLIPSIS LUNARIS HABITA,  
 DIE 3 JANUARIi ANNO 1787, IN COLLEGIO ROMANO  
 A JOSEPHO CALANDRELLI.

*Telescopio achromatico pollicum 18, micrometro objectivo achromatico instructo, diametrum apparentem amplificante vicibus 40.*

Temp. ver.

Initium penumbrae sensibilis . . . . . 10<sup>h</sup> 48' 18"  
 Initium umbrae verae . . . . . 10 50 13.

Micrometri partes exponentes Lunae Phases obscuras.	Temp. ver.	Micrometri partes exponentes Lunae Phases obscuras in egress.	Temp. ver.
1470	10 <sup>h</sup> 56' 28"	110	13 <sup>h</sup> 34' 38"
1185	11 1 49	305	- 38 58
1030	- 7 12	345	- 41 11
995	- 13 42	476	- 43 46
807	- 18 42	504	- 45 46
681	- 24 6	587	- 48 13
425	- 31 15	665	- 50 13
318	- 33 50	729	- 52 40
280	- 37 53	824	- 54 22
236	- 40 28	861	- 56 11
101	- 44 40	909	- 57 59
Immerfio totalis - - -	- 11 48 33	948	- 58 31
		990	14 2 14
Emerfionis initium ab umbra - - - - -	- 13 27' 44"	1110	- 4 13
Emerfio totalis ab umbra	14 26 45	1115	- 5 40
Emerfio totalis a penumbra - - - - -	14 28 43	1180	- 7 27
		1256	- 9 24
		1340	- 11 18
		1365	- 12 41
		1435	- 14 5
		1500	- 15 51
		1511	- 17 12
		1580	- 20 14
		1663	- 21 22
		1736	- 22 59

Microm. Part.

Diameter Solaris die 3 Januarii pluries mensurata - - - - - 1752  
 Diameter Lunar is pluries rum ante tum post Eclipsim mensurata - - - - - 1801

Toto observationis tempore Coelum valde sudum fuit, et rantum initio Eclipsis, levissima nubecula initium penumbrae incertum reddidit.

## OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS

*Feitas na Cidade de S. Paulo, com hum Oculo Achromatico  
de 3  $\frac{1}{2}$  pés.*

POR FRANCISCO DE OLIVEIRA BARBOSA.

*Eclises dos Satellites de Jupiter.*

1788.	Dezembro.	d. 19.	I. 1.º	S. I.	As 12 <sup>h</sup> 52' 0"
1789.	Fevereiro.	b. 28.	I. 3.º	S. I.	As 9 34 54
		m. b. 28.	E. 1.º	S. I.	As 9 54 30
	Março.	m. b. 16.	E. 2.º	S. I.	As 11 5 30
		d. 22.	I. 4.º	S. I.	As 10 43 37
		m. b. 23.	E. 1.º	S. I.	As 10 13 40
	Dezemb.	m. b. 8.	I. 1.º	S. I.	As 12 13 40
1790.	Fevereiro.	b. 1.	I. 1.º	S. I.	As 8 32 13
		d. 17.	E. 1.º	S. I.	As 9 5 38
	Março.	m. b. 10.	E. 2.º	S. I.	As 9 30 32
		b. 19.	E. 1.º	S. I.	As 11 16 37

*Noticia do Eclipse total da Lua de 28 de Abril de 1790.*

Na noite do dia 28 de Abril de 1790, a mais bella, e ferena que jámais ví, ou poderei vêr, observei nesta Cidade de S. Paulo da America Meridional o Eclipse total da Lua. Este Phenomeno, que era annunciado no Almanack

nack Inglez, e que devia principiar em Greenwich ás  $10^h 10' 15''$  não succedeu aquí antes das  $7^h 3' 20''$ , segundo pude avaliar com a Luneta Achromatica do Quadrante Astronomico de 1 pé de raio, pertencente á Collecção de Instrumentos da 2.<sup>a</sup> Partida, destinada para a Demarcação de Limites entre as Corôas de Portugal, e de Hespanha nesta Capitania de S. Paulo.

Neste dia appareceu a Lua no horizonte desta Cidade as  $5^h 35'$ ; por cuja causa achava-se ao tempo do Phenomeno em humia mais que sufficiente altura, para estar inteiramente livre dos vapôres do horizonte, quando os houvesse: mas não sei por que causa foi este dia tão privilegiado pela natureza, que cessou inteiramente este infalivel, e constante Phenomeno.

Durou a nevoa neste dia singular até ás dez horas da manhã, e ficou depois disso toda a athmosfera tão bella, o azul celeste tão puro, e o horizonte tão izento de vapôres, que seria determinado o principio do Eclipse, e mais circumstancias com a mesma exactidão, com que se determinou na mesma altura, em que se achava a Lua, quando este Phenomeno succedesse algum tempo antes. Além disto, não se percebia vento algum; e estava o calor tão temperado, que chegou o Thermometro ao Meio-dia á  $74^\circ$  á pezar de ser já aquí principio de Inverno.

Tinha regulado a Pendula Astronomica por alturas correspondentes com toda a exactidão no dia 27; fiz o mesmo no dia 28, e ainda no dia 29, para que não houvesse mais outra incognita, do que o instante prefixo do Phenomeno, que se devia determinar, segundo o alcance do Oculo, e perspicacidade da vista do Observador. Chegou finalmente o annunciado instante; e á pezar da pouca commodidade, que tinha para observar este celebre, e natural Phenomeno, sempre fiz as observações seguintes.

Prin-

Principio do Eclipse total da Lua . . .	7 <sup>h</sup>	3'	20''
Imm. tot. de Grim. 1. <sup>a</sup> . . . . .	7	6	50
Imm. tot. de Gal. 2. <sup>a</sup> . . . . .	7	8	50
Imm. de Kepl. 4. <sup>a</sup> . . . . .	7	10	50
Imm. tot. . . . .	7	13	40
Imm. Mar. Hum. A. . . . .	7	16	40
Imm. tot. . . . .	7	22	10
Imm. de Copern. 11. <sup>a</sup> . . . . .	7	18	40
Imm. tot. . . . .	7	20	50
Imm. tot. de Plato 17. <sup>a</sup> . . . . .	7	25	40
Imm. Mar. Seren. F. . . . .	7	31	30
Imm. de Tyc. 21. <sup>a</sup> . . . . .	7	34	10
Imm. tot. . . . .	7	36	40
Imm. tot. de Procl. 35. <sup>a</sup> . . . . .	7	48	50
Imm. Mar. Crif. H. . . . .	7	49	50
Imm. tot. . . . .	7	54	50
Imm. Tot. da Lua . . . . .	8	1	0
Principio da Clar. ou Em. . . . .	9	37	30
Em. de Grim. tot. 1. <sup>a</sup> . . . . .	9	40	20
Em. de Arist. tot. 3. <sup>a</sup> . . . . .	9	46	30
Em. de Kepl. tot. 4. <sup>a</sup> . . . . .	9	50	30
Em. de Copern. tot. 11. <sup>a</sup> . . . . .	9	57	15
Em. de Tyc. tot. 21. <sup>a</sup> . . . . .	10	0	40
Em. de . . . tot. . . . .	10	7	30
Em. de . . . tot. . . . .	10	21	0
Em. de Mar. Crif. H. . . . .	10	28	10
Em. tot. . . . .	10	31	50
Fim do Eclipse total . . . . .	10	35	0
Fim da Penumbra. . . . .	10	37	30

*Comparação das Phases observadas em S. Paulo, com as que  
fôrão observadas em Lisboa no Observatorio da  
Academia.*

POR CUSTÓDIO GOMES DE VILLAS-BOAS.

Principio do Eclipse em Lisboa ás . . . . .	9 <sup>h</sup>	32'	57"
O mesmo em S. Paulo ás . . . . .	7	3	20
Differença dos meridianos . . . . .	2	29	37
Começa a Imm. de Keplero ás . . . . .	9	39	18
a mesm. em S. Paulo ás . . . . .	7	10	50
Differença . . . . .	2	28	28
Começ. a Imm. de Mar. Hum. A. . . . .	9	48	39
a mesma em S. Paulo . . . . .	7	16	40
Differ. . . . .	2	31	59
Immerção total de Plão 17. <sup>a</sup> . . . . .	9	54	35
a mesma em S. Paulo ás . . . . .	7	25	40
Differ. . . . .	2	28	55
Começa a Imm. do Tych 21. ás . . . . .	10	4	26
a mesma em S. Paulo . . . . .	7	34	10
Differ. . . . .	2	30	16
Immerção total do Tycho ás . . . . .	10	6	19
a mesma em S. Paulo . . . . .	7	36	40
Differ. . . . .	2	29	39
Começ. a Imm. de Mar. Crif. H. ás . . . . .	10	19	41
a mesma em S. Paulo ás . . . . .	7	49	50
Differ. . . . .	2	29	51
Imm. total de Mare Crisium ás . . . . .	10	24	38
a mesma em S. Paulo ás . . . . .	7	54	50
Differ. . . . .	2	29	48
Immerção total da Lua ás . . . . .	10	31	40
a mesma em S. Paulo ás . . . . .	8	1	0
Differ. . . . .	2	30	40

Começa a Emerſaõ da Lua ás . . . . .	12 <sup>h</sup>	7'	50"
a meſma em S. Paulo ás . . . . .	9	37	30
Differ. . . . .	2	30	20
<hr/>			
Emerſaõ total do Tycho 21. ás . . . . .	12	29	39
a meſma em S. Paulo ás . . . . .	10	0	40
Differ. . . . .	2	28	59
<hr/>			
Começa a Em. de Mar. Crif. H. . . . .	12	57	41
a meſma em S. Paulo . . . . .	10	28	10
Differ. . . . .	2	29	31
<hr/>			
Emerſaõ total de Mare Crif. . . . .	10	1	40
a meſma em S. Paulo . . . . .	10	31	50
Differ. . . . .	2	29	50
<hr/>			
Fim do Eclipse total ás . . . . .	13	5	46
o meſmo em S. Paulo . . . . .	12	35	0
Differ. dos meridianos . . . . .	2	30	41
<hr/>			
Fim da Penumbra ás . . . . .	13	7	43
a meſma em S. Paulo . . . . .	10	37	30
Differ. dos meridianos . . . . .	2	32	13

Temos pois, que de 29 obſervações feitas em S. Paulo ſe achão 15 correfpondentes ás minhas, que fôraõ 27; e por tanto temos 15 resultados, comprehendidos entre 2<sup>h</sup> 28' 28", e 2<sup>h</sup> 31' 59"; cujo meio entre todos dá 2<sup>h</sup> 29' 56"; porém como as obſervações do principio e fim do Eclipse, e do principio e fim da obſcuração total, ſão mais certas, tomando hum meio entre os 4 resultados, que ellas dão, temos 2<sup>h</sup> 30' 21" pela differença dos meridianos daquí a S. Paulo.

Já em outro tempo determinamos a meſma longitude por 8 obſervações do 1.º Satellite de Jupiter, feitas, e mandadas pelo noſſo Socio Bento Sanches d'Horta, as quaes deraõ 2<sup>h</sup> 30' 17", cujo resultado não differe ſe não 4" deſte ultimo, e por conſequite o meio entre ambos he 2<sup>h</sup> 30' 19". Affim a longitude de S. Paulo eſtá determinada com baſtante certeza. Contada do 1.º Meridiano vem a ſer 331º 26' 15", e referida ao de Paris, 49º 3' 45".

F I M.

IN-

# I N D I C E

Das Memorias, que contém este Segundo Tomo.

<b>D</b> EMONSTRAÇÃO do Theorema de Newton sobre a relação, que tem os coëfficientes de qualquer equação algebrica com as sommas das potencias das suas raizes, e applicação do mesmo Theorema ao desenvolvimento em serie dos productos compostos de infinitos factores, por Francisco de Borja Garção Stockler - - - - - pag. 1.	
Memoria sobre huma especie de petrificação animal, pelo P. João de Loureiro - - - - -	47.
Exame Phisico, e Historico se ha, ou tem havido no Mundo diversas especies de homens, pelo mesmo. - - -	56.
Descripção Botanica das Cúbebas Medicinaes, pelo mesmo. 82.	
Consideração Phisica, e Botanica da planta <i>Aerides</i> , que nasce, e se alimenta no Ar, pelo mesmo. - - -	88.
Memoria, em que se dá noticia de diversas especies de abelhas, que dão mel, proprias do Brasil, e desconhecidas na Europa, por Vicente Coelho de Seabra. - - - - -	99.
Observações Meteorologicas feitas no Real Collegio de Mafra no anno de 1785, por D. Joaquim da Assumpção Velho. - - - - -	105.
Observações Meteorologicas feitas no Real Collegio de Mafra no anno de 1786, pelo mesmo. - - - - -	132.
Memoria sobre os instrumentos de Reflexão, por José Maria Dantas Pereira. - - - - -	159.
Reflexões sobre certas sommações successivas dos termos das series arithmeticas, applicadas ás soluções de diversas questões algebricas, pelo mesmo. - - - - -	168.
Descripção de hum Monstro de especie Humana, existente na Cidade de S. Paulo na America Meridional, por Bento Sanches Dorta. - - - - -	187.
Observações Astronomicas feitas na Cidade de S. Paulo na America Meridional, pelo mesmo. - - - - -	190.
	Me-

I N D I C E.

Memoria <i>sobre as Equações de Condição das Funções Fluxionaes</i> , por Francisco de Borja Garçaõ Stockler. - - -	196.
Descripção <i>de hum Feto humano monstruoso, nascido em Coimbra no dia 28 de Novembro de 1791</i> , por Francisco Tavares. - - - - -	296.
Loxodromia da Vida Humana, ou Memoria <i>em que se mostra, qual seja a carreira da nossa especie pelos espaços da nossa presente existencia</i> , por José Joaquim Soares de Barros. - - - - -	306.
Memoria <i>sobre o Restabelecimento da quinta Ordem de Marcha</i> , alterada por haver alargado o vento, por Manoel do Espirito Santo Limpo. - - - - -	322.
Observações Astronomicas, e Meteorologicas <i>feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de 1784</i> , por Bento Sanchez Dorta. - - - - -	347.
Observações Astronomicas, e Meteorologicas <i>feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de 1785</i> , pelo mesmo. - - -	369.
Determinação <i>das Orbitas dos Cometas</i> , por José Monteiro da Rocha. - - - - -	402.
Memoria <i>sobre algumas propriedades dos Coefficientes dos termos do Binomio Newtoniano</i> , por Francisco de Borja Garçaõ Stockler. - - - - -	480.
Observações Astronomicas <i>feitas no Real Collegio de Mafra</i> , per D. Joaquim da Assumpção Velho. - - - -	512.
Noticia das Observações Astronomicas <i>feitas em o anno de 1790</i> , por Custodio Gomes de Villas-Boas - -	517.
Memorias dos Corrépondentes.	
Ensaio sobre as Brachystochronas, e Reflexões <i>sobre as Prop. 42, e 76 do II. Tomo da Mechanica de Euler</i> , por Francisco de Paula Travassos. - - - - -	3.
Observação Anatomica <i>de hum feto humano, que em consequencia de hum parto laborioso passou á bexiga urinaria</i> , por Manoel Joaquim de Soufa Ferrás - - - -	17.
Singular Observação <i>que confirma a Sympatbia do estomago com a cabeça</i> , pelo mesmo. - - - - -	21.
	Ob-

I N D I C E.

Observação de humna *Tubifica tuberculosa*, e de humna concre-  
 ção calcárea, achada no *utero*, pelo mesmo. - - 26.

Observationes Astronomicae Habitaе, ab Andrea Rodri-  
 gues. - - - - - 30.

Observatio Eclipsis Lunarіs habita, die 3 Januarii anno 1787,  
 in Collegio Romano, a Josepho Calandrelli. - - 39.

Observações Astronomicas feitas na Cidade de S. Paulo, com  
 hum Oculo Abromatico de  $3\frac{1}{2}$  pés, por Francisco de Oli-  
 veira Barbosa. - - - - - 40.

Comparação das Phases observadas em S. Paulo, com as que  
 fóraõ observadas em Lisboa no Observatorio da Academia,  
 por Custodio Gomes de Villas-Boas. - - - - 43.

1864

Received of the Treasurer of the  
City of New York the sum of  
Twenty Dollars for the  
Year 1864

John J. [Name]

Received of the Treasurer of the  
City of New York the sum of  
Twenty Dollars for the  
Year 1864

John J. [Name]

# C A T A L O G O

Das Obras já impressas, e mandadas compôr pela Academia Real das Sciencias de Lisboa: com os preços, por que cada humo d'ellas se vende brochada.

I.	<b>B</b> REVES Instrucções aos Correspondentes da Academia sobre as remessas dos productos naturaes para formar hum Museo Nacional, folheto 8.º	120
II.	Memorias sobre o modo de aperfeiçoar a Manufactura do Azeite em Portugal remettidas á Academia, por João Antonio Dalla-Bella, Socio da mesma, 1. vol. 4.º	480
III.	Memorias sobre a Cultura das Oliveiras em Portugal remettidas á Academia pelo mesmo Author, 1. vol. 4.º	480
IV.	Memorias de Agricultura premiadas pela Academia, 2. vol. 8.º	960
V.	Paschalis Josephi Mellii Freitii Historia Juris Civilis Lusitani Libris singularis, 1. vol. 4.º	640
VI.	Ejusdem Institutiones Juris Civilis, et Criminalis Lusitani, 5. vol. 4.º	2400
VII.	Olmia, Tragedia coroada pela Academia. folh. 4.º	240
VIII.	Vida do Infante D. Duarte, por André de Rezende, folh. 4.º	160
IX.	Vestigios da Lingoa Arabica em Portugal, ou Lexicon Etymologicò das palavras, e nomes Portuguezes, que tem origem Arabica, composto por ordem da Academia, por Fr. João de Sousa, 1. vol. 4.º	480
X.	Dominici Vandelli Viridarium Grysley Lusitanicum Linnæanis nominibus illustratum, 1. vol. 8.º	200
XI.	Ephemerides Nauticas, ou Diario Astronomico para o anno de 1789, calculado para o meridiano de Lisboa, e publicado por ordem da Academia, 1. vol. 4.º	360
	O mesmo para os annos seguintes até 1798. inclusivamente.	
XII.	Memorias Economicas da Academia Real das Sciencias de Lisboa, para o adiantamento da Agricultura, das Artes, e da Industria em Portugal, e suas Conquistas, 3. vol. 4.º	2400
XIII.	Collecção de Livros ineditos de Historia Portugueza, dos Reinados dos Senhores Reys D. João I., D. Duarte, D. Affonso V., e D. João II., 3. vol. folh.	5400
XIV.	Avisos interessantes sobre as mortes apparentes, mandados recopilar por ordem da Academia, folh. 8.º	gr.
XV.	Tratado de Educaçãõ Fyfica para uso da Nação Portugueza, publicado por ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco de Mello Franco, Correspondente da mesma, 1. vol. 4.º	360
XVI.	Documentos Arabicos da Historia Portugueza, copiados dos originaes da Torre do Tombo com permissãõ de S. Magestade, e vertidos em Portuguez, por ordem da Academia, pelo seu Correspondente Fr. João de Sousa, 1. vol. 4.º	480
XVII.	Observaçõs sobre as principaes causas da decadencia dos Portuguezes na Asia, escriptas por Diogo de Couto em fórma de Dialogo, com o titulo de Soldado Pratiço; publicadas por or-	

dem da Academia Real das Sciencias de Lisboa, por Antonio Caetano do Amaral, Socio Effectivo da mesma, 1. tom. in 8.º mi.	480
XVIII. Flora Cochinchinensis; siccens Plantas in Regno Cochinchinae nascentes. Quibus accedunt aliae observatae in Sinensi Imperio, Africa Orientali, Indiaeque locis variis, labore ac studio Joannis de Loureiro Regiae Scientiarum Academiae Ulyssipontensis Socii: Jussu Acad. R. Scient. in lucem edita, 2. vol. in 2.º mi.	2400
XIX. Synopsis Chronologica de Subsidiis, ainda os mais raros, para a Historia, e Estudo critico da Legislaçao Portugueza; mandada publicar pela Academia Real das Sciencias, e ordenada por José Analtasio de Figueiredo, Correspondente do Número da mesma Academia, 2. vol. 4.º	1800
XX. Tratado de Educaçao Fysica para uso da Naçao Portugueza, publicado por ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco José de Almeida, Correspondente da mesma; 1. vol. 4.º	360
XXI. Obras Poeticas de Pedro de Andrade Caminha, publicadas de ordem da Academia, 1. vol. 8.º	600
XXII. Advertencias sobre os abusos, e legitimo uso das Agoas Mineraes das Caldas da Rainha, publicadas de ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco Tavares, Socio Livre da mesma Academia, folh. 4.º	120
XXIII. Memorias de Literatura Portugueza, 6. vol. 4.º	2800
XXIV. Fontes Proximas do Codigo Filippino, por Joaquim José Ferreira Gordo, Correspondente da Academia, 1. vol. 4.º	400
XXV. Dicionario da Lingoa Portugueza, 1. vol. fol. mai.	4800
XXVI. Compendio da Theorica dos Limites, ou Introduçao ao Methodo das Fluxões por Francisco de Borja Garçao Stockler, Socio da Academia	240
XXVII. Ensaio Economico sobre o Comercio de Portugal, e suas Colónias, oferecido ao Principe do Brazil N. S., e publicado de ordem da Academia Real das Sciencias pelo seu Socio José Joaquim da Cunha de Azeredo Coutinho.	480
XXVIII. Tratado de Agrimensura por Estevão Cabral, Socio da Academia, em 8.º	240
XXIX. Analyse Chimica da Agoa das Caldas, por Guilherme Withering, em Portuguez e Inglez. folh. 4.º	240
XXX. Principios de Tactica Naval por Manoel do Espirito Santo Limpo, Correspondente do Número da Academia, 1. vol. 8.º	480
XXXI. Memorias da Academia Real das Sciencias, 2. vol. fol.	4000
XXXII. Memorias para a Historia da Capitania de S. Vicente, 1. vol. 4.º	480
XXXIII. Observações Historicas, e Criticas para servirem de Memorias ao systema da Diplomatica Portugueza, por João Pedro Ribeiro, Socio da Academia, Part. 1. 4.º	480
XXXIV. J. H. Lambert Supplementa Tabularum Logarithmicarum, et Trigonometricarum. 1. vol. 4.º	600
XXXV. Obras Poeticas de Francisco Dias Gomes, 1. vol. 4.º	800

Vendem-se em Lisboa na loja de Bertrand; e em Coimbra, e no Porto tambem pelos mesmos preços.













